М.Е.Горбунов

# ФИЗИЧЕСКИЕ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИНЦИПЫ СПУТНИКОВОГО РАДИОЗАТМЕННОГО ЗОНДИРОВАНИЯ АТМОСФЕРЫ ЗЕМЛИ

ГЕОС

Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова
Российской академии наук

**М.Е. Горбунов**

# ФИЗИЧЕСКИЕ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИНЦИПЫ СПУТНИКОВОГО РАДИОЗАТМЕННОГО ЗОНДИРОВАНИЯ АТМОСФЕТЫ ЗЕМЛИ

Москва
ГЕОС
2019

УДК 551.5/532.5
ББК 26.323
Г 12

**Горбунов М.Е. Физические и математические принципы спутникового радиозатменного зондирования атмосферы Земли. М.: ГЕОС, 2019. 290 с.**
ISBN 978-5-89118-780-1

В монографии дается обзор современного состояния радиозатменного зондирования атмосферы, включающий методы интерпретации и усвоения измерений в модели глобальной циркуляции атмосферы. Изложен оригинальный подход к решению обратной задачи радиозатменного зондирования атмосферы, основанный на восстановлении лучевой структуры волновых полей. Для этой цели привлекается аппарат линейных и нелинейных представлений. Линейные представления строятся с использованием интегральных операторов Фурье. Нелинейные представления основаны на квантовых плотностях Вигнера и Кирквуда. Изложены принципы вариационного усвоения радиозатменных данных в модели глобальной циркуляции атмосферы. Задача спутникового радиопросвечивания атмосферы сформулирована и решена, исходя из первых принципов, которыми являются уравнения Максвелла и физические свойства газов, составляющих атмосферу. Решение доведено до приложений в области исследования общей циркуляции атмосферы.

Для студентов, аспирантов и научных работников, специализирующихся на вопросах распространения радиоволн, радиофизического спутникового зондирования атмосферы Земли и моделирования численного прогноза погоды. Книга может служить введением для физиков в такие темы, как канонический оператор Маслова, интегральные операторы Фурье и квантовая плотность Вигнера.

Ответственный редактор
*академик Г.С. Голицын*

Рецензент *д.ф.-м.н. В.А. Банах*

Издание осуществлено при финансовой поддержке
Российского фонда фундаментальных исследований,
по проекту № 18-15-00031 Д




Издания РФФИ не подлежат продаже.

© М.Е. Горбунов, 2019
© ООО “Издательство ГЕОС”, 2019

# СОДЕРЖАНИЕ

**1. Введение** . . . . . 7
Литература . . . . . .16
**2. Рефракционные свойства атмосферы Земли** . . . . . .17
2.1. Векторное и скалярное волновое уравнение в вакууме . . . . . .17
Литература . . . . . 22
2.2. Рефракционные и рассеивающие свойства материальных сред . . . . . 22
Определение показателя преломления. Закон Снеллиуса . . . . . .22
Физическая оптика. Модель Лоренца . . . . . 23
Уравнения Максвелла в среде . . . . . 26
Формула Лоренца–Лоренца . . . . . .29
Показатель преломления газа из молекул с дипольным моментом . . . . . .31
Вращательные линии водяного пара . . . . . 32
Соотношения Крамерса–Кронига . . . . . 34
Молекулярное рассеяние . . . . . 36
Рассеяние на аэрозольных частицах . . . . . .38
Литература . . . . . 41
2.3. Показатель преломления нейтральной атмосферы . . . . . .41
Показатель преломления в приближении идеального газа . . . . . 41
Учет сжимаемости . . . . . 42
Уравнения гидростатики и состояния . . . . . .43
Приближенный учет сжимаемости . . . . . .45
Вклад капельной воды и кристаллов льда . . . . . 46
Зондирование на крыле линии поглощения водяного пара . . . . . .48
Модель распространения миллиметровых волн . . . . . .48
Литература . . . . . 51
2.4. Рефракционные свойства ионосферы . . . . . .52
Общие сведения об ионосфере . . . . . .52
Рефракционные свойства ионосферы на высоких частотах . . . . . 53
Рефракционные свойства ионосферы на радиочастотах . . . . . 54
Принцип действия ионозонда . . . . . 56
Фазовая и групповая скорости электромагнитных волн . . . . . .56
Анизотропия рефракционных свойств плазмы в магнитном поле . . . . . 57
Распространение плоских волн в анизотропной среде . . . . . 61
Перенос энергии электромагнитными волнами в анизотропной среде . . . . . .65
Литература . . . . . 66
**3. Распространение радиоволн** . . . . . 67
3.1. Волновое уравнение в неоднородной среде . . . . . 67
Исходное уравнение . . . . . 67
Оценки масштабов физических лучей . . . . . 68
Вывод уравнения Гельмгольца . . . . . .73
Литература . . . . . 76
3.2. Условия излучения и факторизация уравнения Гельмгольца . . . . . 76

Литература . . . . . 79
3.3. Общее решение граничной задачи с условиями излучения в вакууме . 79
Литература . . . . . 83
3.4. Пространственные спектры волнового поля.
Импульсное представление . . . . . 83
Литература . . . . . 87
3.5. Обращение волнового фронта, или обратное распространение . . . . . 88
Принципы взаимности и синтезированной апертуры . . . . . .88
Пример: радиозатменное зондирование колец Сатурна . . . . . 89
Анализ ионосферных неоднородностей . . . . . .93
Восстановление параметров нейтральной атмосферы . . . . . 95
Литература . . . . . 98
**4. Асимптотические методы решения волновых задач** . . . . . .100
4.1. Геометрическая оптика . . . . . 100
Исходные принципы . . . . . 100
Коммутация гамильтониана и осциллирующей экспоненты . . . . . 101
Асимптотическое разложение . . . . . 102
Гамильтонова механика. Принцип Ферма . . . . . 104
Условия применимости геометрической оптики . . . . . 107
Литература . . . . . 108
4.2. Лучевое многообразие и его проекции . . . . . .108
Литература . . . . . 112
4.3. Канонический оператор Маслова . . . . . .112
Вводные замечания . . . . . 112
Многообразия, векторные поля и дифференциальные формы . . . . . 113
Определение канонического оператора . . . . . 120
Коммутация гамильтониана и осциллирующей экспоненты . . . . . 122
Коммутация канонического оператора и оператора Гамильтона . . . . . 124
Заключительные замечания . . . . . 130
Литература . . . . . 131
4.4. Интегральные операторы Фурье . . . . . 131
Преобразование Фурье . . . . . .131
Общее определение интегральных операторов Фурье . . . . . 133
Групповые свойства интегральных операторов Фурье . . . . . .136
Литература . . . . . 139
4.5. Канонические преобразования в геометрической оптике . . . . . 139
Литература . . . . . 142
4.6. Канонические преобразования в волновой оптике . . . . . 143
Производящие и фазовые функции . . . . . 143
Коммутация интегральных операторов Фурье
и псевдодифференциальных операторов . . . . . 144
Теорема Егорова . . . . . 147
Заключительные замечания и примеры . . . . . 148
Литература . . . . . 149
4.7. Пример: гармонический осциллятор . . . . . .150
Динамика гармонического осциллятора. . . . . 150
Интегральный оператор Фурье 2-го типа и его свойства . . . . . 151
Интегральный оператор Фурье 1-го типа . . . . . .152
Групповое свойство и точность представления . . . . . 153
Литература . . . . . 154

**5. Моделирование радиозатменных экспериментов** . . . . . 155
5.1. Интегрирование уравнений геометрической оптики . . . . . 155
Вычисление лучей, фазы и амплитуды . . . . . .155
Методы возмущений в геометрической оптике . . . . . 158
Системы координат. Двумерное приближение . . . . . .159
Уравнения лучей в полярных координатах . . . . . .161
Угол рефракции . . . . . .162
Сверхрефракция и волноводное распространение . . . . . 164
Определение углов рефракции по измерениям фазы . . . . . 166
Амплитуда радиозатменных сигналов . . . . . 168
Определение углов рефракции по измерениям амплитуды . . . . . .170
Определение фазы и амплитуды по профилю угла рефракции . . . . . 171
Определение поглощения по измерениям амплитуды и фазы . . . . . .172
Приближение вертикальной геометрии и неподвижного источника . . . . . .173
Моделирование поля показателя преломления в атмосфере . . . . . .177
Литература . . . . . 182
5.2. Метод фазовых экранов . . . . . .184
Дифракционная модель радиозатменных экспериментов . . . . . .184
Определение области распространения радиоволн . . . . . 185
Метод фазовых экранов . . . . . .186
Модель распространения радиоволн . . . . . 187
Метод цилиндрических фазовых экранов . . . . . .189
Литература . . . . . 189
5.3. Асимптотическое прямое моделирование . . . . . .190
Каноническое преобразование 2-го типа к лучевым координатам . . . . . 190
Линеаризованное каноническое преобразование . . . . . 193
Прямое моделирование с использованием оператора 2-го типа . . . . . 195
Распространение волн в вакууме . . . . . 196
Литература . . . . . 200
**6. Обратная задача радиопросвечивания атмосферы** . . . . . 201
6.1. Радиозатменное зондирование атмосфер планет и Земли . . . . . 201
Литература . . . . . 203
6.2. Решение обратной задачи в приближении геометрической оптики. . . .207
Обращение углов рефракции . . . . . 207
Влияние волноводов . . . . . 209
Восстановление метеопараметров . . . . . 210
Восстановление комплексного показателя преломления . . . . . 211
Обращение комплексного показателя преломления . . . . . .212
Литература . . . . . 213
6.3. Восстановление лучевой структуры волнового поля . . . . . .213
Общие замечания . . . . . 213
Каноническое преобразование 1-го типа . . . . . 214
Каноническое преобразование 2-го типа . . . . . 217
Литература . . . . . 221
6.4. Общая схема обработки данных измерений . . . . . 222
Исходные данные . . . . . 222
Демодуляция фазовой задержки в канале L1 . . . . . 223
Предварительная обработка данных измерений . . . . . .224
Обработка фазовой задержки в канале L2 и контроль качества . . . . . 225
Определение углов рефракции в каналах L1 и L2 . . . . . 226

Оценка погрешностей углов рефракции . . . . . 227
Статистическая регуляризация и контроль качества . . . . . 227
Восстановление профиля сухой температуры . . . . . 228
Обращение и оценка погрешностей восстановленной температуры . . . . . 229
Литература . . . . . 229
6.5. Методы вариационного усвоения . . . . . 231
Вводные замечания . . . . . 231
Общие принципы прямого вариационного усвоения . . . . . 232
Линеаризованная модель поля показателя преломления . . . . . 234
1-мерная линеаризованная модель угла рефракции . . . . . 238
3-мерная линеаризованная модель угла рефракции . . . . . 240
Другие подходы к усвоению . . . . . 246
Литература . . . . . 247
**7. Нелинейные представления волновых полей** . . . . . 248
7.1. Волновое поле и связанное с ним фазовое пространство . . . . . 248
Литература . . . . . 249
7.2. Спектрограмма как плотность на фазовом пространстве . . . . . 249
Литература . . . . . 256
7.3. Общий подход к фазовым плотностям осциллирующих сигналов . . . . 257
Литература . . . . . 259
7.4. Плотности и наблюдаемые в классической механике . . . . . 260
Литература . . . . . 261
7.5. Исчисление функций от некоммутирующих операторов . . . . . 262
Принцип соответствия классической и квантовой механики . . . . . 262
Экспоненциальные функции от операторов . . . . . 262
Вейлевские и упорядоченные символы операторов . . . . . 263
Асимптотические формулы для символа коммутатора двух операторов . . . 264
Связь между ядром и символом . . . . . 265
Связь между вейлевским и упорядоченным символами . . . . . 266
Примеры . . . . . 268
Литература . . . . . 269
7.6. Плотность и наблюдаемые в квантовой механике . . . . . 269
Оператор плотности . . . . . 269
Символ оператора плотности и средние значения наблюдаемых . . . . . 271
Матрица плотности и нелинейные представления . . . . . 273
Литература . . . . . 274
7.7. Томографическое определение плотности . . . . . 274
Литература . . . . . 279
7.8. Приложение к радиозатменным данным . . . . . 279
Свойства квантовой плотности Вигнера . . . . . 279
Оконная плотность Вигнера . . . . . 281
Приложение к радиозатменным данным . . . . . 281
Обработка искусственных данных . . . . . 281
Обработка экспериментальных данных . . . . . 283
Литература . . . . . 286
**Заключение** . . . . . 288

*Светлой памяти моего учителя*
*Александра Сергеевича Гурвича*

# 1. Введение

> По моему мнению, всякий, кто собирается писать книгу, должен с разных сторон подумать о предмете, относительно которого он хочет писать. Нелишним будет также, насколько это возможно, познакомиться с тем, что уже было прежде написано по тому же предмету.
>
> …
>
> У каждого поколения — своя собственная задача, и ему не нужно предпринимать сверхъестественные усилия, чтобы пытаться быть всем для предшествующего или последующего поколений. И для каждого единичного индивида в поколении, так же, как и для каждого дня, — довольно своей заботы и достаточно трудностей, чтобы тревожиться о себе самом, а потому ему совсем ни к чему обнимать весь современный ему мир своей отеческой заботой или полагать, будто некая новая эра или эпоха должны начаться с его книги, а уж тем более с новогоднего факела его обещаний или с далеко идущих обетов его указаний, или с намеков на его обеспеченность сомнительной монетой.
>
> …
>
> Помимо этого, мне нечего больше добавить, кроме искреннего пожелания доброго здоровья каждому, кто разделяет мои воззрения, равно как и каждому, кто их не разделяет, каждому, кто прочтет эту книгу, равно как и каждому, для кого достаточно и предисловия!
>
> *С. Кьеркегор.* «Понятие страха»

В данной книге я постарался развить определенную систему взглядов на электромагнитные поля, распространяющиеся в атмосфере, и на методы восстановления параметров атмосферы по результатам ее радиопросвечивания. Основная идея книги заключается в том, что за волновым полем можно увидеть его геометрооптическую структуру. Эту структуру можно восстановить и решать обратную задачу восстановления параметров среды, пользуясь представлениями геометрической оптики, что существенно проще решения дифракционных обратных задач.

Примененные методы в значительной мере не новы. Многие подходы были выработаны еще в 1920–1930-е годы, когда бурно развивалась квантовая механика. Тот факт, что квантово-механические методы оказались столь плодотворными в области обратных задач зондирования атмосферы при помощи электромагнитных волн, в наше время никого не удивит: все волновые процессы описываются теми же уравнениями, и для них характерны те же закономерности. Поэтому интегральные операторы Фурье, которые были введены

Фоком как реализация канонических преобразований в квантовой механике, и квантовые плотности Вигнера и Кирквуда работают не только в квантовой механике, но и в радиофизике. Не новой можно считать и идею сведения дифракционной обратной задачи к геометрооптической. Первые шаги в этом направлении были сделаны в рамках метода обратного распространения, состоящего в компенсации дифракционных эффектов.

Но все же и автору данной книги принадлежит ряд оригинальных идей. Это относится к общим методам восстановления лучевой структуры, или деквантования волновых полей. Большим успехом я также считаю идею применения квантовой плотности для анализа радиозатменных данных.

Несмотря на солидный возраст аппарата интегральных операторов Фурье и квантовых плотностей, в имеющейся литературе я не нашел, с одной стороны, достаточно глубокого, с другой стороны, достаточно понятного для физиков их изложения. Например, формулировка теоремы Егорова, которую можно найти в математических монографиях, мало что скажет физику. Именно поэтому я решил заполнить данный проблем и дать достаточно подробное и понятное изложение теории интегральных операторов Фурье и теории квантовых плотностей.

Книга написана в расчете на физиков, а не на математиков. Математический аппарат, который я применил, в конечном счете достаточно прост и адекватен решаемым задачам. Весь математический аппарат, использованный в книге, подбирался по ходу решения конкретных задач, связанных с обработкой экспериментальных данных. Именно поэтому монография максимально далека от абстрактной математики.

Основой всех применяемых методов является, в первую очередь, преобразование Фурье и его основные свойства, а также ряд других стандартных разделов математического анализа и уравнений математической физики. И я надеюсь, что нынешние выпускники вузов по математическим и физическим специальностям такими знаниями обладают. Вступительные главы некоторых математических книг, перечисляющие требования к читателю, производят иногда удручающее впечатление. Выясняется, что для понимания одной книги нужно прочесть еще десяток. Этого я старался избежать. Моей целью было дать максимально замкнутое изложение принципов радиозатменного зондирования.

Но и любое упрощение имеет предел. Получившаяся в результате книга не является легким чтением. Тем не менее я надеюсь, что она принесет пользу. Книга написана несколько шире заявленной темы радиозатменного зондирования. Хотелось бы, чтобы ее смог прочесть и понять аспирант. Вступительные разделы, возможно, кому-то покажутся тривиальными. Но опыт показывает, что книгу лучше начинать с вещей простых и постепенно вводить более сложный круг понятий.

* * *

Спутниковое дистанционное зондирование атмосферы в наши дни является одним из важнейших методов получения данных для численного прогноза

погоды и для исследования климата. Спутники обеспечивают глобальное покрытие всей поверхности Земли сетью зондирований. Зондирование проводится в широком диапазоне электромагнитных волн, начиная от радиоволн до ультрафиолетового излучения. В качестве источника может использоваться излучение самой атмосферы, Солнца, Луны, звезд или передатчиков, размещенных на искусственных спутниках. Существуют разные схемы зондирования, в которых может регистрироваться излучение, рассеянное поверхностью Земли или атмосферой, или прямое излучение естественных или искусственных космических источников, прошедшее через атмосферу и регистрируемое специализированным приемником, установленным на низкоорбитальном спутнике.

Данная монография посвящена задаче зондирования атмосферы в радиодиапазоне с использованием излучения искусственных космических источников. Мы будем рассматривать круг математических методов для описания распространения электромагнитных волн в атмосфере и для решения обратной задачи восстановления полей метеорологических величин (давление, температура и влажность) по измерениям когерентного радиоизлучения, прошедшего через атмосферу.

Идея спутникового зондирования атмосферы Земли в радиодиапазоне была выдвинута еще в середине 1960-х годов. Тогда было предложено запустить на синхронную орбиту систему спутников, оснащенных передатчиками и приемниками радиоволн. При этом предполагалось измерять амплитуду и фазу радиоволн, прошедших вдоль лимбовой трассы, т.е. трассы космос – атмосфера – космос. Каждое такое измерение содержит интегральную информацию о показателе преломления атмосферы вдоль трассы. Показатель преломления, в свою очередь, является функцией от метеопараметров: температуры, давления и удельной влажности. При достаточном количестве измерений можно сформулировать задачу томографического восстановления метеопараметров атмосферы в плоскости орбиты. С современной точки зрения, такая схема выглядит утопично, поскольку для достижения разумной точности и пространственного разрешения восстановления метеополей потребовалось бы слишком много спутников. Поддержание синхронных орбит такой системы практически нереализуемо. При этом зондируется лишь одно сечение атмосферы.

В конце 1960-х годов была предложена простая и реалистичная схема зондирования атмосферы, легшая в дальнейшем в основу радиозатменного метода. В рамках этой схемы достаточно двух спутников, один из которых оснащен передатчиком, а другой – приемником. При этом спутники движутся так, что радиолуч, соединяющий их, погружается в атмосферу, т.е. с точки зрения приемника происходит радиозаход передатчика за лимб планеты. Измерений амплитуды или фазы, полученных в течение такого радиозатменного эксперимента, достаточно для того, чтобы восстановить вертикальный профиль показателя преломления. Требуется лишь, чтобы горизонтальные градиенты показателя преломления были достаточно малы и атмосферу можно было считать локально сферически-слоистой. Начиная с конца 1960-х годов эта схема с успехом применялась для зондирования планетных атмосфер.

Первые попытки применения радиозатменного метода для зондирования атмосферы Земли относятся к 1970-м и 1980-м годам. Однако требования к

точности зондирования атмосферы Земли значительно выше требований к точности зондирования планетных атмосфер. Стабильность передатчиков, использовавшихся до середины 1990-х годов, была недостаточна для достижения требуемой точности определения параметров атмосферы Земли.

Появление системы глобальной спутниковой навигации GPS, включающей спутники с высокостабильными передатчиками, изменило ситуацию. Достоинства метода зондирования атмосферы Земли при помощи сигналов системы GPS состоят в следующем: 1) стабильность калибровок измерительной аппаратуры обеспечивается наличием атомных часов на корреспондирующих спутниках, 2) низкая стоимость приемника, 3) всепогодность метода (в частности, нечувствительность к облачности) и 4) глобальное покрытие (характерное для всех спутниковых методов). Однако радиозатменный метод не лишен и недостатков: 1) невозможность выделить вклад влажности без привлечения дополнительной информации, 2) низкое горизонтальное разрешение (характерное для всех лимбовых методов). Проблема с выделением вклада влажности связана с частотным диапазоном системы GPS (1.2–1.5 ГГц), в котором у водяного пара нет линий поглощения. Переход к диапазону 9–22.6 ГГц, лежащему на крыле линии 22.6 ГГц, позволит решить эту проблему.

В 1995 г. в США был запущен спутник Microlab-1 в рамках эксперимента GPS/MET (GPS Meteorology), проведенного в UCAR (University Corporation for Atmospheric Research, Boulder, Colorado). Этот эксперимент проводился в течение двух лет (до 1997 г.) и позволил оценить возможности радиозатменного метода применительно к атмосфере Земли. Измерения выполнялись в течение нескольких двухнедельных периодов (prime time), когда была отключена система искусственного зашумления сигналов GPS псевдослучайным шумом (anti-spoofing). При обработке экспериментальных данных определялись углы атмосферной рефракции, т.е. изменение направления распространения лучей в оптически неоднородной среде. Угол рефракции как функция высоты луча является наиболее удобной величиной для формулирования обратной задачи восстановления поля показателя преломления, по которому можно восстановить поля метеопараметров атмосферы. Методы, рассматриваемые в данной монографии, нацелены на определение высотных профилей угла рефракции по измерениям волновых полей и дальнейшее решение обратной задачи в приближении геометрической оптики.

Обработка данных эксперимента GPS/MET показала высокую точность восстанавливаемых профилей показателя преломления. Исключением являлась тропосфера в тропиках, где были выявлены значительные систематические ошибки. Эти ошибки связаны с многолучевым распространением радиоволн в тропосфере. Многолучевость возникает из-за сложной структуры метеополей, в частности поля влажности, которая приводит к тому, что угол рефракции становится немонотонной функцией высоты луча. Волновое поле в области многолучевого распространения имеет сложную структуру, его амплитуда и фаза сильно флуктуируют. Связь волнового поля с атмосферным полем показателя преломления оказывается нелокальной. В ходе обработки данных эксперимента GPS/MET были заложены основы математического аппарата для решения такого класса обратных задач.

Основная идея математического подхода к данной проблеме состояла в том, чтобы свести волновую задачу к геометрооптической. Геометрическая оптика основана на понятии лучей, образующих лучевые трубки, вдоль которых распространяется энергия волнового поля. Лучи (в изотропной среде) являются нормалями к волновым фронтам. Если распространение является однолучевым, т.е. в каждую точку области наблюдения приходит не более одного луча, то связь между лучевой и волновой картиной оказывается достаточно простой. Для определения лучевой структуры достаточно знать только фазу волнового поля, при этом градиент фазы направлен вдоль лучей. Поскольку абсолютная величина вектора градиента фазы жестко определена длиной волны, и если измерить фазу только на некоторой поверхности, а не во всей трехмерной области, то и в этом случае можно определить направления лучей, пришедших на данную поверхность.

Эта очень простая связь лучевой и волновой картин является, разумеется, приближенной. Отклонение волнового поля от лучевой картины называется дифракцией. Дифракция приводит к обмену энергией между разными лучевыми трубками и размытию границы между областью света и геометрооптической тенью. В волновой оптике тень как область с нулевой амплитудой отсутствует. Ограничения геометрической оптики сильнее всего проявляются на каустиках. Каустики определяются как множества точек, в которых происходят фокусировки, т.е. площади сечения бесконечно малых лучевых трубок равны нулю. В геометрической оптике это означает бесконечную амплитуду поля. В волновой оптике амплитуда будет всегда конечной. В ряде случаев на геометрооптической каустике у волнового поля не будет даже заметного максимума.

В случае многолучевого распространения наблюдаемое поле будет равно суперпозиции компонент поля, соответствующих нескольким интерферирующим лучам. Градиент фазы каждой компоненты будет определять направление луча. Однако наблюдаемыми являются не лучевые компоненты поля по отдельности, а их сумма. Ясно, что вычисление градиента фазы суммарного поля не позволит определить направления множественных лучей в данной точке. Разделение лучевых компонент требует уже интегрального анализа картины волнового поля с учетом и его амплитуды, и его фазы. Поскольку использование фазы здесь является критичным, методы такого анализа получили общее название радиоголография. Под голографией понимаются технологии точной записи и воспроизведения волновых полей в оптике, в отличие от фотографии, где фиксируется лишь амплитуда.

Простой подход к выявлению лучевой картины состоит в Фурье-анализе волнового поля в скользящих апертурах. Поскольку каждый луч локально можно представить плоской волной, Фурье-спектр волнового поля должен иметь максимумы, соответствующие лучам. Пространственные частоты этих максимумов определяют направление лучей. Для улучшения разрешения Фурье-анализа измеряемый сигнал можно поделить на опорный (модельный) сигнал, учитывающий кривизну волнового фронта. У этого метода существуют, однако, фундаментальные ограничения на разрешения, связанные с соотношением неопределенности. Уменьшение размера скользящих апертур улучшает

точность пространственной привязки лучей, но ухудшает угловое разрешение при определении их направления и наоборот. Семейство Фурье-спек-тров можно рассматривать как распределение плотности на фазовом пространстве лучей, где координатами являются точка прихода и направление луча. Такая плотность называется спектрограммой, и она позволяет локализовать лучи в ячейках фазового пространства с объемом порядка длины волны.

Другой подход к анализу волнового поля основан на обращении волнового фронта, или обратном распространении. Этот метод был впервые применен для обработки дифракционных изображений колец Сатурна в радиодиапазоне, записанных с большого расстояния. Обратное распространение позволяет по измеренному полю в плоскости наблюдения вычислить поле в плоскости наблюдаемого объекта и тем самым устранить дифракционные искажения изображения. Теоретическая разрешающая способность метода равна длине волны. Практически она определяется размером синтезированной апертуры, представляющей набор большого числа измерений волнового поля в разных точках пространства. Применительно к интерпретации измерений волнового поля, прошедшего через атмосферу, этот метод модифицируется следующим образом. Отыскивается некоторая плоскость, такая, чтобы процедура обратного распространения поля в эту плоскость устраняла или, по крайней мере, минимизировала многолучевость. С лучевой точки зрения, вакуумное обратное распространение соответствует нахождению прямых асимптот лучей. Эта процедура сохраняет направление лучей в плоскости наблюдения. Если существует такая плоскость, в которой обратное распространение устраняет многолучевость, то в ней направления лучей можно определить, пользуясь геометрооптическим методом, т.е. вычисляя производную фазы. Таким образом, можно определить высотный профиль угла рефракции. Основным недостатком этого метода является то, что оптимальное положение плоскости обратного распространения оказывается зависящим от неизвестной лучевой структуры измеренного поля. Кроме того, существуют ситуации, когда многолучевость таким способом устранить невозможно. Несмотря на это, применение подхода, основанного на синтезированной апертуре, позволило сформулировать еще одно важное достоинство радиозатменного метода: возможность достижения высокого вертикального разрешения.

Анализ результатов эксперимента GPS/MET 1995–1997 гг. позволил наметить важнейшие направления дальнейшего развития не только в области математических методов обработки измеренных сигналов, но и в области улучшений приемника. Использованная схема слежения за сигналом в режиме фазовой автоподстройки оказалась неэффективной в многолучевых областях, где сигнал сильно флуктуирует. Флуктуации приводили к потере сигнала и к значительной систематической ошибке определения фазы. В ходе обработки данных эксперимента GPS/MET были сформулированы требования к системе измерений волнового поля. Такие измерения должны проводиться по схеме открытой петли, т.е. без обратной связи для фазовой автоподстройки.

Успех первого эксперимента по радиозатменному зондированию атмосферы стимулировал дальнейшее развитие этого метода. В 2000 г. были запущены спутники CHAMP (Challenging Minisatellite Payload, Германия) и SAC-C

(Satélite de Aplicaciones Científicas-C, Аргентина). Приемники на этих двух спутниках были идентичны, они были снабжены улучшенной антенной, однако в них снова была реализована схема фазовой автоподстройки. В отличие от эксперимента GPS/MET, измерения проводились непрерывно с 2001 по 2006 г. спутником SAC-C и по 2009 г. спутником CHAMP. Каждый из этих спутников поставлял около 200 глобально распределенных зондирований в день. Эти эксперименты дали богатый материал для исследований погоды и климата. В ходе обработки их результатов математические методы интерпретации волновых полей получили дальнейшее развитие. Была сформулирована общая идея, основанная на использовании линейных и нелинейных представлений волновых полей.

Линейные представления, которые были введены еще в самом начале развития квантовой механики, реализуются при помощи интегральных операторов Фурье. Такие операторы введены в работах Фока по квантовой механике. Позднее их математическая теория была развита в работах Егорова и Хёрмандера и была выявлена их связь с каноническим оператором Маслова. В работах Фока и Егорова доказано, что эти операторы реализуют преобразования волновой функции, соответствующие каноническим преобразованиям классической механики. Каноническим называется такое преобразование координат и импульсов, что в новом координатном пространстве сохраняется гамильтонова форма уравнений движения. Общая теорема о связи интегральных операторов Фурье с каноническими преобразованиями, играющая ключевую роль в теории этих операторов, носит имя Егорова. Этой теоремой устанавливается простая связь между производящей функцией канонического преобразования и осциллирующим ядром соответствующего оператора.

Теория линейных представлений позволяет взглянуть на метод обратного распространения с более общей точки зрения. Как отмечено выше, направление луча однозначно связано с производной фазы волнового поля. Это позволяет ввести фазовое пространство, связанное с волновым полем. Лучи в этом фазовом пространстве образуют лучевое многообразие. Одно- и многолучевое распространение и каустики соответствуют разным типам проекции лучевого многообразия на координатную ось. Для определения лучевой структуры волнового поля необходимо произвести такую замену координат и импульсов в фазовом пространстве, чтобы проекция лучевого многообразия на новую координатную ось стала однозначной. Такая замена координат должна обязательно реализоваться каноническим преобразованием. Тогда новое представление волнового поля будет реализовано линейным интегральным оператором Фурье. Новый импульс будет однозначной функцией новой координаты, и для его вычисления достаточно найти производную фазы волновой функции в новом представлении.

Теория нелинейных представлений волновых полей теснейшим образом связана с теорией линейных представлений и также основана на понятии фазового пространства. Для линейных представлений существен выбор системы канонических координат, и представление волновой функции связано с определенной проекцией лучевого многообразия. Нелинейные представления оперируют с распределениями на фазовом пространстве и оказываются неза-

висимыми от выбора канонических координат. Простейшим примером такого распределения является упоминавшаяся выше спектрограмма. Спектрограмма может считаться плотностью, поскольку она всегда положительна. Однако она не является представлением волнового поля, т.е. из нее нельзя однозначно восстановить волновое поле. Существует широкий класс распределений на фазовом пространстве. Помимо спектрограмм, он включает псевдоплотности, которые не являются положительно-определенными, но являются представлениями поля. Такие представления были введены в квантовой механике еще в 1930-годы Вигнером и Кирквудом. Можно переформулировать квантовую механику, используя квантовые плотности Вигнера и Кирквуда вместо традиционной волновой функции. В дальнейшем эта конструкция нашла применения в цифровой обработке сигналов под названием спектров Вигнера–Вилля, которые существенно позволяют улучшить разрешение по сравнению со спектрограммой. В радиофизике плотность Вигнера получила название лучевой плотности. Применительно к обработке радиозатменных данных аппарат функции Вигнера позволяет строить распределения на фазовом (лучевом) пространстве и тем самым восстанавливать лучевую структуру волнового поля.

В 2006 г. начался эксперимент COSMIC (Constellation Observing System for Meteorology, Ionosphere, and Climate, США, Тайвань). Была запущена группировка из 6 низкоорбитальных спутников, оснащенных усовершенствованными приемниками, в которых был реализован режим открытой петли. Эти приемники позволили существенно улучшить качество тропосферных измерений. Разработанные ранее методы восстановления лучевой структуры волновых полей и решения обратной задачи позволили максимально реализовать потенциал этих измерений. Эта система спутников поставляла до 3500 глобально распределенных зондирований в день. Увеличение числа зондирований по сравнению с экспериментом CHAMP было достигнуто не только за счет увеличения числа спутников, но и за счет того, что приемник был в состоянии принимать сигналы как для радиозаходов, так и для радиовосходов. К настоящему моменту (конец 2018 г.) данная группировка почти исчерпала свой ресурс, некоторые из спутников перестали поставлять данные.

С 2008 г. радиозатменные данные начали использоваться в Европейском Центре Среднесрочных Прогнозов Погоды (European Centre for Medium-Range Weather Forecasts, ECMWF). Для этого была разработана методика вариационного усвоения радиозатменных данных в модели глобальной циркуляции атмосферы.

Вариационное усвоение было предложено в конце 1980-х годов. Его идея заключается в отыскании наиболее вероятного вектора состояния атмосферы при условиях, налагаемых имеющимися наблюдениями с учетом статистики их ошибок.

В моделях глобальной циркуляции атмосферы непрерывные метеополя заменяются многомерными векторами их значений в узлах дискретной модельной сетки. Размерности таких векторов в современных моделях измеряются миллионами. Каждая наблюдаемая величина представляется в виде функционала от вектора состояния атмосферы. Такой функционал называют

оператором наблюдений. Он зависит лишь от небольшой доли компонент этого вектора.

Для локальных измерений, например температуры, при помощи радиозонда оператор наблюдений состоит в интерполяции сеточного поля температуры в точку наблюдения. Спутниковые наблюдения имеют интегральный характер. Для радиозатменных наблюдений оператор должен учесть геометрическую форму луча. Наблюдаемая величина будет зависеть как минимум от значений метеополей в вершинах тех ячеек 3-мерной модельной сетки, через которые проходит луч. При этом в силу рефракции геометрия луча сама зависит от метеополей, поэтому структура оператора наблюдений оказывается сложной. Для усвоения каждого из имеющихся типов наблюдений центры численного прогноза погоды привлекают специалистов в соответствующей области, которые на основе физической модели измерений строят программную реализацию оператора наблюдений и задают статистику ошибок измерений.

Априорное распределение вероятностей для вектора состояния атмосферы задается прогнозом и его распределением ошибок. Связи между измерениями и вектором состояния атмосферы задаются операторами наблюдений. Распределение ошибок измерений определяет апостериорное распределение вероятностей неизвестного вектора состояния атмосферы. Согласно теореме Байеса, условное распределение вероятности равно нормированному произведению априорного и апостериорного распределений.

Задача нахождения максимума условной вероятности требует большого объема вычислений в силу большой размерности как вектора неизвестных, так и вектора усваиваемых измерений. Проще всего задача формулируется для гауссовых распределений. В этом случае удобно минимизировать целевую функцию, равную взятому с обратным знаком логарифму условной вероятности, который представим в виде квадратичной формы. Для минимизации используются итерационные градиентные методы.

По аналогии с 3-мерным строится и 4-мерное усвоение, в котором добавляется временная координата и учитывается динамика атмосферных полей. И 3-, и 4-мерное усвоение требует значительных вычислительных затрат. Для их сокращения используются различные приближения, сводящие 3-мерную задачу к 2-мерной или 1-мерной.

Вариационное усвоение является очень гибким подходом к встраиванию данных контактных и дистанционных наблюдений в модели глобальной циркуляции атмосферы. Этот подход позволяет единообразно и оптимально усваивать произвольные данные наблюдений с учетом всей априорной информации. При этом система уравнений для вектора состояния атмосферы может быть как недоопределенной, так и переопределенной. В частности, это решает упомянутую выше проблему определения влажности по радиозатменным данным.

Очерченные подходы к решению прямой и обратной задач радиопросвечивания атмосферы рассматриваются в данной монографии. Монография дополняет вышедшие ранее книги по радиозатменному методу [1–4]. В частности, в данной монографии детально разобраны вопросы математического аппарата интегральных операторов Фурье и нелинейных представлений волно-

вых полей, основанных на функциях Вигнера и Кирквуда, которые в указанных книгах либо не освещены, либо освещены кратко. С другой стороны, монографии [1–4] освещают ряд вопросов, не рассмотренных или рассмотренных кратко в данной книге.

Данная монография предназначена для студентов, аспирантов и научных работников, специализирующихся на вопросах распространения радиоволн и радиофизического зондирования атмосферы Земли и усвоения данных спутникового зондирования в модели численного прогноза погоды. Книга может служить введением для физиков в такие темы, как канонический оператор Маслова, интегральные операторы Фурье и квантовые плотности Вигнера и Кирквуда в применении к решению обратных задач зондирования атмосферы. Для понимания материала достаточно знаний в объеме стандартных университетских курсов общей физики, математического анализа, аналитической геометрии и уравнений математической физики. Изложение сопровождается примерами обработки экспериментальных данных.

Список цитированной литературы охватывает важнейшие журнальные статьи и монографии по радиозатменному зондированию. Кроме того, выборочно цитируется литература по физике атмосферы, физической оптике, спектроскопии, теоретической и математической физике. Регулярно обновляемый, практически полный список журнальных публикаций по радиозатменному зондированию атмосферы Земли и планет с функциями поиска по автору и ключевым словам можно найти на сайте проекта COSMIC: http://www.cosmic.ucar.edu/references/references.cgi.

Автор выражает благодарность А.С. Гурвичу, С.В. Соколовскому, А. Йенсену, К. Лауритсену, А.А. Вигасину, А.Г. Виноградову и О.А. Коваль за обсуждение вопросов, затронутых в книге.

## Литература

1.*Яковлев О.И.* Космическая радиофизика. М.: Научная книга, 1998. 432 с.

2.*Яковлев О.И., Павельев А.Г., Матюгов С.С.* Спутниковый мониторинг Земли. Радиозатменный мониторинг атмосферы и ионосферы. М.: Книжный дом «Либроком», 2010. 208 с.

3.*Liou Y.A., Pavelyev A.G., Matyugov S.S., Yakovlev O.I., Wickert J.* Radio occultation method for remote sensing of the atmosphere and ionosphere / Ed. by Y.A. Liou. In-Teh, Olajnica 19/2, 32000 Vukovar, Croatia, 2010. 176 p.

4.*Jin Sh., Cardellach E., Xie F.* GNSS Remote sensing. Theory, methods and applications // Remote Sensing and Digital Image Processing. V. 19. Dordrecht: Springer Science+Business Media, 2014.

# 2. Рефракционные свойства атмосферы Земли

## 2.1. Векторное и скалярное волновое уравнение в вакууме

В данной монографии мы будем обсуждать вопросы зондирования атмосферы при помощи электромагнитных волн. Изложение целесообразно начать с обсуждения электромагнитных полей в вакууме, поскольку эта теория является основой для описания распространения электромагнитных волн в рефрагирующих средах.

Электромагнитное поле характеризуется векторами напряженности электрического поля $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ и магнитной индукции $\boldsymbol{\mathcal{B}}$, определяющими силу Лоренца, с которой электромагнитное поле действует на заряд $q$, движущийся со скоростью $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{F} = q\boldsymbol{\mathcal{E}} + q\left[\mathbf{v}, \boldsymbol{\mathcal{B}}\right], \tag{2.1.1}$$

где квадратными скобками обозначено векторное произведение. Здесь и далее мы пользуемся системой единиц СИ, в которой напряженность электрического поля измеряется в Н/Кл = В/м, а магнитная индукция – в Тл = Н/(А·м) = Н·с/(Кл·м).

Источниками электромагнитного поля являются электрические заряды, которые характеризуются скалярной плотностью заряда $\rho$ и вектором плотности тока $\mathbf{j}$. Электромагнитное поле описывается уравнениями Максвелла [1, 2]:

$$\begin{gathered} \operatorname{div}\boldsymbol{\mathcal{E}} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \qquad \operatorname{rot}\boldsymbol{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{B}}}{\partial t}, \\ \operatorname{div}\boldsymbol{\mathcal{B}} = 0, \quad c^2 \operatorname{rot}\boldsymbol{\mathcal{B}} = \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial t} + \frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0}, \end{gathered} \tag{2.1.2}$$

где $c$ равно 299 792 458 м/с – скорость света в вакууме, $\varepsilon_0 = \dfrac{10^7}{4\pi c^2} = 8{,}854187817 \times 10^{-12}$ Ф/м – электрическая постоянная (диэлектрическая проницаемость вакуума).

Следствием уравнений Максвелла является закон сохранения заряда. Применяя оператор $\operatorname{div}$ к последнему уравнению, пользуясь тождеством $\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{\mathcal{B}} = 0$ и первым уравнением, получаем

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{j} = 0. \tag{2.1.3}$$

Поскольку $\operatorname{div}\boldsymbol{\mathcal{B}} = 0$, поле магнитной индукции равно ротору от некоторого векторного поля $\mathbf{A}$, называемого векторным потенциалом:

$$\boldsymbol{\mathcal{B}} = \operatorname{rot}\mathbf{A}. \tag{2.1.4}$$

Подставляя это представление во второе уравнение, получаем

$$\operatorname{rot}\left(\boldsymbol{\mathcal{E}}+\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)=0, \tag{2.1.5}$$

откуда следует, что $\boldsymbol{\mathcal{E}}+\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ равняется градиенту некоторой функции, равной так называемому скалярному потенциалу с обратным знаком –φ:

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}=-\operatorname{grad}\varphi-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \tag{2.1.6}$$

Таким образом, электрическое и магнитное поля выражаются через векторный и скалярный потенциалы, которые удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} &-\Delta\varphi-\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\mathbf{A}=\frac{\rho}{\varepsilon_0},\\ &-c^2\Delta\mathbf{A}+c^2\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A}+\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{grad}\varphi+\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}=\frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0}. \end{aligned} \tag{2.1.7}$$

Векторный и скалярный потенциалы определены неоднозначно. Если выполнить следующее преобразование:

$$\begin{aligned} &\mathbf{A}'=\mathbf{A}+\operatorname{grad} f,\\ &\varphi'=\varphi-\frac{\partial f}{\partial t}, \end{aligned} \tag{2.1.8}$$

то электрическое и магнитное поля не изменятся. Этот произвол в выборе потенциалов называется калибровочной инвариантностью. Выберем потенциалы так, чтобы выполнялось следующее равенство:

$$\operatorname{div}\mathbf{A}=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}. \tag{2.1.9}$$

Такой выбор называется калибровкой Лоренца. В этом случае уравнения (2.1.7) разделяются:

$$\begin{aligned} &\Delta\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0},\\ &\Delta\mathbf{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}=-\frac{\mathbf{j}}{c^2\varepsilon_0}. \end{aligned} \tag{2.1.10}$$

Эти уравнения должны быть дополнены законом сохранения заряда (2.1.3), который уже не является их следствием.

Скаляр φ и три компоненты вектора **A** описываются четырьмя независимыми скалярными волновыми уравнениями с источниками. Общее решение этих уравнений для известного распределения зарядов и токов несложно получить [1, 2, 3]:

$$\varphi(\mathbf{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho\left(\mathbf{r}',t-\dfrac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d^3\mathbf{r}',$$
$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\int\frac{\mathbf{j}\left(\mathbf{r}',t-\dfrac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d^3\mathbf{r}'. \qquad (2.1.11)$$

По формулам (2.1.4) и (2.1.6) можно найти электрическое и магнитное поля.

Скалярный и векторный потенциал составляют 4-вектор ($\varphi = A^0$, **A**). Плотность заряда и тока также образуют 4-вектор ($c^2\rho = j^0$, **j**) [1, 2]. Условие калибровки Лоренца имеет Лоренц-инвариантную форму $\nabla_\mu A^\mu = 0$. Таким образом, уравнения (2.1.10) инвариантны относительно преобразований Лоренца.

Для компонент электрического и магнитного поля в вакууме, пользуясь перестановочностью операторов $\Delta$, grad и $\dfrac{\partial}{\partial t}$, из (2.1.10) получим волновые уравнения:

$$\Delta\boldsymbol{\mathcal{E}}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial t^2}=0,$$
$$\Delta\boldsymbol{\mathcal{B}}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{\mathcal{B}}}{\partial t^2}=0. \qquad (2.1.12)$$

Эти уравнения по форме также являются скалярными волновыми уравнениями, независимыми для каждой компоненты поля.

Пользуясь формулами (2.1.11), найдем поле, излучаемое движущимся точечным зарядом. Пусть заряд $q$ движется по траектории $\mathbf{r}_0(t)$. Тогда плотность заряда как функция пространственных координат и времени будет равна

$$\rho(\mathbf{r},t)=q\delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t)\right). \qquad (2.1.13)$$

Запишем скалярный потенциал:

$$\varphi(\mathbf{r},t)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\delta\left(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0\left(t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)\right)=$$
$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{d\tau d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\delta\left(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0(\tau)\right)\delta\left(\tau-t+\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right). \qquad (2.1.14)$$

Интегрируя по пространственным координатам, получаем выражение

$$\varphi(\mathbf{r},t)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{d\tau}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(\tau)|}\delta\left(\tau-t+\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(\tau)|}{c}\right). \qquad (2.1.15)$$

Воспользуемся формулой нелинейной замены координат в $\delta$-функции:

$$\delta\left(F(\tau)\right)=\frac{1}{|F'(t')|}\delta(\tau-t'), \qquad (2.1.16)$$

где $t'$ – корень уравнения $F(t') = 0$. В данном случае $t'$ – время излучения зарядом волны, наблюдаемой в момент времени $t$, т.е. корень уравнения

$$t' = t - \frac{\left|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\left(t'\right)\right|}{c}. \tag{2.1.17}$$

Выполнив интегрирование, получим следующую формулу:

$$\varphi\left(\mathbf{r}, t\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\left(R - \dfrac{\mathbf{vR}}{c}\right)}. \tag{2.1.18}$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t')$. Аналогично получается и выражение для векторного потенциала:

$$\mathbf{A}\left(\mathbf{r}, t\right) = \frac{q\mathbf{v}}{4\pi\varepsilon_0 c^2\left(R - \dfrac{\mathbf{vR}}{c}\right)}. \tag{2.1.19}$$

Полученные потенциалы поля называются потенциалами Лиенара–Вихерта. Воспользовавшись ими и формулами (2.1.6) и (2.1.4), после громоздкой выкладки можно получить общее решение для электрического и магнитного поля произвольно движущегося заряда [1, 2]. Мы ограничимся максимально упрощенным выводом выражений для поля в дальней зоне для заряда, совершающего малые колебания со скоростью $v \ll c$. В полученном выражении возникнут кулоновские члены, убывающие как $R^{-2}$, и радиационные члены, пропорциональные ускорению заряда и убывающие как $R^{-1}$. Нас интересует радиационная компонента поля. Запишем приближенно скалярный потенциал:

$$\varphi\left(\mathbf{r}, t\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(1 + \frac{\mathbf{vR}}{cR}\right). \tag{2.1.20}$$

Здесь нельзя пренебречь членом порядка $v / c$, поскольку именно он дает член, содержащий ускорение. Вычислим компоненту grad φ, пропорциональную ускорению заряда:

$$\operatorname{grad}\varphi = \ldots + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\dot{\mathbf{v}}\mathbf{R}}{cR^2}\operatorname{grad}t', \tag{2.1.21}$$

где многоточие обозначает пропущенные члены, не содержащие ускорения. Мы учли, что $t'$ как решение уравнения (2.1.17) является функцией $t'(\mathbf{r}, t)$. Поскольку $R(t') = c(t - t')$, запишем

$$\operatorname{grad}t' = -\frac{1}{c}\operatorname{grad}R\left(t'\right) = -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial R}{\partial t'}\operatorname{grad}t' + \frac{\mathbf{R}}{R}\right). \tag{2.1.22}$$

Пренебрегая здесь членом порядка $v / c$, получим

$$\operatorname{grad}t' = -\frac{\mathbf{R}}{cR}. \tag{2.1.23}$$

Вычислим $\dfrac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$. Для этого заметим, что в силу соотношения $R(t') = c(t - t')$

$$\frac{\partial R}{\partial t}=\frac{\partial R}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t}=-\frac{\mathbf{vR}}{R}\frac{\partial t'}{\partial t}=c\left(1-\frac{\partial t'}{\partial t}\right), \tag{2.1.24}$$

откуда следует, что $\dfrac{\partial t'}{\partial t}=1$ с точностью до членов порядка $v$ / $c$. Поэтому, пользуясь выражением (2.1.19) и пренебрегая членами порядка $v$ / $c$, получаем

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}\left(\mathbf{r},t\right)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{\left(\dot{\mathbf{v}}\mathbf{R}\right)\mathbf{R}-\dot{\mathbf{v}}R^2}{R^3}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{\left[\mathbf{R},\left[\mathbf{R},\dot{\mathbf{v}}\right]\right]}{R^3}. \tag{2.1.25}$$

Перепишем эту формулу для диполя, состоящего из зарядов $+q$ и $-q$, разнесенных на расстояние $\delta\mathbf{r}$ (вектор $\delta\mathbf{r}$ направлен от отрицательного заряда к положительному). Дипольный момент $\mathbf{p}$ равен $q\delta\mathbf{r}$. Заряды колеблются, вообще говоря, с различными скоростями. Радиационное поле диполя будет равно

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}\left(\mathbf{r},t\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{\left[\mathbf{R},\left[\mathbf{R},\ddot{\mathbf{p}}\right]\right]}{R^3}, \tag{2.1.26}$$

Вычислим аналогично магнитное поле:

$$\boldsymbol{\mathcal{B}}\left(\mathbf{r},t\right)=\operatorname{rot}\mathbf{A}=\frac{q\operatorname{rot}\mathbf{v}\left(t'\left(\mathbf{r},t\right)\right)}{4\pi\varepsilon_0 c^2 R}=\frac{q\left[\operatorname{grad}t',\dot{\mathbf{v}}\right]}{4\pi\varepsilon_0 c^2 R}=-\frac{q\left[\mathbf{R},\dot{\mathbf{v}}\right]}{4\pi\varepsilon_0 c^3 R^2}=\frac{\left[\mathbf{R},\boldsymbol{\mathcal{E}}\right]}{cR}. \tag{2.1.27}$$

Вычислим вектор потока энергии поля (вектор Умова–Пойнтинга):

$$\mathbf{S}=\varepsilon_0 c^2\left[\boldsymbol{\mathcal{E}},\boldsymbol{\mathcal{B}}\right]=c\,\varepsilon_0\boldsymbol{\mathcal{E}}^2\frac{\mathbf{R}}{R}=\frac{q^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3}\frac{\mathbf{R}\dot{v}^2\sin^2\theta}{R^3}, \tag{2.1.28}$$

где $\theta$ – угол между направлением движения заряда и направлением на точку наблюдения. Таким образом, за излучение электромагнитных волн отвечает компонента ускорения заряда, перпендикулярная направлению распространения волны. Величина $\varepsilon_0\boldsymbol{\mathcal{E}}^2$ здесь является плотностью энергии поля, переносимой со скоростью $c$ в направлении $\mathbf{R}$ / $R$. Запишем аналогичную формулу для излучающего диполя:

$$\mathbf{S}=\frac{1}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3}\frac{\mathbf{R}\ddot{p}^2\sin^2\theta}{R^3}. \tag{2.1.29}$$

Если источники волн являются монохроматическими стационарными осцилляторами с круговой частотой $\omega$, то оператор $\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}$ сводится к умножению на $-\omega^2$, а все временные зависимости полей описываются множителем $\exp(-i\omega t)$. Векторные поля можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mathcal{E}}\left(\mathbf{r},t\right)&=\mathbf{E}\left(\mathbf{r}\right)\exp\left(-i\omega t\right);\\ \boldsymbol{\mathcal{B}}\left(\mathbf{r},t\right)&=\mathbf{B}\left(\mathbf{r}\right)\exp\left(-i\omega t\right),\end{aligned} \tag{2.1.30}$$

где $\mathbf{E}$ $(\mathbf{r})$ и $\mathbf{B}$ $(\mathbf{r})$ называются векторными комплексными амплитудами поля. Уравнения для поля удобно переписать для комплексных амплитуд, изба-

вившись от временной зависимости. В дальнейшем мы будем пользоваться курсивом для осциллирующих векторов поля и прямым шрифтом для комплексных амплитуд.

Компоненты комплексных амплитуд электрического и магнитного поля в вакууме описываются скалярным уравнением Гельмгольца:

$$\Delta u + k^2 u = 0, \tag{2.1.31}$$

где $k = \dfrac{\omega}{c} = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ – волновое число, $\lambda$ – длина волны. Этим уравнением мы будем постоянно пользоваться в дальнейшем.

### Литература


1. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. 6. Электродинамика. Эдиториал УРСС.
2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика: Учеб. пособ.: Для вузов. В 10 т. Т. II. Теория поля. 8-е изд., стереот. М.: Физматлит, 2003. 536 с.
3. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.


## 2.2. Рефракционные и рассеивающие свойства материальных сред

### Определение показателя преломления. Закон Снеллиуса

Рефракционные свойства изотропной среды характеризуются показателем преломления $n$. Показатель преломления равен отношению фазовой скорости электромагнитной волны в вакууме к ее фазовой скорости в среде. Для вакуума $n = 1$. Для среды удобно ввести индекс рефракции $N = n - 1$. Плоская волна в однородной среде имеет следующий вид:

$$u(\mathbf{r}) = u_0 \exp(in\mathbf{kr}), \tag{2.2.1}$$

где $\mathbf{k}$ – волновой вектор, $|\mathbf{k}| = k = \dfrac{\omega}{c}$, задающий направление распространения волны, $u_0$ – (постоянная) амплитуда волны. В литературе часто также называют волновым вектором величину $n\mathbf{k}$. Мы, однако, предпочитаем данное выше определение, поскольку $(\omega, \mathbf{k})$ образуют 4-вектор.

При переходе волны через плоскую границу двух сред с показателями преломления $n_1$ и $n_2$ происходит изменение ее направления распространения, т.е. рефракция или преломление. Закон преломления устанавливается из условия непрерывности волнового поля на границе сред. Выберем систему координат так, чтобы в первой среде волновой вектор падающей волны равнялся

$$\mathbf{k}^{(1)} = (k\cos\theta_1, k\sin\theta_1, 0), \tag{2.2.2}$$

где ось $x$ перпендикулярна границе, оси $y$ и $z$ параллельны, $\theta_1$ – угол падения волны на границу сред, отсчитываемый от нормали к поверхности. Волновой вектор преломленной волны равен

$$\mathbf{k}^{(2)} = \left(k\cos\theta_2, k\sin\theta_2, 0\right). \tag{2.2.3}$$

Запишем условие непрерывности поля при $x = 0$ и произвольном $y$:

$$\exp\left(in_1 k\sin\theta_1 y\right) = \exp\left(in_2 k\sin\theta_2 y\right), \tag{2.2.4}$$

откуда следует закон Снеллиуса:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}. \tag{2.2.5}$$

При наличии в среде поглощения показатель преломления является комплексной величиной $n = n' - in''$, тогда действительная амплитуда волны равна $u_0 \exp(-n''\mathbf{kr})$, а величина $n''k$ является коэффициентом затухания поля, измеряемым в Нп/м. Через Нп обозначается непер – несистемная безразмерная единица измерения отношения двух величин, равная натуральному логарифму отношения. Поскольку плотность энергии пропорциональна квадрату поля, удвоенная величина $2n''k$ является коэффициентом поглощения энергии.

**Физическая оптика. Модель Лоренца**

Изменение фазовой скорости света в среде является кажущимся эффектом. Среда состоит из молекул, которые, в свою очередь, состоят из заряженных частиц. Заряженные частицы, связанные атомными и кулоновскими силами, можно приближенно считать линейными гармоническими осцилляторами. Падающая электромагнитная волна возбуждает эти осцилляторы, и они начинают излучать вторичные электромагнитные волны. Вторичные волны интерферируют с падающей волной и вносят фазовую добавку, линейно меняющуюся вдоль направления распространения [1, 3]. Эта фазовая добавка и создает эффект изменения фазовой скорости, хотя на самом деле волна в среде является суперпозицией падающей (первичной) и вторичных волн, которые распространяются с вакуумной скоростью $c$. Такая модель среды называется моделью Лоренца [3].

Рассмотрим первичную плоскую волну, распространяющуюся в среде в направлении оси $z$:

$$\mathcal{E}_s = \mathcal{E}_0 \exp\left(ikz - i\omega t\right), \tag{2.2.6}$$

Основной вклад в показатель преломления вносят электроны, т.к. они являются наиболее легкими частицами и имеют максимальную амплитуду колебаний под действием внешнего поля. Пусть падающая волна поляризована в направлении $x$. Каждый электрон будет двигаться под действием силы $e\mathcal{E}_S$ согласно 2-му закону Ньютона:

$$m_e\left(\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x\right) = e\mathcal{E}_s, \tag{2.2.7}$$

где $e$ – заряд электрона, $m_e$ – его масса, $\omega_0$ – собственная частота колебаний, а $x$ – его смещение. Подставляя $x = x_0 \exp(ikz - i\omega t)$, получаем

$$m_e x_0\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) = e\mathcal{E}_0, \tag{2.2.8}$$

откуда находим амплитуду колебаний электрона:

$$x_0 = \frac{e\mathcal{E}_0}{m_e\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}. \qquad (2.2.9)$$

Воспользуемся выражением для поля движущегося заряда (2.1.25) и вычислим поле колеблющегося электрона:

$$\mathcal{E} = -\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\frac{e\mathcal{E}_0\omega^2}{m_e\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}\exp\left(ikz - i\omega t\right). \qquad (2.2.10)$$

Рассмотрим тонкий слой среды толщиной $\Delta z$ с поверхностной плотностью зарядов $\eta$ (количество электронов на единицу площади слоя). Суммарное поле всех зарядов будет равно

$$\int_0^\infty \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\frac{z}{r}\frac{e\mathcal{E}_0\omega^2}{m_e\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}\exp\left(ikr - i\omega t\right)\eta\, 2\pi\rho\, d\rho, \qquad (2.2.11)$$

где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ – радиальная координата в плоском слое, $r^2 = z^2 + \rho^2$, $2rdr = 2\rho d\rho$. Множитель $z / r$, равный косинусу угла между направлением колебаний электрона и нормалью к направлению на точку наблюдения, учитывает то, что вклад в электрическое поле дает лишь нормальная компонента ускорения заряда. Преобразуем интеграл следующим образом:

$$\frac{\eta e^2\mathcal{E}_0\omega^2\exp\left(i\omega t\right)}{2\varepsilon_0 c^2 m_e\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}\int_z^\infty \frac{z}{r}\exp\left(ikr\right)dr. \qquad (2.2.12)$$

Хотя такой интеграл не вычисляется аналитически, его значение легко оценить. Частичные суммы такого интеграла в комплексной плоскости образуют спираль за счет того, что амплитуда подынтегрального выражения убывает. Если рассмотреть этот интеграл без множителя $z / r$, то его частичные суммы будут лежать на окружности с радиусом $1 / k$ (такой интеграл не сходится). Положение центра этой окружности и будет достаточно точной оценкой положения центра спирали. Поэтому для вычисления интеграла (2.2.12) можно вместо множителя $z / r$ ввести сколь угодно слабое затухание в множителе $\exp(ikr)$, что приводит к следующему выражению для поля:

$$\mathcal{E}\left(z,t\right) = \frac{i\eta e^2\mathcal{E}_0\omega^2}{k2\varepsilon_0 c^2 m_e\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}\exp\left(ikz - i\omega t\right) = \frac{i\eta e^2\mathcal{E}_0\omega}{2\varepsilon_0 c m_e\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}\exp\left(ikz - i\omega t\right). \qquad (2.2.13)$$

Поскольку источники не зависят от поперечных координат $x$, $y$, поле за слоем удовлетворяет 1-мерному волновому уравнению:

$$\frac{\partial^2\mathcal{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathcal{E}}{\partial t^2} = 0. \qquad (2.2.14)$$

Его единственным решением, осциллирующим, как $\exp(-i\omega t)$, и запаздывающим по отношению источнику является $\mathcal{E}_1\exp(ikz - i\omega t)$.

С другой стороны, поле волны, прошедшей через тонкий слой среды с показателем преломления $n$, должно быть равно

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_0 \exp\left(ikn\Delta z - i\omega t\right) &= \mathcal{E}_0 \exp\left(ik\Delta z - i\omega t\right)\exp\left(ik\left(n-1\right)\Delta z\right) = \\ &= \mathcal{E}_0 \exp\left(ik\Delta z - i\omega t\right)\left(1 + ik\left(n-1\right)\Delta z\right),\end{aligned} \tag{2.2.15}$$

где $\Delta z$ – толщина слоя. Таким образом, добавочное поле зарядов слоя, дающее сдвиг фазы, равно

$$ik\mathcal{E}_0 \exp\left(ik\Delta z - i\omega t\right)\left(n-1\right)\Delta z. \tag{2.2.16}$$

Сравнивая это выражение с (2.2.13), получаем

$$\left(n-1\right)\Delta z = \frac{\eta e^2}{2\varepsilon_0 m_e\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}. \tag{2.2.17}$$

Поскольку $\eta = N_e\Delta z$, где $N_e$ – объемная концентрация электронов, окончательно получаем формулу для показателя преломления:

$$n = 1 + \frac{N_e e^2}{2\varepsilon_0 m_e\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}. \tag{2.2.18}$$

В общем случае нужно рассмотреть сумму по разным собственным частотам $\omega_j$ и учесть поглощение $\gamma_j$ в уравнении колебаний осциллятора:

$$m_e\left(\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma_j\frac{dx}{dt} + \omega_j^2 x\right) = eE_s, \tag{2.2.19}$$

тогда формула (2.2.18) принимает следующий вид:

$$n = 1 + \sum_j \frac{f_j N_e e^2}{2\varepsilon_0 m_e\left(\omega_j^2 - \omega^2 + i\omega\gamma_j\right)}, \tag{2.2.20}$$

где $f_j$ – веса разных резонансных частот.

Затухание $\gamma_j$ играет наибольшую роль, когда частота $\omega$ лежит вблизи резонансной частоты $\omega_j$. При $\omega = \omega_j$ вклад данной частоты в показатель преломления становится чисто мнимым. Поэтому такие частоты называются линиями поглощения. Зависимость показателя преломления от частоты называется дисперсией. Если частота $\omega$ лежит ниже всех (или наиболее сильных) линий поглощения, то $dn / d\omega > 0$, что называется нормальной дисперсией. Если $\omega > \omega_j$, то $dn / d\omega$ может оказаться отрицательным (если вклад данной линии в показатель преломления достаточно велик). Такая дисперсия называется аномальной.

Формула (2.2.20) получена в приближении разреженного газа, поскольку при ее выводе мы считали, что на электроны действует только поле падающей волны. Для вывода более точной формулы следует учесть, что на электроны действует поле, измененное средой.

Внешнее электрическое поле смещает заряды диэлектрической среды, и они создают вторичное поле, стремящееся скомпенсировать внешнее поле. Единица объема среды приобретает при этом дипольный момент

$$\mathbf{P} = N_e e\boldsymbol{\delta}, \tag{2.2.21}$$

где **δ** – смещение положительных зарядов относительно отрицательных. Если рассмотреть прямоугольную пластинку из диэлектрика, помещенную в однородное внешнее поле, то на ее сторонах, перпендикулярных полю, возникнет поляризационный поверхностный заряд

$$\sigma_{\text{пол}} = N_e e\delta = P. \tag{2.2.22}$$

Если внешнее поле создается свободным зарядом с поверхностной плотностью $\sigma$, то поле внутри диэлектрика будет равно

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \frac{\sigma - \sigma_{\text{пол}}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma - P}{\varepsilon_0}. \tag{2.2.23}$$

Будем считать, что вектор поляризации связан с электрическим полем линейно:

$$\mathbf{P} = \chi\varepsilon_0\boldsymbol{\mathcal{E}}, \tag{2.2.24}$$

где $\chi$ называется восприимчивостью. Электрическое поле внутри диэлектрика будет равно

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} - \chi\boldsymbol{\mathcal{E}}, \tag{2.2.25}$$

откуда получаем

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{1}{1+\chi}. \tag{2.2.26}$$

Таким образом, поле в диэлектрике убывает в $1+\chi$ раз по сравнению с полем, которое та же система зарядов создала бы в вакууме. Это отношение обозначается $\varepsilon$ и называется относительной диэлектрической проницаемостью среды. Величина $\varepsilon\varepsilon_0$ называется диэлектрической проницаемостью среды. Связь $\varepsilon = 1+\chi$ является приближенной для случая малой оптической плотности среды. При падении волны на среду часть энергии падающей волны переходит в энергию колеблющихся осцилляторов среды.

Формула (2.2.9) описывает вклад одного электрона в поляризуемость атома. Для восприимчивости среды, аналогично (2.2.20), запишем следующую формулу:

$$\chi = \sum_j \frac{f_j N_e e^2}{\varepsilon_0 m_e\left(\omega_j^2 - \omega^2 + i\omega\gamma_j\right)}, \tag{2.2.27}$$

откуда с учетом (2.2.41) (см. ниже) получаем более точную формулу для $n$:

$$n = \sqrt{1+\chi} = \left(1 + \sum_j \frac{f_j N_e e^2}{\varepsilon_0 m_e\left(\omega_j^2 - \omega^2 + i\omega\gamma_j\right)}\right)^{1/2}, \tag{2.2.28}$$

что приближенно равно (2.2.20) в случае малых $\chi$.

**Уравнения Максвелла в среде**

Поскольку вектор поляризации описывает смещения зарядов, на элементе границы произвольного объема диэлектрика возникнет поверхностная плотность заряда:

$$\sigma_{\text{пол}} = \mathbf{P}\mathbf{n}, \qquad (2.2.29)$$

где $\mathbf{n}$ – вектор нормали к поверхности объема. Интеграл от $\sigma_{\text{пол}}$ по всей поверхности объема равен полному заряду, перенесенному электрическим полем через данную поверхность, т.е. изменению заряда внутри данного объема. В силу произвольности выбора объема плотность поляризационного заряда в любой точке равна

$$\rho_{\text{пол}} = -\operatorname{div} \mathbf{P}. \qquad (2.2.30)$$

Это позволяет записать первое уравнение Максвелла для диэлектриков. Полная плотность заряда складывается из плотностей свободных $\rho$ и поляризационных зарядов $\rho_{\text{пол}}$. Пользуясь этим, запишем уравнение для электрического поля:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\mathcal{E}} = \frac{\rho + \rho_{\text{пол}}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho - \operatorname{div} \mathbf{P}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} - \operatorname{div} \chi \boldsymbol{\mathcal{E}}. \qquad (2.2.31)$$

Отсюда получаем

$$\operatorname{div} \varepsilon \boldsymbol{\mathcal{E}} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \qquad (2.2.32)$$

Если на среду действует меняющееся во времени внешнее поле, то поляризация среды будет меняться, и значит, в среде будут течь поляризационные токи $\mathbf{j}_{\text{пол}}$. Для поляризационного заряда имеет место закон сохранения:

$$\frac{\partial \rho_{\text{пол}}}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_{\text{пол}} = 0. \qquad (2.2.33)$$

Сравнивая это соотношение с (2.2.30), видим, что

$$\mathbf{j}_{\text{пол}} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}. \qquad (2.2.34)$$

Поэтому 4-е уравнение Максвелла для $\operatorname{rot} \boldsymbol{\mathcal{B}}$ в среде должно быть записано в следующей форме:

$$c^2 \operatorname{rot} \boldsymbol{\mathcal{B}} = \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial t} + \frac{\mathbf{j}_{\text{пол}}}{\varepsilon_0} + \frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0} = \frac{\partial}{\partial t}\left( \boldsymbol{\mathcal{E}} + \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0} \right) + \frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0} = \frac{\partial \varepsilon \boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial t} + \frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0}. \qquad (2.2.35)$$

Запишем уравнения Максвелла для электрически нейтральной диэлектрической среды:

$$\begin{aligned} &\operatorname{div} \varepsilon \boldsymbol{\mathcal{E}} = 0, \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{B}}}{\partial t}, \\ &\operatorname{div} \boldsymbol{\mathcal{B}} = 0, \quad c^2 \operatorname{rot} \boldsymbol{\mathcal{B}} = \frac{\partial \varepsilon \boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial t}. \end{aligned} \qquad (2.2.36)$$

В литературе часто вводится вектор электрической индукции $\boldsymbol{\mathcal{D}}$, магнитная постоянная (магнитная проницаемость вакуума) $\mu_0 = 1/c^2\varepsilon_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ Гн/м, относительная магнитная проницаемость среды $\mu$ и напряженность магнитного поля $\boldsymbol{\mathcal{H}}$. Вектор электрической индукции в среде описывает суммарное влияние меняющегося электрического поля, тока проводимости и поляризационного тока на вихревое магнитное поле. Свойства среды описываются материальными уравнениями:

$$\mathcal{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \mathcal{E},$$
$$\mathcal{B} = \mu\mu_0 \mathcal{H}. \tag{2.2.37}$$

Мы не будем ими пользоваться, поскольку для описания поля достаточно величин $\mathcal{E}$ и $\mathcal{B}$. Эффекты, связанные с магнитной проницаемостью для интересующих нас сред малы, поэтому будем считать все среды немагнитными, полагая $\mu = 1$.

Из уравнений Максвелла в среде следует волновое уравнение для электрического поля:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathcal{E} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varepsilon\mathcal{E}}{\partial t^2}. \tag{2.2.38}$$

В однородной среде ε постоянно, и первое уравнение сводится к $\operatorname{div}\mathcal{E} = 0$, тогда

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathcal{E} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathcal{E} - \Delta\mathcal{E} = -\Delta\mathcal{E}. \tag{2.2.39}$$

В результате мы приходим к волновому уравнению

$$\Delta\mathcal{E} - \frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} = 0, \tag{2.2.40}$$

описывающему волны, распространяющиеся со скоростью $c/\sqrt{\varepsilon}$. Оно должно быть дополнено условием поперечности волн $\operatorname{div}\mathcal{E} = 0$. Поскольку скорость распространения волн в среде равна $c / n$, получаем соотношение между ε и $n$:

$$\varepsilon = n^2. \tag{2.2.41}$$

Получим выражение для энергии электромагнитного поля в среде. Рассмотрим выражение [4]:

$$c^2\varepsilon_0\left(\mathcal{E}\operatorname{rot}\mathcal{B} - \mathcal{B}\operatorname{rot}\mathcal{E}\right) = -c^2\varepsilon_0 \operatorname{div}\left[\mathcal{E},\mathcal{B}\right]. \tag{2.2.42}$$

В силу уравнений (2.2.35) и (2.2.36) оно равно

$$\mathcal{E}\left(\varepsilon_0\frac{\partial\varepsilon\mathcal{E}}{\partial t} + \mathbf{j}\right) + c^2\varepsilon_0\mathcal{B}\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_0\varepsilon\mathcal{E}^2 + \varepsilon_0 c^2\mathcal{B}^2}{2}\right) + \left(\mathcal{E},\mathbf{j}\right). \tag{2.2.43}$$

Отсюда следует уравнение, выражающее закон сохранения энергии для электромагнитного поля:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_0\varepsilon\mathcal{E}^2 + \varepsilon_0 c^2\mathcal{B}^2}{2}\right) + \left(\mathcal{E},\mathbf{j}\right) + c^2\varepsilon_0 \operatorname{div}\left[\mathcal{E},\mathcal{B}\right] = 0. \tag{2.2.44}$$

Первый член равен производной плотности энергии в точке, второй член равен плотности мощности, расходуемой на перемещение зарядов, третий, дивергентный член равен убыли плотности энергии за счет ее переноса. Плотность энергии электромагнитного поля можно записать в виде суммы электрической и магнитной энергии:

$$W = W_E + W_B = \frac{\varepsilon_0\varepsilon\mathcal{E}^2 + \varepsilon_0 c^2\mathcal{B}^2}{2}. \tag{2.2.45}$$

Производную электрической энергии можно также записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}W_E = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_0 \boldsymbol{\mathcal{E}}^2}{2} + \frac{\varepsilon_0 \chi \boldsymbol{\mathcal{E}}^2}{2}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_0 \boldsymbol{\mathcal{E}}^2}{2}\right) + \varepsilon_0 \left(\boldsymbol{\mathcal{E}}, \dot{\mathbf{P}}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_0 \boldsymbol{\mathcal{E}}^2}{2}\right) + \left(\boldsymbol{\mathcal{E}}, \mathbf{j}_{\text{пол}}\right), \quad (2.2.46)$$

представив ее в виде изменения энергии поля и плотности мощности, расходуемой на перемещение поляризационных зарядов среды.

Рассмотрим плоскую волну общего вида, распространяющуюся в направлении единичного вектора **s**:

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \boldsymbol{\mathcal{E}}\left(\left(\mathbf{r}, \mathbf{s}\right) - \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}t\right), \quad \boldsymbol{\mathcal{B}} = \boldsymbol{\mathcal{B}}\left(\left(\mathbf{r}, \mathbf{s}\right) - \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}t\right). \quad (2.2.47)$$

Подставляя эти выражения в уравнения (2.2.36), получим

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{\mathcal{E}} = \left[\mathbf{s}, \boldsymbol{\mathcal{E}}'\right] = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}\boldsymbol{\mathcal{B}}', \quad c^2 \operatorname{rot} \boldsymbol{\mathcal{B}} = c^2 \left[\mathbf{s}, \boldsymbol{\mathcal{B}}'\right] = c\sqrt{\varepsilon}\boldsymbol{\mathcal{E}}', \quad (2.2.48)$$

где штрих обозначает дифференцирование полей как одномерных функций переменной $\left(\mathbf{r}, \mathbf{s}\right) - \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}t$. Отсюда следует

$$\boldsymbol{\mathcal{B}} = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{c}\left[\mathbf{s}, \boldsymbol{\mathcal{E}}\right], \quad \boldsymbol{\mathcal{E}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}\left[\mathbf{s}, \boldsymbol{\mathcal{B}}\right]. \quad (2.2.49)$$

Таким образом, поля $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ и $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ перпендикулярны друг другу и направлению распространения (электромагнитное поле поперечно). Электрическая и магнитная энергии одинаковы:

$$W_E = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon \boldsymbol{\mathcal{E}}^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 c^2 \boldsymbol{\mathcal{B}}^2}{2} = W_B. \quad (2.2.50)$$

**Формула Лоренца–Лоренца**

В плотных средах (жидкостях, сжатых газах) каждый атом равномерно окружен другими атомами, и в среднем можно считать, что атом находится в сферической полости диэлектрика. Поле в такой полости называется действующим полем $\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\text{д}}$ и равняется среднему полю $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ внутри среды за вычетом поля равномерно поляризованного шара. Поле равномерно поляризованного шара равно суперпозиции полей положительно и отрицательного заряженных шаров с плотностями зарядов ±ρ, сдвинутых относительно друг друга на вектор **δ**. Как следует из первого уравнения Максвелла, поток поля через замкнутую поверхность равен $Q$ / $\varepsilon_0$, где $Q$ – заряд внутри этой поверхности. Внутри сферы с радиусом $r$ находится заряд $\frac{4\pi r^3}{3}\rho$, а площадь поверхности этой сферы равна $4\pi r^2$. Поле внутри шара с центром в точке $\mathbf{r}_0$ радиально и равно

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\text{шар}} = \frac{\rho\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\right)}{3\varepsilon_0}. \quad (2.2.51)$$

Сумма полей двух шаров с зарядами разного знака, сдвинутых друг относи-

тельно друга на вектор $\boldsymbol{\delta}$, равна

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\text{пол}} = -\frac{\rho\boldsymbol{\delta}}{3\varepsilon_0} = -\frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0}. \qquad (2.2.52)$$

Тогда формула (2.2.24) примет следующий вид:

$$\mathbf{P} = \chi\varepsilon_0\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\text{д}} = \chi\varepsilon_0\left(\boldsymbol{\mathcal{E}} + \frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0}\right), \qquad (2.2.53)$$

откуда получаем

$$\mathbf{P} = \frac{\chi}{1-\chi/3}\varepsilon_0\boldsymbol{\mathcal{E}}. \qquad (2.2.54)$$

Из этих соотношений следует формула Клаузиуса–Моссотти [2]:

$$\varepsilon = 1 + \frac{\chi}{1-\chi/3} = \frac{3+2\chi}{3-\chi} \qquad (2.2.55)$$

или формула Лоренца–Лоренца [3, 4]:

$$\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2} = \frac{n^2-1}{n^2+2} = \frac{\chi}{3}. \qquad (2.2.56)$$

Ее называют также формулой Лорентца–Лоренца, поскольку фамилии авторов этой формулы Lorentz и Lorenz, независимо и почти одновременно ее получивших, различаются в написании, хотя и произносятся совершенно одинаково. В [4] приводится математически строгий вывод формулы Лоренца–Лоренца на основе интегрального представления решений уравнений Максвелла в среде. Там же приводится доказательство теоремы Эвальда–Озеена о полном погашении, утверждающей, что вторичное поле в среде состоит из двух членов: поле, распространяющееся со скоростью $c$, полностью гасящее падающую волну, и поле, распространяющееся со скоростью $c / n$.

Связь (2.2.56) между показателем преломления $n$, относительной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon$ и восприимчивостью $\chi$ сохраняется и в том случае, когда эти величины являются комплексными, т.е. при наличии в среде потерь. Выше мы уже приводили выражение $2n''k$ для коэффициента поглощения на единицу длины трассы распространения волны. Получим теперь выражение для плотности мощности потерь энергии в среде с поглощением. Средняя плотность работы, совершаемой полем по перемещению зарядов среды в единицу времени, равна

$$W = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left\langle \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\text{д}}\rho\dot{\mathbf{r}}^* \right\rangle, \qquad (2.2.57)$$

где $\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\text{д}}$ – действующее поле внутри среды (сумма полей падающей волны и вторичного поля зарядов среды), для переменных величин принимается временная зависимость $\exp(-i\omega t)$, звездочка означает комплексное сопряжение, усреднение выполняется по периоду колебаний. Величина $\rho\dot{\mathbf{r}}$ равна временной производной от поляризации $\mathbf{P} = \chi\varepsilon_0\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\text{д}}$. Таким образом,

$$W = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\langle \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\text{д}}\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\text{д}}^{*}\left(-i\omega\chi\right)^{*}\varepsilon_0\right\rangle = \varepsilon_0\mathcal{E}_{\text{д}}^{2}\omega\,\mathrm{Im}\,\chi. \qquad (2.2.58)$$

**Показатель преломления газа из молекул с дипольным моментом**

До сих пор мы рассматривали механизм возникновения показателя преломления за счет поляризации атомов среды. Существует еще один механизм, связанный с наличием дипольного момента у некоторых молекул. Важнейшим таким компонентом атмосферы является водяной пар. Молекулы водяного пара движутся хаотически, и в отсутствие внешнего электрического поля их дипольные моменты ориентированы случайно. В поле $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ каждый дипольный момент $\mathbf{p}_w$ приобретает потенциальную энергию $U = -\mathbf{p}_w\boldsymbol{\mathcal{E}} = -p_w\mathcal{E}\cos\theta$, где θ – угол между направлением диполя и внешнего поля. Каждый диполь стремится минимизировать эту энергию, т.е. ориентироваться вдоль поля. Этому препятствует хаотическое тепловое движение, постоянно нарушающее ориентацию диполей. Плотность количества диполей с различными ориентациями описывается распределением Больцмана $\exp(-U/kT)$:

$$n_w(\theta) = n_0\exp\left(\frac{p_w\mathcal{E}\cos\theta}{kT}\right), \qquad (2.2.59)$$

где $k = 1.3806488\times10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана.

Дипольный момент молекул удобно выражать в несистемных единицах Дебая, равных $D = 3.33564095\times10^{-30}$ Кл·м, что равняется заряду электрона $e = 1.602176565\times10^{-19}$ Кл, умноженному на характерный размер атомов, составляющий 0,1 нм, и на коэффициент 0.20822678. Единица Дебая может быть также выражена как $(1/299792458)\times10^{-21}$ Кл·м, где знаменатель дроби численно равен скорости света в м/с. Выбор этой единицы обусловлен тем, что большинство полярных молекул имеет дипольный момент порядка 1$D$. Дипольный момент молекулы воды равен $p_w = 1.84D$. В электрическом поле напряженностью $\mathcal{E} = 1$ кВ/м потенциальная энергия диполя будет оцениваться величиной $U = p_w\mathcal{E} = 6.137579348\times10^{-27}$ Дж, тогда как энергия теплового движения при температуре $T = 300$ К будет равна $kT = 4.01419464\times10^{-21}$ Дж, т.е. $U \ll kT$. Это позволяет с хорошей точностью записать

$$n_w(\theta) = n_0\left(1+\frac{p_w\mathcal{E}\cos\theta}{kT}\right) = \frac{N_w}{4\pi}\left(1+\frac{p_w\mathcal{E}\cos\theta}{kT}\right), \qquad (2.2.60)$$

где нормировочная константа получена из условия, что при интегрировании $n_w(\theta)$ по всем телесным углам должна получиться полная плотность частиц $N_w$, а интеграл от $\cos\theta$ равен 0. Тогда компонента средней поляризации, направленная вдоль внешнего поля $\mathcal{E}$, будет равна

$$P = \int_0^{\pi} n_w(\theta)\,p_w\cos\theta\,2\pi\sin\theta d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi}\frac{N_w}{4\pi}\left(1+\frac{p_w\mathcal{E}\cos\theta}{kT}\right)p_w\cos\theta\,2\pi\sin\theta d\theta = \frac{N_w p_w^2\mathcal{E}}{3kT}. \qquad (2.2.61)$$

Таким образом, для водяного пара компонента восприимчивости, связанная с дипольным моментом молекул, равна

$$\chi = \frac{N_w p_w^2}{3kT\varepsilon_0}. \tag{2.2.62}$$

Общая восприимчивость водяного пара будет складываться из двух компонент: электронной (2.2.27) и дипольной (2.2.62). Обе эти компоненты пропорциональны плотности частиц среды, однако дипольная в дополнение к этому обратно пропорциональна температуре.

**Вращательные линии водяного пара**

Механизмы возникновения показателя преломления не исчерпываются приведенными выше. Полярные молекулы водяного пара обладают степенями свободы, связанными с колебаниями ядер атомов кислорода и водорода относительно их устойчивого положения в молекулах, и вращательными степени свободы [7, 8]. Для вычисления собственных частот молекулы воды используются методы квантовой механики. Для этого вводятся векторы $\mathbf{d}_i$, $i = 1, 2, 3$, описывающие отклонения ядер трех атомов, составляющих молекулу воды, от их положений равновесия $\mathbf{r}_i^{(0)}$, на которые накладываются дополнительные условия [9]:

$$\begin{aligned} &\sum_i m_i \mathbf{d}_i = 0, \\ &\sum_i m_i \left[ \mathbf{r}_i^{(0)}, \mathbf{d}_i \right] = 0, \end{aligned} \tag{2.2.63}$$

где $m_1 = m_3$ – масса атома водорода, $m_2$ – масса атома кислорода. Первое условие (условие центра масс) позволяет исключить поступательное движение молекулы. Второе условие (условие Эккарта) выделяет смещения ядер с нулевым общим вращательным моментом и тем позволяет исключить вращательное движение молекулы. Таким образом, из девяти координат, являющихся компонентами трех векторов $\mathbf{d}_i$, строятся три безразмерные нормальные координаты $q_i$, $i = 1, 2, 3$, описывающие только внутренние колебательные движения ядер, так чтобы в их представлении колебательный гамильтониан был диагонален. Кроме того, остаются три координаты, описывающие поступательное движение молекулы, и три угла Эйлера, описывающих вращение молекулы. Поступательное движение не рассматривается. В первом приближении общий гамильтониан представляется в виде суммы колебательной $H_0^{vib}$ и вращательной $H_0^{rot}$ части, которые считаются независимыми:

$$\begin{aligned} H_0^{vib} &= \frac{hc}{2} \sum_i \omega_i \left( p_i^2 + q_i^2 \right), \\ H_0^{rot} &= hc \sum_\alpha B_\alpha^0 J_\alpha^2, \end{aligned} \tag{2.2.64}$$

где $h = 6.62602957\times10^{-34}$ Дж·с – постоянная Планка, $p_i = -i\partial / \partial q_i$ – оператор импульса, $\omega_i$ – частоты нормальных колебаний, $B_\alpha^0 = \dfrac{h}{8\pi^2 c I_\alpha}$, α = 1, 2, 3 – обратные главные моменты инерции, $I_\alpha$ – главные моменты инерции, $J_\alpha$ – безразмерные операторы углового момента. Существуют и более точные приближения, учитывающие взаимодействия колебательных и вращательных движений молекулы, связанные с тем, что вращение молекулы как целого приводит к смещению равновесных положений атомов и, наоборот, колебательные движения меняют моменты инерции молекулы. Для нас наиболее важными являются чисто вращательные уровни энергии.

Уровни энергии гамильтониана $H_0^{rot}$ определяются алгебраическими методами [7, 8, 10], основанными на соотношениях коммутации между операторами $J_\alpha$. Особенно просто эти уровни определяются в случае, когда все три главных момента инерции равны $B_\alpha^0 = B^0$ (шаровой волчок). Уровни энергии тогда равны $hcB^0 J\,(J+1)$, где $J$ – квантовое число полного момента волчка, пробегающее неотрицательные целые числа. Очень просто уровни энергии определяются и в случае симметричного волчка, т.е. когда $B_1^0 = B_2^0 \neq B_3^0$. Гамильтониан в этом случае равен

$$H_0^{rot} = hc\left(B_1^0 \hat{\mathbf{J}}^2 + \left(B_3^0 - B_1^0\right)\hat{J}_3^2\right), \qquad (2.2.65)$$

и, поскольку $\hat{\mathbf{J}}^2$ коммутирует с $\hat{J}_3^2$ [8], уровни энергии равны $hc\left(B_1^0 J\left(J+1\right)+\left(B_3^0 - B_1^0\right)k^2\right)$, где квантовое число $k$ соответствует проекции момента на 3-ю координатную ось и пробегает значения от $-J$ до $J$. Состояния обозначаются $\left|J,k\right\rangle$. Вырождение уровней, имеющее место для шарового волчка, здесь частично снято, но остается для значений $k$, различающихся знаком.

Молекула воды является асимметричным волчком, поскольку три ее главных момента инерции являются разными. Величины $B_\alpha^0$ для молекулы воды равны 14.544, 9.324 и 27.452 см$^{-1}$. Волновые единицы см$^{-1}$ приняты в спектроскопии. Удобно поделить энергию на $hc$ и также измерять ее см$^{-1}$. В этом случае разности уровней энергии равны обратной длине волны соответствующего перехода.

Задача нахождения уровней энергии асимметричного волчка существенно сложнее, чем для шарового и симметричного волчка. Уровни энергии удается выразить как корни алгебраических (секулярных) уравнений [8, 10]. Вырождение уровней здесь снимается полностью: для каждого $J$ имеется $2(J + 1)$ различных уровней энергии.

Существует несколько связанных друг с другом наборов квантовых чисел, описывающих вращательные уровни:

1) $\left|J,\tau\right\rangle, -J \le \tau \le J$ [7, 10];

2) $\left|J,K\pm\right\rangle$, являющиеся линейными комбинациями волновых функций симметричного волчка $\left|J,K=k\right\rangle$ [7,8]:

$$\left|J,K\pm\right\rangle = \left|J,K,\gamma\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|J,K\right\rangle + \gamma\left|J,-K\right\rangle\right),\ K \neq 0,\ \gamma = \pm 1;$$
$$\left|J,K=0\right\rangle; \tag{2.2.66}$$

3) $\left|J,K_a,K_c\right\rangle$, где $0 \le K_a, K_c \le J$ и $K_a + K_c = J$ или $J+1$, [5,7]:

$$K_a = \left\{\frac{J+\tau+1}{2}\right\};\quad K_c = \left\{\frac{J+\tau+1}{2}\right\} - \tau;$$
$$K_a = K;\quad K_c = J - K + \frac{\gamma+1}{2} \tag{2.2.67}$$

где $\{...\}$ обозначает целую часть числа.

Величины $B_\alpha^0$, очевидно, входят в выражения для уровней энергии симметричным образом, поэтому можно не выписывать формулы, различающиеся их циклической перестановкой. Для $J = 1$ уровни энергии равны

$$E_{|101\rangle,|111\rangle,|110\rangle} = hc\left(B_\alpha^0 + B_\beta^0 + 0B_\gamma^0\right), \tag{2.2.68}$$

где использованы квантовые числа $\left|J,K_a,K_c\right\rangle$. Для $J = 2$

$$E_{|202\rangle,|211\rangle,|220\rangle} = hc\left(B_\alpha^0 + B_\beta^0 + 4B_\gamma^0\right),$$
$$E_{|212\rangle,|221\rangle} = hc\left(2\left(B_1^0 + B_2^0 + B_3^0\right) \pm 2\sqrt{\left(B_1^0 + B_2^0 + B_3^0\right)^2 - 3\left(B_1^0B_2^0 + B_2^0B_3^0 + B_3^0B_1^0\right)}\right). \tag{2.2.69}$$

Для больших $J$ формулы становятся все более громоздкими. Тем не менее уровни энергии можно рассчитать для любых $J$.

Хотя первые измерения инфракрасных спектров производили впечатление хаотического нагромождения линий, дальнейшие теоретические расчеты частот переходов показали хорошее согласие с экспериментом [10, 11, 12]. Для нас наиболее важной линией будет 22 ГГц (0.74 см$^{-1}$), образующаяся при переходах между уровнями $\left|J,K_a,K_c\right\rangle = \left|5,2,3\right\rangle$ и $\left|6,1,6\right\rangle$ [13, 14, 15].

**Соотношения Крамерса–Кронига**

Восприимчивость $\chi(\omega)$ является функцией отклика среды на внешнее электрическое поле. Пусть задано внешнее поле как функция времени $\mathcal{E}(t)$. Для временной зависимости поляризации среды $P(t)$ запишем следующее соотношение:

$$P(t) = \int \tilde{\mathcal{E}}(\omega)\chi(\omega)\exp(-i\omega t)\,d\omega, \tag{2.2.70}$$

где $\tilde{\mathcal{E}}(\omega)$ – Фурье-образ поля $\mathcal{E}(t)$:

$$\tilde{\mathcal{E}}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int \mathcal{E}(t)\exp(i\omega t)\,dt. \tag{2.2.71}$$

В силу принципа причинности $\chi(\omega)$ может быть только таким, что на значения $P(t)$ в заданный момент времени $t$ влияют только значения $\mathcal{E}(t')$ при $t' \le t$. Считая $\chi(\omega)$ Фурье-образом функции $\tilde{\chi}(t)$, перепишем интеграл (2.2.70) в виде свертки:

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{1}{4\pi^2}\int \mathcal{E}(t')\tilde{\chi}(t'')\exp\left(i\omega(t'+t''-t)\right)dt'dt''d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int \mathcal{E}(t')\tilde{\chi}(t'')\delta(t'+t''-t)\,dt'dt'' = \frac{1}{2\pi}\int \mathcal{E}(t')\tilde{\chi}(t-t')\,dt'. \end{aligned} \tag{2.2.72}$$

В силу причинности $\tilde{\chi}(t) = 0$ при $t < 0$, поэтому

$$\chi(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \tilde{\chi}(t)\exp(i\omega t)\,dt. \tag{2.2.73}$$

Рассмотрим ее как функцию $\chi(z)$ комплексной переменной $z = x + iy$. При $y > 0$ эта функция является обратным Фурье-образом функции, убывающей как $\exp(-yt)$, поэтому она аналитическая в верхней полуплоскости. Представим ее в виде суммы действительной и мнимой частей $\chi'(z) + i\chi''(z)$. Вычислим следующий интеграл по контуру, изображенному на рис. 1:

$$\oint \frac{\chi(z)}{z-\omega}dz = \int_{-R}^{\omega-r}\frac{\chi(x)}{x-\omega}dx + \int_{\omega+r}^{R}\frac{\chi(x)}{x-\omega}dx + \int_{CR}\frac{\chi(z)}{z-\omega}dz + \int_{cr}\frac{\chi(z)}{z-\omega}dz = 0. \tag{2.2.74}$$

Интеграл равен нулю, поскольку подынтегральная функция не имеет полюсов внутри контура. Поскольку интеграл по большому полукругу CR стремится к 0 при увеличении радиуса $R$, запишем

$$0 = \text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\chi(x)}{x-\omega}dx + \lim_{r\to 0}\int_{\pi}^{0}\frac{\chi\left(\omega + re^{i\phi}\right)}{re^{i\phi}}re^{i\phi}id\phi, \tag{2.2.75}$$

откуда следует

$$\chi(\omega) = \frac{1}{i\pi}\,\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\chi(x)}{x-\omega}dx, \tag{2.2.76}$$

где буквы v.p. означают, что интеграл понимается в смысле главного значения. Отсюда следуют соотношения Крамерса–Кронига между действительной и мнимой частями восприимчивости:

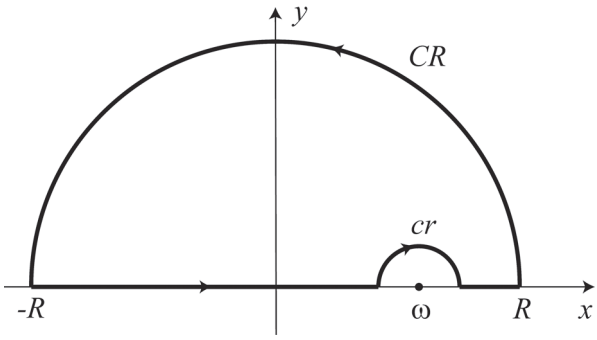



**Рис. 1.** Контур интегрирования в формуле (2.2.74)

$$\chi'(\omega) = \frac{1}{\pi}\,\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\chi''(x)}{x-\omega}\,dx,$$
$$\chi''(\omega) = -\frac{1}{\pi}\,\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\chi'(x)}{x-\omega}\,dx. \qquad (2.2.77)$$

**Молекулярное рассеяние**

Излучение вторичных излучателей среды происходит как вперед по направлению падающей волны, так и назад. Покажем, что вторичные волны, излучаемые назад, взаимно погашаются. Рассмотрим для простоты среду с малой оптической плотностью. Если комплексная амплитуда плоской падающей волны имеет вид $E_0 \exp(ikz)$, то слой осцилляторов с координатой $z'$ излучает вторичную волну $E_1 \exp(ikz' + ik(z - z'))$. Это выражение не зависит от положения вторичного излучателя, поэтому волны, рассеянные вперед, складываются в фазе. Поле волны, рассеянной назад, имеет форму $E_1 \exp(ikz' - ik(z - z'))$. Полное поле, рассеянное назад, равное интегралу от этого поля по всем $z'$, будет очень мало.

Рассеяние, когда имеются фиксированные фазовые соотношения между падающей и рассеянной волной, называется когерентным. В частности, рассеяние на детерминированном стационарном объекте будет всегда когерентным. Когерентное рассеяние возникает в модели среды, состоящей из неподвижных осцилляторов, излучающих вторичные волны.

В противоположность когерентному рассеянию вводится понятие некогерентного рассеяния. Это понятие связано с элементом случайности. Фазы волн от вторичных излучателей могут быть случайными процессами как функции времени. В этом случае мы рассматриваем статистические свойства поля, усредненного по некоторому временному масштабу. В задачах рассеяния на случайных шероховатых поверхностях в каждой реализации объект стационарен, но нас интересуют статистические свойства поля, усредненные по различным реализациям. Можно также рассматривать усреднение по определенным пространственным масштабам. Понятие некогерентности зави-

сит как от статистических свойств фаз вторичных излучателей, их временных или пространственных характерных расстояний корреляции, так и от заданных масштабов временного и/или пространственного усреднения.

Поскольку в газовой среде вторичные излучатели совершают хаотическое тепловое движение, они случайным образом меняют фазу рассеянного излучения. Рассмотрим простую модель этого явления, в которой положение вторичного излучателя $z'$ – случайная величина, дисперсия которой существенно больше длины волны. При рассеянии вперед даже в этом случае волны складываются когерентно, а рассеяние назад будет некогерентным, поскольку фазы волн от вторичных излучателей являются независимыми случайными величинами, приблизительно равномерно распределенными в интервале $[0,2\pi]$. В этом случае складываются не комплексные амплитуды полей разных излучателей, а их интенсивности. Рассеяние является некогерентным, если длина электромагнитной волны не превышает характерного масштаба, имеющего порядок длины свободного пробега молекул газа. Поскольку типичная длина свободного пробега в нормальных условиях составляет около 100 нм, мы видим, что некогерентное молекулярное рассеяние становится существенным в оптике. Молекулярное рассеяние называют рэлеевским, поскольку первым его закономерности установил лорд Рэлей в 1871 г.

Пользуясь формулой для потока мощности излучения движущегося заряда (2.1.28), интегрируя по всем телесным углам, получим формулу для рассеянной мощности одного вторичного излучателя:

$$I_1 = \frac{e^2 \omega^4 x_0^2}{12\pi\varepsilon_0 c^3}. \qquad (2.2.78)$$

Суммируя по всем вторичным излучателям и учтя связь между амплитудой колебаний заряда (2.2.9) и показателем преломления (2.2.18) для разреженного газа, получим общую рассеянную мощность в единице объема:

$$I = \frac{\varepsilon_0 E_0^2 (n-1)^2 \omega^4}{3\pi c^3 N_e} = S_0 \frac{(n-1)^2 \omega^4}{3\pi c^4 N_e}, \qquad (2.2.79)$$

где $S_0 = \varepsilon_0 c E_0^2$ – поток энергии падающего излучения. Частотная зависимость рассеяния определяется множителем $(n-1)^2 \omega^4$. Как следует из формулы (2.2.20), этот множитель пропорционален выражению

$$\left| \sum_j \frac{f_j}{\left(\omega_j^2 - \omega^2 + i\omega\gamma_j\right)^2} \right|^2 \omega^4. \qquad (2.2.80)$$

Для земной атмосферы основные линии поглощения $\omega_j$ лежат в области ультрафиолета. Поэтому в оптическом диапазоне, где $\omega_j \gg \omega$, дисперсия показателя преломления мала и рассеяние пропорционально $\omega^4$. Это объясняет голубой цвет неба. Однако интенсивность рассеяния на свободных зарядах ($\omega_j = 0$) не будет зависеть от частоты. Это связано с тем, что ускорение заряда

зависит только от напряженности поля падающей волны, а излучение заряда зависит только от его ускорения.

**Рассеяние на аэрозольных частицах**

Аналогично связи между молекулярным рассеянием и показателем преломления рефрагирующей среды установим связь между рассеянием и эффективным показателем преломления аэрозольных частиц [16], таких как капельки жидкой воды или кристаллы льда в облаках. Рассеяние на аэрозольных частицах называют рассеянием Ми, по имени Густава Ми, одним из первых создавшего теорию рассеяния электромагнитных волн на однородных диэлектрических сферах в 1908 г.

Получим выражение для эффективного показателя преломления системы шарообразных однородных непроводящих частиц, малых по сравнению с длиной волны. Поскольку частица мала по сравнению с длиной волны, поле внутри такой частицы в каждый момент времени является близким к однородному. Это позволяет воспользоваться электростатическим приближением, которое является упрощенным вариантом теории Ми [16].

Статическое поле описывается скалярным потенциалом φ, для которого справедливо уравнение

$$\operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} \varphi) = 0. \tag{2.2.81}$$

Рассмотрим однородный шар с относительной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_p$ и радиусом $a$, помещенный во внешнее электрическое поле $\mathbf{E}_0$. Найдем возмущенное поле в присутствии шара. Будем рассматривать поля внутри и вне шара $\mathbf{E}_1 = -\operatorname{grad} \varphi_1$ и $\mathbf{E}_2 = -\operatorname{grad} \varphi_2$. Задачу удобно решать в сферических координатах $(r, \theta, \phi)$

$$\begin{aligned} x &= r \sin\theta \cos\phi, \\ y &= r \sin\theta \sin\phi, \\ z &= r \cos\theta. \end{aligned} \tag{2.2.82}$$

Ось $z$ выберем совпадающей по направлению с невозмущенным электрическим полем $\mathbf{E}_0$. Потенциалы удовлетворяют уравнениям

$$\Delta\varphi_1 = 0 \quad (r < a); \quad \Delta\varphi_2 = 0 \quad (r > a), \tag{2.2.83}$$

условиям на границе ($r = a$), обеспечивающим существование члена $\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\varepsilon \dfrac{\partial}{\partial r}\varphi\right)$ в выражении для $\operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} \varphi)$:

$$\varphi_1 = \varphi_2; \quad \varepsilon_p \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \tag{2.2.84}$$

и асимптотическому условию на бесконечности $\mathbf{E}_2 \to \mathbf{E}_0$:

$$\lim_{r\to\infty} \varphi_2 = -E_0 r \cos\theta = -E_0 z. \tag{2.2.85}$$

Запишем выражение оператора Лапласа в сферических координатах:

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}. \tag{2.2.86}$$

Будем искать решение для потенциалов в форме $\varphi_{1,2} = f_{1,2}(r)\cos\theta$, что приводит к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f_{1,2}(r)}{\partial r}\right) = 2f_{1,2}(r), \tag{2.2.87}$$

общим решением которого является

$$f_{1,2}(r) = C_{1,2}^1 r + C_{1,2}^2 r^{-2}. \tag{2.2.88}$$

Из асимптотического условия на бесконечности получаем $C_2^1 = -E_0$. Из условия непрерывности решения в начале координат получаем $C_1^2 = 0$. Для оставшихся двух констант запишем условия на границе шара:

$$-E_0 a + \frac{C_2^2}{a^2} = C_1^1 a, \quad -E_0 - 2\frac{C_2^2}{a^3} = \varepsilon_p C_1^1, \tag{2.2.89}$$

Отсюда имеем

$$C_1^1 = -3\frac{E_0}{\varepsilon_p + 2}; \quad C_2^2 = a^3 E_0 \frac{\varepsilon_p - 1}{\varepsilon_p + 2}. \tag{2.2.90}$$

В полученном решении для нас важен лишь член $C_2^2 r^{-2}\cos\theta$, который соответствует полю диполя. Чтобы найти эффективный дипольный момент шара, рассмотрим диполь из двух одинаковых зарядов разного знака $q$ и $-q$, расположенных на малом расстоянии $\delta$ друг от друга. Потенциал поля диполя на больших расстояниях равен

$$\varphi = \frac{q\boldsymbol{\delta}}{4\pi\varepsilon_0}\operatorname{grad}\frac{1}{r} = \frac{\mathbf{pr}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \tag{2.2.91}$$

где $\boldsymbol{\delta}$ – вектор расстояния, направленный от отрицательного к положительному заряду, $\mathbf{p} = q\boldsymbol{\delta}$ – вектор дипольного момента. Таким образом, эффективный дипольный момент шара равен

$$p = 4\pi\varepsilon_0 a^3 E_0 \frac{\varepsilon_p - 1}{\varepsilon_p + 2}. \tag{2.2.92}$$

К этому ответу можно прийти и проще. Предположим, что шар, помещенный во внешнее поле, равномерно поляризуется. Поле, создаваемое шаром снаружи, будет равно сумме полей двух смещенных шаров с зарядами разного знака. Поле каждого равномерно заряженного шара равно полю точечного заряда, поэтому равномерно поляризованный шар создаст поле диполя. Пользуясь обозначениями формулы (2.2.52), запишем это поле следующим образом:

$$\varphi = \frac{4\pi a^3\rho}{3}\frac{\boldsymbol{\delta}\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{pa^3\cos\theta}{3\varepsilon_0 r^2} = \frac{a^3 E_0\cos\theta}{r^2}\frac{\chi_p}{3} = \frac{a^3 E_0\cos\theta}{r^2}\frac{\varepsilon_p - 1}{\varepsilon_p + 2}, \tag{2.2.93}$$

что совпадает с $C_2^2 r^{-2}\cos\theta$.

Рассмотрим случайную среду, состоящую из хаотически расположенных сферических аэрозольных частиц. Поскольку дипольный момент одной час-

тицы пропорционален ее объему $V_p = 4\pi a^3 / 3$, средняя восприимчивость такой среды не зависит от распределения частиц по размерам и равна просто усредненной по всему объему восприимчивости:

$$\chi = 3\frac{W_p}{\rho_p}\frac{\varepsilon_p - 1}{\varepsilon_p + 2} = \frac{W_p \chi_p}{\rho_p}, \tag{2.2.94}$$

где $W_p$ – содержание аэрозольных частиц в воздухе (масса на единицу объема), $\rho_p$ – плотность материала частиц, а $W_p / \rho_p$ равно объемному содержанию частиц. При рассмотрении переменных полей нужно учесть, что у среды может появиться поглощение, т.е. $\varepsilon_p$ может оказаться комплексной и зависящей от частоты. В этом случае

$$\chi = 3\frac{W_p}{\rho_p}\mathrm{Re}\left(\frac{\varepsilon_p - 1}{\varepsilon_p + 2}\right). \tag{2.2.95}$$

Условие применимости этой формулы в случае волновых полей состоит, как минимум, в том, что $ka << 1$, т.е. малости вариаций падающей волны на расстояниях порядка размера частицы. Более сильное условие заключается в малости вариаций фаз поля внутри частицы, что дает $2\,nka << 1$.

Несложно также вычислить излучение, рассеянное одной такой частицей. Пользуясь формулой (2.1.29) для потока излучения колеблющегося диполя и интегрируя по всем направлениям, мы получаем аналогично (2.2.78):

$$I_1 = \frac{\ddot{p}^2}{12\pi\varepsilon_0 c^3} = S_0 k^4 \frac{3V_p^2}{4\pi}\mathrm{Re}\left(\frac{\varepsilon_p - 1}{\varepsilon_p + 2}\right)^2 = S_0 \sigma_p. \tag{2.2.96}$$

Величина $\sigma_p$ имеет размерность площади, равняется отношению мощности рассеянного излучения к потоку падающего излучения и называется сечением рассеяния одной частицы. Если длина волны существенно меньше среднего расстояния между частицами, то излучаемые ими вторичные волны некогерентны. В этом случае сечение рассеяния (scattering) единичного объема равно

$$\sigma_{\mathrm{sca}} = \frac{W_p}{\rho_p}\sigma_p. \tag{2.2.97}$$

Рассеяние на аэрозольных частицах чаще всего называют рассеянием Ми, хотя иногда его тоже называют рэлеевским, поскольку его свойства аналогичны свойствам молекулярного рассеяния. Несложно также получить и формулы для сечения поглощения (extinction) одной частицы

$$\sigma_{\mathrm{ext}} = k\,\mathrm{Im}\,\chi_p = 4\pi\varepsilon_0 k a^3\,\mathrm{Im}\left(\frac{\varepsilon_p - 1}{\varepsilon_p + 2}\right) \tag{2.2.98}$$

и для среды из хаотически расположенных аэрозольных частиц

$$\sigma_{\mathrm{ext}} = k\,\mathrm{Im}\,\chi = k\frac{W_p}{\rho_p}\mathrm{Im}\,\chi_p. \tag{2.2.99}$$

## Литература

1. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. Т. 3: Излучение. Волны. Кванты. Пер. с англ. 4-е изд. − Эдиториал УРСС.
2. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. Т. 5: Электричество и магнетизм. Пер. с англ. 3-е изд. − Эдиториал УРСС.
3. *Ахманов С.А., Никитин С.Ю.* Физическая оптика. 2-е изд. М.: Изд-во МГУ, «Наука», 2004.
4. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. 2-е изд. М.: Наука, 1973. 720 с.
5. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика: Учеб. пособ.: Для вузов. В 10 т. Т. V. Статистическая физика. Ч. 1. 3-е изд. М.: Наука, 1976. 584 с.
6. *Фабелинский И.Л.* Молекулярное рассеяние света. М.: Наука, 1965. 512 с.
7. *Быков А.Д., Синица Л.Н., Стариков В.И.* Экспериментальные и теоретические методы в спектроскопии молекул водяного пара / Под общей ред. С.Д. Творогова. Новосибирск: Изд-во Сиб. отд. РАН, 1999. 376 с.
8. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика: Учеб. пособ.: Для вузов. В 10 т. Т. III. Квантовая механика (нерелятивистская теория). 6-е изд., испр. М.: Физматлит, 2008. 800 с.
9. *Биденхарн Л., Лаук Дж.* Угловой момент в квантовой физике. Теория и приложенияю В 2 т. Т. 2. М.: Мир, 1984. 343 с.
10. *Герцберг Г.* Колебательные и вращательные спектры многоатомных молекул. М.: Изд-во иностр. лит., 1949. 648 с.
11. *Randall H.M., Dennison D.M., Ginsburg N., Weber L.R.* // Physical Rev. 1937. V. 52. P. 160.
12. *Randall H.M.* // Rev. Mod. Phys. 1938. V. 10. P. 72.
13. *Lichtenstein M., Derr V.E., Gallagher J.J.* Millimeter Wave Rotational Transitions and the Stark Effect of the Water Molecule // Journal of Molecular Spectroscopy. 1966. V. 20. P. 391-401.
14. *Hall R.T., Dowling J.M.* Pure Rotational Spectrum of Water Vapor // The Journal of Chemical Physics. 1967. V. 47, No. 7.
15. *Messer J.K., De Lucia F.C., Helminger P.* The pure rotational spectrum of water vapor-a millimeter, submillimeter, and far infrared analysis // Int. Journal of Infrared and Millimeter Waves. 1983. V. 4, No. 4.
16. *Борен К., Хафмен Д.* Поглощение и рассеяние света малыми частицами. М.: Мир, 1986. 664 с.


## 2.3. Показатель преломления нейтральной атмосферы

### Показатель преломления в приближении идеального газа

Основной вклад в показатель преломления нейтральной атмосферы вносят сухой воздух (смесь кислорода и азота), водяной пар и углекислый газ $CO_2$ [1, 2]. Полосы поглощения атмосферных газов лежат не ниже микроволнового диапазона, а в основном занимают инфракрасный и ультрафиолетовый диапазон. Поэтому начиная от статических полей и до частот 1–2 ГГц показатель преломления нейтральной атмосферы можно с хорошей точностью считать не зависимым от частоты. Парциальные давления сухого воздуха $P_d$, водяного пара $P_w$ и углекислого газа $P_c$ с точностью около 0.1% описываются уравнением состояния идеального газа [3]:

$$P_{d,w,c} = N_{d,w,c} kT, \tag{2.3.1}$$

где $N_d$, $N_w$ и $N_c$ – плотности числа молекул соответствующих газов, $k$ – постоянная Больцмана, а $T$ – абсолютная температура. В этом случае, пользуясь формулами (2.2.20) и (2.2.62), можно записать в приближении разреженного газа

$$N = C_1 \frac{P_d}{T} + C_2 \frac{P_w}{T} + C_3 \frac{P_w}{T^2} + C_4 \frac{P_c}{T}, \qquad (2.3.2)$$

где $C_{1–4}$ – физические константы, определяемые экспериментально. Во всех уравнениях мы будем пользоваться безразмерными единицами для индекса рефракции $N = n - 1$. Поскольку характерное значение индекса рефракции у поверхности Земли составляет около $3\times10^{-4}$ и экспоненциально падает с высотой, для представления результатов удобно измерять его и в миллионных долях (ppm), называемых также N-единицами: $N$[ppm] = $10^6$ $(n - 1)$. Типичное значение $N$ у поверхности Земли равно 300 ppm. В ряде публикаций значения констант приводятся в расчете на измерение $N$ в ppm, здесь мы умножаем их значения на $10^{-6}$.

Для практических целей часто используется упрощенная формула [1, 2]:

$$N = C_1 \frac{P}{T} + C_3 \frac{P_w}{T^2}, \qquad (2.3.3)$$

где не учитывается различие между коэффициентами $C_1$ и $C_2$ и где $P = P_d + P_w + P_c$ – полное атмосферное давление. Типичное содержание $CO_2$ в атмосфере мало и составляет около 0.03–0.0375% (300–375 ppm), поэтому обычно его давление не учитывается непосредственно, а подбираются коэффициенты $C_1$ и $C_3$, обеспечивающие наилучшую аппроксимацию экспериментальных данных в предположении фиксированного содержания $CO_2$. Это является хорошим приближением, поскольку общий вклад $CO_2$ в показатель преломления составляет около 0.02% [4]. Для коэффициентов широко используются следующие значения [1]:

$$C_1 = 77.6\times10^{-6} \frac{\text{К}}{\text{гПа}}; \quad C_3 = 0.373 \frac{\text{К}^2}{\text{гПа}}. \qquad (2.3.4)$$

Теоретическую оценку константы $C_3$ можно получить из (2.2.62), считая, что $N = \chi / 2$:

$$C_3 = \frac{p_w^2}{6k^2\varepsilon_0} \approx 0.372 \frac{\text{К}^2}{\text{гПа}}, \qquad (2.3.5)$$

что очень близко к экспериментальному значению.

Точность формулы (2.3.4) составляет около 0.2% [5], и этого достаточно для задач, связанных с численным прогнозом погоды. Это является причиной широкого использования этой формулы, несмотря на наличие более точных экспериментальных значений констант и более точных формул [4, 5, 6]. Однако для исследования климата точность 0.2% может оказаться недостаточной.

**Учет сжимаемости**

Для улучшения точности формулы для показателя преломления следует учесть отклонения уравнения состояния реального газа от уравнения состояния идеального газа. Существуют различные формы уравнения состояния реального газа [3]: уравнение Ван-дер-Ваальса, уравнение Бертло, уравнение Камерлинг–Оннеса. Для параметризации показателя преломления используют форму уравнения, которая ближе всего к последнему [5, 6]:

$$P_{d,w,c} = Z_{d,w,c}\left(P_{d,w,c}, T\right) N_{d,w,c} kT, \qquad (2.3.6)$$

где $Z_{d,\ w,\ c}$ – сжимаемость соответствующих компонентов воздуха. В явном виде сжимаемость была впервые введена в формулу показателя преломления в работе [5], хотя отклонения от уравнения состояния идеального газа уже учитывались ранее [7]. Это позволяет записать формулу для показателя преломления в общей форме:

$$N = C_1 \frac{P_d}{T} Z_d^{-1} + C_2 \frac{P_w}{T} Z_w^{-1} + C_3 \frac{P_w}{T^2} Z_w^{-1} + C_4 \frac{P_c}{T} Z_c^{-1}, \qquad (2.3.7)$$

В [5] использованы приближенные выражения для $Z_d$ и $Z_w$, полученные в [8]:

$$Z_d^{-1} = 1 + P_d \left[ a_1 \left( 1 + \frac{a_2}{T} \right) - a_3 \frac{t}{T^2} \right],$$

$$a_1 = 57.90 \times 10^{-8}\ \text{гПа}^{-1}, \quad a_2 = 0.52\ \text{K}, \quad a_3 = 9.4611 \times 10^{-4}\ \text{K},$$

$$Z_w^{-1} = 1 + b_0 \frac{P_w}{T^3} \left( 1 - b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 \right),$$

$$b_0 = 1650 \frac{\text{K}^3}{\text{гПа}}, \quad b_1 = 0.01317\ ^\circ\text{C}^{-1}, \quad b_2 = 1.75 \times 10^{-4}\ ^\circ\text{C}^{-2}, \quad b_3 = 1.44 \times 10^{-6}\ ^\circ\text{C}^{-3} \qquad (2.3.8)$$

где $t = T - 273.15$ K – температура в °C.

Следуя [4, 6], приведем оптимальные значения коэффициентов, полученные в предположении, что содержание $CO_2$ составляет 375 ppm:

$$C_1 = 77.6890 \times 10^{-6} \frac{\text{К}}{\text{гПа}}; \quad C_2 = 71.2952 \times 10^{-6} \frac{\text{К}}{\text{гПа}}; \quad C_3 = 0.375463 \frac{\text{К}^2}{\text{гПа}}. \qquad (2.3.9)$$

В полной формуле (2.3.2) для произвольного содержания $CO_2$ значения коэффициентов $C_1$ и $C_4$ равны

$$C_1 = 77.6681 \times 10^{-6} \frac{\text{К}}{\text{гПа}}; \quad C_4 = 133.4800 \times 10^{-6} \frac{\text{К}}{\text{гПа}}. \qquad (2.3.10)$$

Эти коэффициенты были получены на основе экспериментальных данных, поэтому они уже учитывают сжимаемость. Тем не менее использование выражений $P_{d,\ w,\ c} / T$ вместо $kN_{d,\ w,\ c}$ может приводить к небольшому ухудшению точности вне диапазона условий, использованного для вычисления коэффициентов.

**Уравнения гидростатики и состояния**

Учитывать сжимаемость следует также при вычислении показателя преломления по данным моделей численного прогноза погоды для их сравнения с данными дистанционного зондирования. Модели, как правило, оперируют сеточными полями температуры и влажности, заданными на широтно-долготных сетках и на уровнях с заданным давлением или геопотенциальной высотой. Геопотенциальная высота $H$ определяется как геометрическая высота над поверхностью уровня моря, на которой потенциал силы тяжести имел бы то же значение, что и в заданной точке, в однородном поле тяжести со стандартным ускорением $g_0 = 9.806655$ м/с$^2$:

$$dH = \frac{g(z)}{g_0} dz, \tag{2.3.11}$$

где $z$ – геометрическая высота над уровнем моря и $g(z)$ – высотный профиль ускорения силы тяжести, который зависит также от географической широты и долготы. Геопотенциальная высота измеряется в геопотенциальных метрах [гп. м] или километрах [гп. км]. Это уравнение позволяет найти зависимости $H(z)$ и $z(H)$, чтобы привязать поля модели к пространственным точкам.

Для вычисления давления на заданной сетке геопотенциальных высот или высот на заданной сетке давлений используется уравнение гидростатики [9]:

$$dH = -\frac{dP}{g_0 \rho(P)} \quad \text{или} \quad dP = -g_0 \rho(H) dH, \tag{2.3.12}$$

дополненное уравнением состояния. Уравнение состояния удобно переписать, введя виртуальную температуру. Обозначим через $q_{w,c}$ удельные содержания водяного пара и углекислого газа: $q_{w,c}$ обозначает массу соответствующей компоненты, приходящуюся на единичную массу смеси, и измеряется в кг/кг. Уравнение состояния идеального газа имеет следующий вид [3]:

$$P = (\rho_d R_d + \rho_w R_w + \rho_c R_c) T, \tag{2.3.13}$$

где $\rho_{d,\,w,\,c}$ – плотности компонентов воздуха, $R_{d,\,w,\,c}$ – их удельные газовые постоянные, равные универсальной газовой постоянной $R$, деленной на их молярные массы $\mu_{d,\,w,\,c}$. Приведем значения газовых постоянных:

$$\begin{aligned} R &= 8.3144621 \ \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}, \quad R_d = 287.06 \ \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}, \\ R_w &= 461.52 \ \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}, \qquad R_c = 188.92 \ \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}. \end{aligned} \tag{2.3.14}$$

Выразим плотности компонентов через их удельные содержания и общую плотность смеси $\rho$:

$$\begin{aligned} \rho_d &= \rho(1 - q_w - q_c), \\ \rho_{w,c} &= \rho q_{w,c}. \end{aligned} \tag{2.3.15}$$

Уравнение состояния можно теперь переписать в форме уравнения состояния сухого воздуха:

$$P = \rho R_d \left(1 + q_w \frac{R_w - R_d}{R_d} + q_c \frac{R_c - R_d}{R_d}\right) T \equiv \rho R_d T_v, \tag{2.3.16}$$

где $T_v$ – виртуальная температура, которую можно определить для любого количества компонентов воздушной смеси:

$$T_v = \left(1 + \sum_i q_i \frac{R_i - R_d}{R_d}\right) T. \tag{2.3.17}$$

Несложно включить в это определение жидкие или твердые аэрозольные частицы (например, капельная вода или кристаллы льда в облаках): поскольку они не дают вклада в атмосферное давление, их формальные газовые посто-

янные следует положить равными 0. Содержанием $CO_2$ мы будем чаще всего пренебрегать.

Получим выражение для парциального давления водяного пара:

$$P_w = q_w \rho R_w T = q_w \frac{R_w}{R_d} \rho R_d T = \frac{P q_w}{\frac{R_d}{R_w} + \sum_i q_i \frac{R_i - R_d}{R_w}}. \qquad (2.3.18)$$

Если можно пренебречь вкладом всех дополнительных компонентов воздушной смеси, кроме водяного пара, то эту формулу можно переписать в виде

$$P_w = \frac{P q_w}{\frac{R_d}{R_w} + q_w \frac{R_w - R_d}{R_w}}. \qquad (2.3.19)$$

Часто используется относительная влажность воздуха $r_w$, равная отношению парциального давления водяного пара к давлению насыщенного водяного пара. В этом случае можно воспользоваться формулой Антуана для давления насыщенного пара, являющейся следствием уравнения Клапейрона–Клаузиуса [3]:

$$P_w = r_w P_0 \exp\left(\frac{17.27 T°\mathrm{C}}{237.3 + T°\mathrm{C}}\right), \qquad (2.3.20)$$

где $P_0$ = 6.11 гПа – давление насыщенного водяного пара при 0 °C, $T$ ºC = $T$ – 273.16 – температура в градусах Цельсия. Если $r_w$ выражено в процентах, то в правой части следует добавить множитель 0.01. Из формулы (2.3.19) получим выражение для $q_w$:

$$q_w = \frac{P_w}{P \frac{R_w}{R_d} - P_w \frac{R_w - R_d}{R_d}}. \qquad (2.3.21)$$

Формулы (2.3.19), (2.3.20) и (2.3.21) позволяют пересчитывать $q_w$ в $r_w$ и обратно.

Пользуясь уравнением состояния, можно переписать уравнение гидростатики в замкнутой форме, допускающей численное интегрирование:

$$dH = -\frac{R_d T_v(P)}{g_0} d\ln P \quad \text{или} \quad d\ln P = -\frac{g_0}{R_d T_v(H)} dH. \qquad (2.3.22)$$

**Приближенный учет сжимаемости**

Поскольку эффект сжимаемости мал, его можно учесть в первом порядке, введя единый для всех газов фактор сжимаемости $Z(P, T, q_w)$ [6]. Абсолютная точность величины $Z - 1$ должна быть около $10^{-4}$. Поскольку $Z - 1$ имеет значение около $10^{-3}$, достаточно невысокой относительной точности около 10%. Уравнение состояния можно записать следующим образом:

$$P = \rho R_d T_v Z(P, T, q_w). \qquad (2.3.23)$$

Тогда уравнение гидростатики можно переписать в следующей форме:

$$dH = -\frac{R_d T_v(P) Z\left(P, T(P), q_w(P)\right)}{g_0} d\ln P;$$
$$dP = -\frac{g_0 P(H)}{R_d T_v(H) Z\left(P(H), T(H), q_w(H)\right)} dH. \quad (2.3.24)$$

Для $Z$ было найдено следующее эмпирическое выражение [10, 11]:

$$Z = 1 - \frac{P}{T}\left[a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + (b_0 + b_1)x + (c_0 + c_1)x^2\right] + \frac{P^2}{T^2}\left(d + ex^2\right), \quad (2.3.25)$$

где $x$ – молярная доля водяного пара:

$$x = \frac{\rho_w \mu_w}{\rho_d \mu_d + \rho_w \mu_w} = \frac{q_w \mu_w}{\mu_d + q_w(\mu_w - \mu_d)}, \quad (2.3.26)$$

а коэффициенты имеют следующие значения:

$$a_0 = 1.58123\times10^{-4}\ \text{К гПа}^{-1}; \quad a_1 = 2.9331\times10^{-6}\ \text{гПа}^{-1};$$
$$a_2 = 1.1043\times10^{-8}\ \text{К}^{-1}\text{гПа}^{-1};$$
$$b_0 = 5.707\times10^{-4}\ \text{К гПа}^{-1}; \quad b_1 = 2.051\times10^{-6}\ \text{гПа}^{-1}; \quad (2.3.27)$$
$$c_0 = 1.9898\times10^{-2}\ \text{К гПа}^{-1}; \quad c_1 = 2.376\times10^{-4}\ \text{гПа}^{-1};$$
$$d = 1.83\times10^{-7}\ \text{К}^{-2}\ \text{гПа}^{-2}; \quad e = 0.765\times10^{-4}\ \text{К}^{-2}\ \text{гПа}^{-2}.$$

Примеры поведения сжимаемости в зависимости от температуры, давления и влажности, включая экстремальные метеорологические условия, приведены на рис. 2. Для температур от –30 до +30 °С сжимаемость лежит между 0.999 и 1. Учет сжимаемости уменьшает систематические отклонения между данными дистанционного зондирования атмосферы и данными оперативного прогноза примерно на 0.1% [6].

**Вклад капельной воды и кристаллов льда**

До сих пор мы рассматривали лишь вклад атмосферных газов в показатель преломления. Влиянием облачности, содержащей капельную воду и кристаллы льда, чаще всего пренебрегают. В ряде случаев сильная конвекция может приводить к появлению облаков с большим содержанием кристаллов льда, которые вносят заметный вклад в показатель преломления [12, 13]. Формулу для показателя преломления следует дополнить членами, описывающими влияние капелек воды и кристаллов льда:

$$N = C_1 \frac{P_d}{T} + C_2 \frac{P_w}{T} + C_3 \frac{P_w}{T^2} + C_4 \frac{P_c}{T} + C_{\text{LWC}} W_{\text{LWC}} + C_{\text{IWC}} W_{\text{IWC}}, \quad (2.3.28)$$

где $W_{\text{LWC}}$ – содержание капельной воды в кг/м$^3$ (LWC – liquid water content), $W_{\text{IWC}}$ – содержание кристаллов льда (IWC – ice water content). Согласно [14], на частоте 1.5 ГГц (длина волны 20 см) комплексные показатели преломления воды и льда равны:

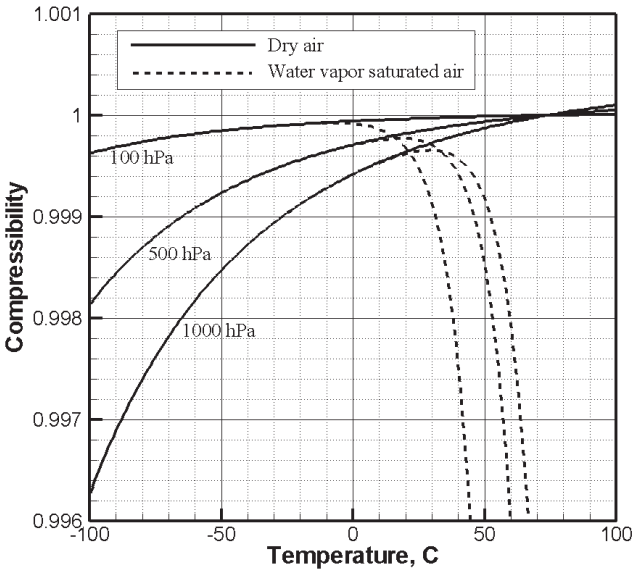



**Рис. 2.** Поведение сжимаемости в экстремальных условиях [6]. Сплошные кривые – сухой воздух, пунктирные кривые – воздух с насыщенной влажностью

$$\begin{aligned} n_{\text{water}} &= 9.3 - 0.73i, \\ n_{\text{ice}} &= 1.78 - 0.009i. \end{aligned} \tag{2.3.29}$$

Тогда, пользуясь формулой (2.2.96), можно записать [15]

$$\begin{aligned} C_{\text{LWC}} &= \frac{3}{2\rho_{\text{water}}}\,\text{Re}\left(\frac{n_{\text{water}}^2 - 1}{n_{\text{water}}^2 + 2}\right), \\ C_{\text{IWC}} &= \frac{3}{2\rho_{\text{ice}}}\,\text{Re}\left(\frac{n_{\text{ice}}^2 - 1}{n_{\text{ice}}^2 + 2}\right) \end{aligned} \tag{2.3.30}$$

Плотность воды равна $\rho_{\text{water}}$ = 1000 кг/м$^3$. Плотность льда при 0 °C составляет $\rho_{\text{ice}}$ = 920 кг/м$^3$. Это приводит к следующим значениям коэффициентов:

$$\begin{aligned} C_{\text{LWC}} &= 1.45\times10^{-3}\ \text{м}^3/\text{кг}; \\ C_{\text{IWC}} &= 0.69\times10^{-3}\ \text{м}^3/\text{кг}. \end{aligned} \tag{2.3.31}$$

Содержание льда в облаках в условиях сильной конвекции на высотах до 12 км может достигать 0.6 г/м$^3$, что соответствует величине показателя преломления около 0.2 ppm и ошибке около 0.25%.

Вклад разных факторов в показатель преломления исследовался в [15], где показано, что вклад капельной воды в показатель преломления может составлять при затяжном дожде до 2 ppm, а при проливном дожде до 15 ppm. Град может давать вклад в показатель преломления до 7 ppm, а снег 0.75 ppm. Песчаная буря может дать значимый вклад в показатель преломления до

18 ppm, однако этот эффект может наблюдаться лишь в самой нижней тропосфере.

**Зондирование на крыле линии поглощения водяного пара**

Показатель преломления нейтральной атмосферы вплоть до частот системы GPS практически не зависит от частоты. С другой стороны, показатель преломления является функцией как минимум трех метеопараметров: температуры, давления и влажности. При зондировании атмосферы при помощи сигналов GPS восстанавливается прежде всего высотная зависимость, или профиль, показателя преломления. Восстановленный профиль дополняют уравнением гидростатики. Если рассматривать сухую атмосферу, то получатся два уравнения для двух неизвестных функций, температуры и давления, которые можно определить. Однако, если вкладом влажности в показатель преломления нельзя пренебречь, то однозначно восстановить три метеопараметра без привлечения дополнительной информации не удастся. Возможные решения этой проблемы при зондировании на частотах GPS будут обсуждаться в дальнейших главах. Наиболее радикальное решение состоит в переходе к зондированию на более высоких частотах, на которых у показателя преломления появляется заметная зависимость от частоты и мнимая часть [16, 17]. В частности, для того чтобы обеспечить восстановление влажности, можно выбрать частоты на крыле упоминавшейся линии поглощения водяного пара 22 ГГц. В качестве такого набора частот рассматривались 9, 13, 17, 22 ГГц.

**Модель распространения миллиметровых волн**

Показатель преломления на частотах до 1000 ГГц (1 ТГц) описывается моделью распространения миллиметровых волн (MPM – Millimeter-wave Propagation Model) [18, 19, 20]. Эта модель учитывает линии молекулярного кислорода, водяного пара и озона, а также поглощение за счет капельной воды и частиц льда. Вклад кислорода описывается 44 линиями. В частности, модель MPM описывает важную полосу поглощения вблизи 60 ГГц (5 мм), обладающую тонкой структурой и представленную как система большого числа отдельных линий от 50.47 до 68.96 ГГц. Вклад водяного пара описывается 34 линиями от 22.235 до 987.93 ГГц и непрерывным спектром, описываемым как крыло псевдо-линии на 1.8 ТГц. Вклад озона описывается одной линией 195.43 ГГц. Показатель преломления представляется в виде недиспергирующей и диспергирующей частей. Недиспергирующая часть была рассмотрена выше.

Диспергирующая часть, связанная с молекулярным кислородом, описывается формулой

$$N_{\mathrm{O2}}\left(f\right)=\sum_{j}S_{\mathrm{O2}}\left(f_j\right)F\left(f_j,f\right)+N_n\left(f\right), \qquad (2.3.32)$$

где $f = \omega / 2\pi$ – частота, $S_{\mathrm{O2}}(f_j)$ – интенсивность $j$-й линии, $F(f_j, f)$ – форма линии, $N_n$ – нерезонансный член. Сила линий задается формулой

$$S_{\mathrm{O2}}\left(f_j\right)=10^{-6}\,\frac{a_1}{f_j}\,P_d\theta^3\exp\left(a_2\left(1-\theta\right)\right),\qquad(2.3.33)$$

где $\theta=\dfrac{300\mathrm{K}}{T}$ – обратная температура. Здесь и далее давление измеряется в гПа и $a_i$ – набор эмпирических коэффициентов. В качестве формы линии $F_j(f)$ используется форм-фактор Розенкранца [21, 22]:

$$F\left(f_j,f\right)=\nu\left(\frac{1-i\delta_j}{f_j-f-i\gamma_j}+\frac{1+i\delta_j}{f_j+f+i\gamma_j}\right),\qquad(2.3.34)$$

где $f_j$ – частота линии, $\gamma_j$ – параметр ширины линии, равный

$$\gamma_j=10^{-3}a_3\left(P_d\theta^{a_4}+1.10P_w\theta\right),\qquad(2.3.35)$$

а $\delta_j$ – интерференционный коэффициент, учитывающий влияние на данную линию всех остальных линий:

$$\delta_j=(a_5+a_6\,\theta)\,P\theta^{0.8}.\qquad(2.3.36)$$

Нерезонансный член равен

$$N_n\left(f\right)=S_{\mathrm{O2}}F_{\mathrm{O2}}\left(f\right)+iS_{\mathrm{N2}}F''_{\mathrm{N2}}\left(f\right),\qquad(2.3.37)$$

где первый член представляет собой вклад молекулярного кислорода:

$$\begin{aligned}S_{\mathrm{O2}}&=6.14\times10^{-11}P_d\theta^2,\\F_{\mathrm{O2}}\left(f\right)&=-\frac{f}{f+i0.56\times10^{-3}P\theta^{0.8}},\end{aligned}\qquad(2.3.38)$$

а второй член описывает малый вклад молекулярного азота, проявляющийся выше 100 ГГц:

$$\begin{aligned}S_{\mathrm{N2}}&=1.40\times10^{-18}P_d^2\theta^{3.5},\\F''_{\mathrm{N2}}\left(f\right)&=\frac{f}{1+1.9\times10^{-5}f^{1.5}}.\end{aligned}\qquad(2.3.39)$$

Этот член связан с деформацией электронных оболочек у молекул азота вследствие столкновений, что приводит к возникновению у них небольшого дипольного момента. Размерные параметры даны для частот в ГГц и давления в гПа.

Диспергирующая часть индекса рефракции, связанная с водяным паром, описывается формулой

$$N_{\mathrm{H2O}}\left(f\right)=\sum_j S_{\mathrm{H2O}}\left(f_j\right)F\left(f_j,f\right)+N_c\left(f\right),\qquad(2.3.40)$$

где интенсивности линий выражаются следующим образом:

$$S_{\mathrm{H2O}}\left(f_j\right)=10^{-6}\,\frac{b_1}{f_j}\,P_w\theta^{3.5}\exp\left(b_2\left(1-\theta\right)\right),\qquad(2.3.41)$$

$F(f_j, f)$ – форм-фактор Розенкранца (2.3.34), в котором интерференционный коэффициент считается нулевым $\delta_j = 0$, а параметр ширины линий равен

$$\gamma_j = 10^{-3} b_3 \left( b_4 P_w \theta^{b_6} + P_w \theta^{b_5} \right). \quad (2.3.42)$$

Для давлений ниже 0.7 гПа учитывается также доплеровское уширение линий

$$\gamma_D = 1.46 \times 10^{-6} f_j \theta^{-1/2}, \quad (2.3.43)$$

и полная ширина линий принимается равной

$$\gamma_j^* = 0.535 \gamma_j + \sqrt{0.217 \gamma_j^2 + \gamma_D^2}. \quad (2.3.44)$$

Для непрерывного спектра водяного пара $N_c(f)$ используется приближенное выражение, основанное на форм-факторе Розенкранца для псевдо-линии 1780 ГГц.

Для учета вклада капельной воды используется формула $C_{\mathrm{LWC}} W_{\mathrm{LWC}} + C_{\mathrm{IWC}} W_{\mathrm{IWC}}$, где $C_{\mathrm{LWC}}$ и $C_{\mathrm{IWC}}$ описываются формулой (2.3.30). Частотно-зависимая относительная диэлектрическая проницаемость воды описывается эмпирической формулой [23]:

$$\varepsilon_{\mathrm{water}} = \varepsilon_{\mathrm{water}}^{(0)} - f \left( \frac{\varepsilon_{\mathrm{water}}^{(0)} - \varepsilon_{\mathrm{water}}^{(1)}}{f + i\gamma_{\mathrm{water}}^{(1)}} + \frac{\varepsilon_{\mathrm{water}}^{(1)} - \varepsilon_{\mathrm{water}}^{(2)}}{f + i\gamma_{\mathrm{water}}^{(2)}} \right), \quad (2.3.45)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\mathrm{water}}^{(0)} &= 77.66 + 103.3\left(\theta - 1\right), \\ \varepsilon_{\mathrm{water}}^{(1)} &= 0.0671 \varepsilon_{\mathrm{water}}^{(0)}, \\ \varepsilon_{\mathrm{water}}^{(2)} &= 3.52, \end{aligned} \quad (2.3.46)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{\mathrm{water}}^{(1)} &= 20.20 - 146\left(\theta - 1\right) + 316\left(\theta - 1\right)^2, \\ \gamma_{\mathrm{water}}^{(2)} &= 39.8 \gamma_{\mathrm{water}}^{(1)}. \end{aligned} \quad (2.3.47)$$

Для относительной диэлектрической проницаемости льда используется следующая эмпирическая формула [24]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\mathrm{ice}} &= 3.15 + i\left( \frac{a_{\mathrm{ice}}}{f} + b_{\mathrm{ice}} f \right), \\ a_{\mathrm{ice}} &= \left(\theta - 0.171\right) \exp\left(17.0 - 22.1\theta\right), \\ b_{\mathrm{ice}} &= 10^{-5} \left[ \left( \frac{0.233\theta}{\theta - 0.993} \right)^2 + \frac{6.33}{\theta} - 1.31 \right]. \end{aligned} \quad (2.3.48)$$

На рис. 3 приведен пример частотной зависимости мнимой части показателя преломления в окрестности линии водяного пара 22 ГГц.

## Литература


1. *Smith E.K., Weintraub S.* The constants in the equation for the atmospheric refractive index at radio frequencies // Proc. IRE. 1953. V. 41. P. 1035–1037.
2. *Bean B.R., Dutton E.J.* Radio meteorology. Washington, DC: U.S. Dept. of Commerce, 1966. 435 p.

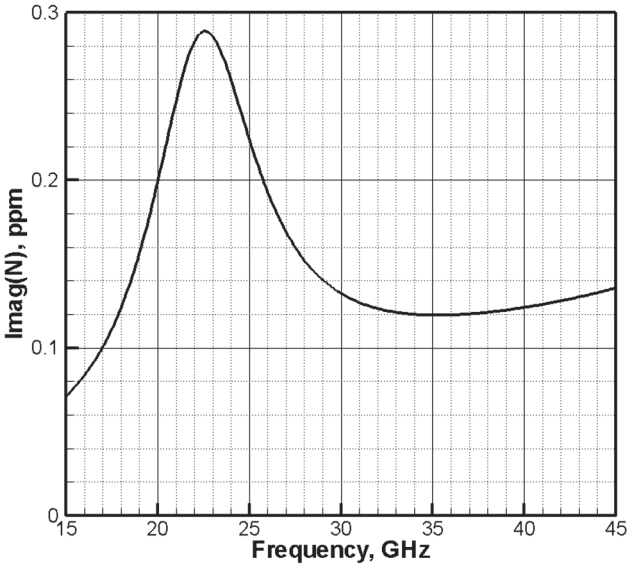



**Рис. 3.** Частотная зависимость мнимой части показателя преломления в окрестности линии водяного пара 22 ГГц для температуры 318 K, давления 1013 гПа и относительной влажности 80%

3. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. 3-е изд., испр. и доп. М.: Наука, 1990. Т. II. Термодинамика и молекулярная физика. 592 с.

4. *Rüeger J.M.* Refractive index formulae for electronic distance measurement with radio and millimeter waves // Unisurv. Rep. 2002. S-68. 13 p. Univ. of N.S.W., Sydney, Australia.

5. *Thayer G.D.* An improved equation for the radio refractive index of air // Radio Sci. 1974. V. 9. P. 803–807. doi:10.1029/RS009i010p00803

6. *Aparicio J.M., Deblonde G., Garand L., Laroche S.* Signature of the atmospheric compressibility factor in COSMIC, CHAMP, and GRACE radio occultation data // Journal of Geophysical Research. 2009. V. 114. D16114. doi:10.1029/2008JD011156

7. *Essen L., Froome K.D.* The refractive indices and dielectric constants of air and its principal constituents at 24 GHz // Proc. of the Physical Society (London). 1951. Section B. V. 64. P. 862−875.

8. *Owens J.S.* Optical refractive index of air: dependence on pressure, temperature, and composition // Appl. Opt. 1967. V. 6. P. 51−58.

9. *Хргиан А.Х.* Физика атмосферы. Л.: Гидрометеоиздат, 1969. 645 с.

10. *Davis R.S.* Equation for the determination of the density of moist air (1981/91) // Metrologia. 1992. V. 29. P. 67−70. doi:10.1088/0026-1394/29/1/008

11. *Picard A., Davis R.S., Gläser M., Fujii K.* Revised formula for the density of moist air (CIPM-2007) // Metrologia. 2008. V. 45. P. 149−155. doi:10.1088/0026-1394/45/2/004

12. *Lin L., Zou X., Anthes R., Kuo Y.-H.* COSMIC GPS cloudy profiles // Mon. Wea. Rev. 2010. V. 138. P. 1104−1118.

13. *Zou X., Yang S., Ray P.S.* Impacts of ice clouds on GPS Radio jccultation veasurements // Journal of the Atmospheric Sciences. 2012. V. 69. P. 3670−3682.

14. *Ray P.S.* Broadband complex refractive indices of ice and water // Appl. Opt. 1972. V. 11. P. 1836−1844.

15. *Solheim F.S., Vivkanandan J., Ware R.H., Rocken C.* Propagation delays induced in GPS signals by dry air, water vapor, hydrometeors, and other particulates // J. Geophys. Res. 1999. V. 104. P. 9663–9670.

16. *Kirchengast G., Hoeg P.* The ACE+ mission: An atmosphere and climate explorer based on GPS, Galileo, and LEO–LEO radio occultation // Occultations for Probing Atmosphere and Climate / Ed. by G. Kirchengast et al. Berlin: Springer, 2004. P. 201–220.

17. *Schweitzer S., Kirchengast G., Schwaerz M., Fritzer J., Gorbunov M.E.* Thermodynamic state retrieval from microwave occultation data and performance analysis based on end-to-end simulations // Journal of Geophysical Research. 2011. V. 116. D10301, doi:10.1029/2010JD014850

18. *Liebe H.* MPM − An atmospheric millimeter-wave propagation model // Int. J. Infrared Millimeter Waves. 1989. V. 10. P. 631–650.

19. *Liebe H.J., Manabe T., Hufford G.A.* Millimeter-wave attenuation and delay due to fog/cloud conditions // IEEE Trans. Antennas Propag. 1989. V. 37. P. 1617–1623.

20. *Liebe H.J., Hufford G.A., Cotton M.G.* Atmospheric propagation effects through natural and man-made obscurants for visible to MM-wave radiation (Les Effets des Conditions Defavorables de Propagation sur les Systemes Optiques, IR et a Ondes Millimetriques). Paper AGARD Conference Proceedings 542, National Telecommunications and Information Administration Institute for Telecommunication Sciences, Presented at the Electromagnetic Wave Propagation Panel Symposium. Palma de Mal/orca, Spain, 17th-20th May, 1993.

21. *Rosenkranz P.W.* Absorption of microwaves by atmospheric gases // Atmospheric Remote Sensing By Microwave Radiometry / Ed. by M.A. Janssen. J. Wiley &. Sons, Inc., 1993. Ch. 2. P. 37–90.

22. *Rosenkranz P.W.* Pressure broadening of rotational bands. II. Water Vapor from 300 to 1100 $cm^{-1}$ // J. Chem. Phys. July 1987. V. 87. P. 163–170.

23. *Liebe H.J., Hufford G.A., Manabe T.* A model for the complex permittivity of water at frequencies below 1 THz // Int. J. Infrared and Millimeter Waves. July 1991. V. 12. P. 659–675.

24. *Hufford G.A.* A model for the complex permittivity of ice at frequencies below 1 THz // Int. J. Infrared and Millimeter Waves. July 1991. V. 12. P. 677–680.

## 2.4. Рефракционные свойства ионосферы

### Общие сведения об ионосфере

Ионосферой называется область земной атмосферы, занимающая область высот примерно от 50–60 км и до высоты около одного радиуса Земли (6370 км), в которой имеется достаточное число свободных электронов и ионов, чтобы оказывать заметное воздействие на распространение радиоволн [1, 2]. Широко известен тот факт, что именно благодаря отражению радиоволн от ионосферы возможна дальняя радиосвязь на коротких волнах. Ионизация вызывается солнечным или космическим излучением, а также метеорными частицами. Высоты, занимаемые ионосферой, делятся на области, внутри которых имеются отдельные слои повышенной концентрации заряженных частиц.

Область D занимает диапазон высот от 50 до 90 км. В этой области имеется слой C на высоте около 65 км (электронная концентрация около $10^8$ $м^{-3}$) и слой D на высоте 75–80 км (электронная концентрация около $10^9$ $м^{-3}$). Считается, что слой C индуцируется космическими лучами, тогда как остальные слои, за исключением, возможно, спорадического слоя $E_s$, – солнечными лучами. Слой D, индуцируемый рентгеновским излучением Солнца, является единственным поглощающим слоем для радиоволн. Поглощение обусловлено столкновениями электронов с нейтральными частицами. Этот слой существует только днем, поэтому дальняя радиосвязь оказывается возможной лишь ночью.

Область E занимает диапазон высот от 90 до 120–140 км. Здесь наблюдаются слои E1, E2 и спорадические слои $E_s$. Слой E1 наблюдается в дневное время над всеми районами земного шара на высоте около 110 км, электронная концентрация в нем достигает $10^{11}$ $м^{-3}$. Этот слой индуцируется солнеч-

ным излучением. Слой E2 встречается лишь над некоторыми районами земного шара. Спорадические слои $E_s$ возникают на высоте около 100 км, их горизонтальная протяженность составляет десятки километров. Эти слои, возможно, индуцируются метеорными частицами. Они могут наблюдаться как днем, так и ночью, в зависимости от региона.

Область F занимает диапазон высот выше 120–140 км. В ней лежат слои F1 и F2. Слой F1, находящийся на высоте 200 км, похож на слой E1 в том отношении, что он также связан с солнечным излучением. Электронная концентрация в нем достигает $2\times10^{11}$ м$^{-3}$. Максимум электронной концентрации, составляющий около $10^{12}$ м$^{-3}$, находится в слое F2, лежащем на высоте 250 км и более.

Физика образования ионосферы состоит в динамическом равновесии процессов ионизации и рекомбинации. Если рассмотреть пучок ионизирующего излучения, падающего на атмосферу, находящуюся в гидростатическом равновесии, то несложно видеть, что распределение электронной концентрации по высоте должно иметь максимум. На больших высотах атмосфера разрежена и слабо поглощает излучения, а до малых высот излучение уже почти не доходит. Эти представления составляют основу простой модели ионосферного слоя, предложенной Чепменом в 1931 г. (слой Чепмена) [3].

Существует международная справочная модель ионосферы (International Reference Ionosphere – IRI) [4, 5, 6], которая позволяет для заданного времени и места рассчитывать ожидаемую электронную концентрацию. Эта модель описывает усредненные крупномасштабные структуры распределения электронной концентрации. Фактическое распределение электронной концентрации в ионосфере характеризуется возмущениями, с масштабами от сотен метров [7] до сотен и тысяч километров [2]. Ионосферные возмущения обусловлены различными факторами: погодными фронтами и землетрясениями (посредством акустико-гравитационных волн), солнечными вспышками и изменениями параметров солнечного ветра, изменениями межпланетного магнитного поля и геомагнитными возмущениями [1, 2].

С точки зрения спутникового зондирования нейтральной атмосферы радиоволнами, ионосфера является мешающим фактором, и ее вклад из измеряемой фазовой задержки необходимо удалять. Для этого используется двухчастотный метод [8], основанный на зависимости ионосферного показателя преломления от частоты. Точность двухчастотного метода лимитируется ионосферными флуктуациями с характерными масштабами 1 км и менее.

**Рефракционные свойства ионосферы на высоких частотах**

Рассмотрим рефракционные свойства ионосферы. Ионосфера является ионизированным газом, который в простейшем приближении рассматривают как систему свободных легких электронов и тяжелых ионов. Пренебрегая влиянием магнитного поля Земли, вкладом ионов и столкновениями, воспользуемся выражением для восприимчивости (2.2.27):

$$\chi = -\frac{N_e e^2}{\varepsilon_0 m_e \omega^2} = -\frac{N_e e^2}{4\pi^2 \varepsilon_0 m_e \nu^2}. \qquad (2.4.1)$$

Пользуясь фундаментальными константами: заряд электрона $e = 1.602176487\times10^{-19}$ Кл и масса электрона $m_e = 9.10938215\times10^{-31}$ кг, найдем численное значение константы в этой формуле и запишем ее в следующем виде:

$$\chi = -C_{\text{iono}}\frac{N_e}{\nu^2}, \tag{2.4.2}$$

где $C_{\text{iono}} = 80.6164$ Гц$^2$ / м$^3$. В частности, подставляя максимальную величину $N_e = 10^{12}$ м$^{-3}$ и частоту $\nu = 1$ ГГц $= 10^9$ Гц, мы получим величину $\chi$ около –80 ppm. Поскольку эта величина существенно меньше единицы, для дециметровых волн, используемых в системе GPS, можно приближенно записать

$$n = 1 + N = 1 + \frac{\chi}{2}, \tag{2.4.3}$$

что приводит к оценке максимальной величины ионосферного индекса рефракции для частот GPS, примерно равной –40 ppm. Мы видим, что ионосферный индекс рефракции, в силу того что собственная частота свободных зарядов равна 0, оказывается отрицательным (а показатель преломления меньше единицы) и растет с частотой, т.е. находится в области аномальной дисперсии.

**Рефракционные свойства ионосферы на радиочастотах**

Для радиочастот показатель преломления ионосферы может существенно отличаться от единицы. Как отмечено в [9], действующее поле внутри ионизированного газа равно среднему полю в среде $\boldsymbol{\mathcal{E}}$, в отличие от сжатых газов, где оно равно $\boldsymbol{\mathcal{E}} + \dfrac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0}$ (ср. (2.2.53)). Поэтому для точного выражения диэлектрической проницаемости ионосферы через восприимчивость следует пользоваться не формулой Лоренца–Лоренца (2.2.56), а формулой

$$\varepsilon = n^2 = 1 + \chi. \tag{2.4.4}$$

Для заданной электронной концентрации $N_e$ существует критическая частота

$$\nu_{\text{кр}} = \sqrt{C_{\text{iono}} N_e}, \tag{2.4.5}$$

на которой восприимчивость равна –1, а диэлектрическая проницаемость и показатель преломления равны 0. В частности, для слоя F2, при $N_e = 10^{12}$ м$^{-3}$, эта частота составляет примерно 9 МГц. Ниже будет показано, что для радиочастот показатель преломления ионосферы зависит также от магнитного поля Земли и поляризации электромагнитной волны.

Пусть концентрация электронов $N_e(z)$ является функцией от высоты $z$ и существует критическая высота $z_{\text{кр}}$, на которой частота падающей волны удовлетворяет условию

$$\nu = \sqrt{C_{\text{iono}} N_e\left(z_{\text{кр}}\right)}, \tag{2.4.6}$$

и профиль $N_e(z)$ монотонно растет в некотором интервале высот выше критической высоты. Покажем, что при этих условиях волна, распространяющаяся вертикально вверх, будет отражаться от ионосферы. Мы пренебрежем кри-

визной Земли и будем считать ионосферу плоскослоистой средой. Падающую волну $E_0(z)$ будем считать плоской. Поле в среде представим в виде суперпозиции волн, бегущих в двух направлениях:

$$E_{\pm}(z) = A_{\pm} \exp\left(\pm ik \int \sqrt{\varepsilon(z')} dz'\right). \qquad (2.4.7)$$

Это выражение записано в приближении плавно меняющейся зависимости $\varepsilon(z')$, т.е. на расстоянии порядка длины волн $\varepsilon(z)$ должно мало меняться. Это условие заведомо не выполняется в окрестности критической высоты, где $\varepsilon(z) \to 0$ и длина волны формально стремится к бесконечности. Поэтому поле в окрестности критической высоты будет иметь другую структуру, нежели суперпозиция бегущих волн (2.4.7). Рассмотрим поле на высоте, большей, чем $z_{кр}$. В силу предположения о монотонности $N_e(z)$ величина $\varepsilon(z)$ там становится отрицательной, а показатель преломления $\sqrt{\varepsilon(z)}$ – величиной чисто мнимой. Если исключить окрестность критической точки, то поле там должно иметь вид

$$E_{+}(z) = A_{+} \exp\left(-k \int \sqrt{-\varepsilon(z')} dz'\right). \qquad (2.4.8)$$

Это решение как функция от высоты $z$ быстро затухает. Второе решение $E_(z)$ неограниченно возрастает и должно быть отброшено из соображений сохранения энергии. Волна за критической высотой является стоячей и не переносит энергии. А поскольку мы рассматриваем случай без поглощения, из соображений сохранения энергии остается единственная возможность: падающая волна отражается в окрестности критической высоты. Это явление аналогично полному внутреннему отражению в оптике.

Пользуясь законом Снеллиуса (2.2.5), рассмотрим падение волны на ионосферу под некоторым углом. При этом удобно ввести систему представлений, лежащей в основе геометрической оптики, которая будет детально обсуждаться в следующих главах. Волну можно рассматривать как совокупность лучей, направленных по нормали к волновому фронту. При этом энергия волны переносится вдоль лучей.

Если луч выходит под некоторым углом $\theta_1$ (угол отсчитывается от вертикали) на высоте $z_1$, где показатель преломления равен $n(z_1)$, то на высоте $z_2$ луч станет горизонтальным, т.е. направление распространения $\theta_2 = \pi/2$, если

$$n(z_1)\sin\theta_1 = n(z_2). \qquad (2.4.9)$$

Эта высота является максимальной высотой, которой достигает луч. Необходимым условием существования точки апогея является $n(z_2) < n(z_1)$. Это условие выполнено для атмосферы Земли ниже слоя F2. Показатель преломления нейтральной атмосферы убывает с высотой. Показатель преломления ионосферы ниже главного максимума F2 также в среднем убывает с высотой: абсолютная величина ионосферного индекса рефракции растет, но сам индекс рефракции отрицателен. В неоднородной среде луч поворачивает в сторону большей оптической плотности. Поэтому за точкой апогея луч продолжает поворачивать вниз, пока не достигнет поверхности Земли.

Если рассмотреть луч, выпущенный под бесконечно малым углом к вертикали $\theta_1 \to 0$, то условие отражения (2.3.57) будет иметь вид $n(z_2) \to 0$, что согласуется с рассмотрением критической высоты, проведенным выше.

**Принцип действия ионозонда**

На эффекте отражения волн от ионосферы основан принцип наземного зондирования ионосферы при помощи ионозонда. Ионозонд состоит из передатчика с переменной частотой и приемника, фиксирующего задержку между излучением и приемом отраженного сигнала. Частоты у ионозондов обычно меняются в пределах от 1 до 20 МГц. Частота ν, в силу формулы (2.4.6), определяет электронную концентрацию

$$N_e(\nu) = \frac{\nu^2}{C_{\text{iono}}}, \tag{2.4.10}$$

на той высоте, где произошло отражение, а по временной задержке $\tau(\nu)$ определяют кажущуюся высоту отражения

$$z_{\text{eff}}(\nu) = \frac{c\tau(\nu)}{2}, \tag{2.4.11}$$

т.е. высоту, на которой произошло бы отражение, если бы скорость распространения волны равнялась скорости света в вакууме. Пользуясь связью между показателем преломления, частотой и групповой скоростью, несложно, разбив ионосферу на слои конечной толщины, записать систему алгебраических уравнений, позволяющих пересчитать кажущуюся высоту в геометрическую высоту $z(\nu)$ [2]. Зависимости $z(\nu)$ и $N_e(\nu)$ определяют вертикальный профиль электронной концентрации $N_e(\nu)$ в параметрической форме.

Ионозонд позволяет определить лишь нижнюю часть профиля электронной концентрации до главного максимума. Если у профиля имеются локальные максимумы, то часть профиля над каждым таким максимумом, где электронная концентрация ниже максимума, также не будет восстановлена. Чтобы восстановить верхнюю часть профиля электронной концентрации, этот же принцип, начиная с 1960-х годов, применяется для зондирования ионосферы сверху, при помощи ионозондов, установленных на искусственных спутниках [2].

**Фазовая и групповая скорости электромагнитных волн**

Показатель преломления ионосферы $n = \sqrt{\varepsilon}$ является величиной либо чисто мнимой (в этом случае распространение волн невозможно), либо лежит в пределах $0 \le n < 1$. Фазовая скорость в такой среде оказывается больше скорости света. Это не противоречит теории относительности, поскольку фазовые фронты монохроматической волны не являются материальными телами и не могут переносить информацию. Для передачи информации несущую монохроматическую волну необходимо промодулировать. При амплитудной модуляции спектр передаваемого высокочастотного сигнала имеет ширину, равную удвоенной ширине спектра модулирующего низкочастотного сигнала. Рассмотрим суперпозицию двух волн с близкими частотами и волновыми

числами $\omega_1 = ck_1 \approx \omega_2 = ck_2 \approx \omega = ck$, а значения показателя преломления на этих частотах равны $n(\omega_1) \approx n(\omega_2) \approx n(\omega)$:

$$\begin{aligned}&\exp\left(ik_1 n(\omega_1) z - i\omega_1 t\right) + \exp\left(ik_2 n(\omega_2) z - i\omega_2 t\right) = \\ &= \exp\left(i\frac{\omega_1 n(\omega_1) + \omega_2 n(\omega_2)}{2c} z - i\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \times \\ &\times \cos\left(\frac{\omega_1 n(\omega_1) - \omega_2 n(\omega_2)}{2c} z - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right).\end{aligned} \tag{2.4.12}$$

В этом выражении первый множитель описывает несущую, фазовая скорость которой равна

$$c_{\text{фаз}} = \frac{c(\omega_1 + \omega_2)}{\omega_1 n(\omega_1) + \omega_2 n(\omega_2)} = \frac{c}{n(\omega)}. \tag{2.4.13}$$

Второй множитель представляет собой огибающую, которая распространяется со скоростью

$$c_{\text{групп}} = \frac{c(\omega_1 - \omega_2)}{\omega_1 n(\omega_1) - \omega_2 n(\omega_2)} = c\left(\frac{d(\omega n)}{d\omega}\right)^{-1} = c\left(\frac{d(\nu n)}{d\nu}\right)^{-1}. \tag{2.4.14}$$

Эта скорость называется групповой, она равна скорости распространения пакетов волн, которые могут переносить информацию, и она никогда не превышает скорости света. В частности, для ионосферы

$$n = \sqrt{1 - C_{\text{iono}} \frac{N_e}{\nu^2}}, \tag{2.4.15}$$

поэтому групповая скорость равна

$$\begin{aligned}c_{\text{групп}} &= c\left(n + \nu\frac{dn}{d\nu}\right)^{-1} = c\left(n + \frac{C_{\text{iono}} N_e}{n\nu^2}\right)^{-1} = c\left(n + \frac{C_{\text{iono}} N_e}{n\nu^2}\right)^{-1} = \\ &= c\left(n + \frac{1 - n^2}{n}\right)^{-1} = cn < c.\end{aligned} \tag{2.4.16}$$

В недиспергирующей среде $dn / d\omega = 0$, поэтому фазовая и групповая скорости совпадают.

**Анизотропия рефракционных свойств плазмы в магнитном поле**

До сих пор мы рассматривали показатель преломления свободной плазмы. Однако ионосфера находится в магнитном поле Земли. Магнитное поле задает выделенное направление в пространстве, поэтому рефракционные свойства ионосферы с учетом магнитного поля зависят от направления распространения и поляризации падающей электромагнитной волны. Для описания распространения электромагнитных волн в плазме в присутствии внешнего магнитного поля и с учетом столкновений введем три параметра: гирочастоту, плазменную частоту и частоту столкновений [1, 2].

Гирочастота характеризует траекторию заряженной частицы в магнитном поле. На электрон, движущийся со скоростью **v** в магнитном поле Земли с индукцией $\mathbf{B}_E$, действует сила Лоренца:

$$\mathbf{F} = -e[\mathbf{v}, \mathbf{B}_E]. \tag{2.4.17}$$

Эта сила всегда перпендикулярна магнитному полю, поэтому она не меняет компоненту скорости $v_\parallel$, направленную вдоль магнитного поля. Сила также всегда перпендикулярна проекции вектора скорости $\mathbf{v}_\perp$ на плоскость, перпендикулярную магнитному полю. Поэтому заряженная частица в магнитном поле движется по спирали, ось которой направлена вдоль силовых линий магнитного поля. Для нахождения радиуса спирали $R_e$ рассмотрим силу Лоренца как центростремительную:

$$F = m_e \frac{v_\perp^2}{R_e} = e v_\perp B_E, \tag{2.4.18}$$

откуда получаем выражение для радиуса и угловой скорости движения по спирали:

$$\begin{aligned} R_e &= \frac{m_e v_\perp}{e B_E}, \\ \Omega_e &= \frac{v_\perp}{R_e} = \frac{e B_E}{m_e}. \end{aligned} \tag{2.4.19}$$

Эти величины называют гирорадиусом и гирочастотой, или ларморовским радиусом и ларморовской частотой. Гирочастота для электрона в магнитном поле Земли с характерной индукцией $5\times10^{-5}$ Тл составляет около 8.8 МГц.

Плазменная частота характеризует собственные колебания плазмы. Рассмотрим плоский слой плазмы с электронной концентрацией $N_e$. Предположим, что произошло разделение зарядов и все электроны сместились на малое расстояние $x$ перпендикулярно плоскости слоя. На внешних границах слоя возникнет поверхностный заряд

$$\sigma = x N_e e, \tag{2.4.20}$$

а внутри слоя возникнет электрическое поле

$$\mathcal{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \tag{2.4.21}$$

Это поле стремится вернуть заряды слоя в исходное положение. Для смещения электронов запишем уравнение

$$m_e \ddot{x} = -\mathcal{E} e = -\frac{N_e e^2}{\varepsilon_0} x. \tag{2.4.22}$$

Это уравнение описывает гармонические колебания с плазменной, или ленгмюровской, частотой:

$$\omega_e = \sqrt{\frac{N_e e^2}{\varepsilon_0 m_e}}. \tag{2.4.23}$$

Для слоя F2 с электронной концентрацией $N_e = 10^{12}$ м$^{-3}$ она составляет около 56 МГц.

Частота столкновений $\nu_e$ определяет сопротивление среды, испытываемое электроном при движении. Будем считать, что электрон, двигаясь со скоростью $\mathbf{v}$, при каждом столкновении полностью теряет свой импульс. Средняя эффективная сила трения будет равна потерям импульса в единицу времени $-\nu_e m_e \mathbf{v}$. Величина $\nu_e$ является суммой частот электрон-ионных столкновений $\nu_{ei}$ и столкновений с нейтральными частицами $\nu_{en}$.

Установим закон Ома в плазме для статических полей. Здесь и далее мы пренебрегаем вкладом ионов в проводимость и диэлектрическую проницаемость. Вклад ионов становится важным на очень низких частотах, которые мы исключим из рассмотрения. Запишем стационарное уравнение движения электрона:

$$\nu_e m_e \mathbf{v} = -e\mathbf{E} - e\left[\mathbf{v}, \mathbf{B}_E\right], \tag{2.4.24}$$

Отсюда получаем уравнение для плотности тока $\mathbf{j} = -eN_e \mathbf{v}$:

$$\frac{e}{m_e}\left[\mathbf{j}, \mathbf{B}_E\right] + \nu_e \mathbf{j} = \frac{N_e e^2}{m_e}\mathbf{E}. \tag{2.4.25}$$

Перепишем это уравнение, пользуясь гирочастотой и плазменной частотой:

$$\Omega_e\left[\mathbf{j}, \mathbf{b}\right] + \nu_e \mathbf{j} = \omega_e^2 \varepsilon_0 \mathbf{E}, \tag{2.4.26}$$

где $\mathbf{b}$ – единичный вектор в направлении магнитного поля. Эта система линейных уравнений относительно трех компонент вектора $\mathbf{j}$ имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} \nu_e & \Omega_e b_3 & -\Omega_e b_2 \\ -\Omega_e b_3 & \nu_e & \Omega_e b_1 \\ \Omega_e b_2 & -\Omega_e b_1 & \nu_e \end{pmatrix}, \tag{2.4.27}$$

обратная матрица, умноженная на $\omega_e^2 \varepsilon_0$, равна

$$\hat{\sigma}_0 = \frac{\omega_e^2 \varepsilon_0}{\nu_e\left(\nu_e^2 + \Omega_e^2\right)} \begin{pmatrix} \nu_e^2 + \Omega_e^2 b_1^2 & \Omega_e^2 b_1 b_2 - \nu_e \Omega_e b_3 & \Omega_e^2 b_1 b_3 + \nu_e \Omega_e b_2 \\ \Omega_e^2 b_1 b_2 + \nu_e \Omega_e b_3 & \nu_e^2 + \Omega_e^2 b_2^2 & \Omega_e^2 b_2 b_3 - \nu_e \Omega_e b_1 \\ \Omega_e^2 b_1 b_3 - \nu_e \Omega_e b_2 & \Omega_e^2 b_2 b_3 + \nu_e \Omega_e b_1 & \nu_e^2 + \Omega_e^2 b_3^2 \end{pmatrix}. \tag{2.4.28}$$

Она равна сумме трех матриц: диагональной, симметричной и антисимметричной. Это приводит к следующему выражению для тока:

$$\mathbf{j} = \hat{\sigma}_0 \mathbf{E} = \frac{\omega_e^2 \varepsilon_0}{\nu_e\left(\nu_e^2 + \Omega_e^2\right)}\left(\nu_e^2 \mathbf{E} + \Omega_e^2 \mathbf{b}\left(\mathbf{E}, \mathbf{b}\right) - \nu_e \Omega_e \left[\mathbf{E}, \mathbf{b}\right]\right). \tag{2.4.29}$$

Величина $\hat{\sigma}_0$ является статическим тензором проводимости анизотропной среды. Тензорный характер проводимости проявляется в том, что, хотя ток линейно связан с вызывающим его электрическим полем, их направления, вообще говоря, не совпадают. Пользуясь тождеством

$$\mathbf{E} = \mathbf{b}\left(\mathbf{E}, \mathbf{b}\right) + \left[\mathbf{b}, \left[\mathbf{E}, \mathbf{b}\right]\right], \tag{2.4.30}$$

разложим ток по трем ортогональным направлениям:

$$\mathbf{j} = \frac{\omega_e^2 \varepsilon_0}{\nu_e}\mathbf{b}(\mathbf{E},\mathbf{b}) + \frac{\omega_e^2 \varepsilon_0 \nu_e}{\left(\nu_e^2 + \Omega_e^2\right)}\left[\mathbf{b},\left[\mathbf{E},\mathbf{b}\right]\right] - \frac{\omega_e^2 \varepsilon_0 \Omega_e}{\left(\nu_e^2 + \Omega_e^2\right)}\left[\mathbf{E},\mathbf{b}\right] = \tag{2.4.31}$$

$$= \sigma_0 \mathbf{b}(\mathbf{E},\mathbf{b}) + \sigma_\Pi\left[\mathbf{b},\left[\mathbf{E},\mathbf{b}\right]\right] - \sigma_X\left[\mathbf{E},\mathbf{b}\right],$$

где $\sigma_0$ – продольная проводимость (вдоль магнитного поля), $\sigma_\Pi$ – проводимость Педерсена (вдоль компоненты электрического поля, перпендикулярной магнитному полю), $\sigma_X$ – проводимость Холла (в направлении, перпендикулярном электрическому и магнитному полю). В отсутствие магнитного поля ($\Omega_e = 0$) среда становится изотропной, в этом случае проводимость является скаляром

$$\sigma_0 = \frac{\omega_e^2 \varepsilon_0}{\nu_e}. \tag{2.4.32}$$

Рассмотрим теперь гармоническое электрическое поле падающей волны с временной зависимостью $\exp(-i\omega t)$ и комплексной амплитудой $\mathbf{E}$. В нестационарном уравнении движения электрона в левой части появится член с ускорением $m_e\dot{\mathbf{v}}$, равный $-i\omega m_e \mathbf{v}$. Поэтому уравнение (2.4.24) примет вид

$$\left(\nu_e - i\omega\right) m_e \mathbf{v} = -e\mathbf{E} - e\left[\mathbf{v},\mathbf{B}_E\right]. \tag{2.4.33}$$

Здесь под магнитным полем $\mathbf{B}_E$ понимается магнитное поле Земли. Магнитным полем падающей волны мы пренебрегаем. Таким образом, в уравнении для плотности тока (2.4.25) и в конечной формуле для проводимости (2.4.28) достаточно заменить $\nu_e$ на $(\nu_e - i\omega)$. Это приводит к комплексной тензорной проводимости плазмы $\hat{\sigma}(\omega)$. Для упрощения выражения для $\hat{\sigma}(\omega)$ выберем систему координат с осью $z$, направленной вдоль магнитного поля, так что $\mathbf{b} = (0,0,1)$. Введем комплексную частоту $\omega' = i(\nu_e - i\omega) = \omega + i\nu_e$, $\nu_e - i\omega = -i\omega'$. Тогда

$$\hat{\sigma}(\omega) = \frac{\omega_e^2 \varepsilon_0}{\Omega_e^2 - \omega'^2}\begin{pmatrix} -i\omega' & -\Omega_e & 0 \\ \Omega_e & -i\omega' & 0 \\ 0 & 0 & i\dfrac{\Omega_e^2 - \omega'^2}{\omega'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & 0 \\ -\sigma_2 & \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{pmatrix}, \tag{2.4.34}$$

где

$$\sigma_0 = i\frac{\omega_e^2 \varepsilon_0}{\omega'}, \quad \sigma_1 = i\frac{\omega'\omega_e^2 \varepsilon_0}{\omega'^2 - \Omega_e^2}, \quad \sigma_2 = \frac{\Omega_e \omega_e^2 \varepsilon_0}{\omega'^2 - \Omega_e^2}. \tag{2.4.35}$$

Для анизотропной среды введем тензор диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon}$. 4-е уравнение Максвелла для гармонического поля имеет вид

$$c^2 \operatorname{rot}\mathbf{B} = -i\omega\hat{\varepsilon}\mathbf{E}. \tag{2.4.36}$$

С другой стороны, то же уравнение для системы токов в вакууме имеет вид

$$c^2 \operatorname{rot}\mathbf{B} = -i\omega\mathbf{E} + \frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0} = -i\omega\mathbf{E} + \frac{1}{\varepsilon_0}\hat{\sigma}\mathbf{E} = -i\omega\left(1 + \frac{i}{\varepsilon_0\omega}\hat{\sigma}\right)\mathbf{E}. \qquad (2.4.37)$$

Этим установлена связь между тензорами комплексной проводимости и диэлектрической проницаемости:

$$\hat{\varepsilon} = 1 + \frac{i}{\varepsilon_0\omega}\hat{\sigma}. \qquad (2.4.38)$$

Подставляя сюда выражение (2.4.34), запишем выражение для тензора диэлектрической проницаемости плазмы [2]:

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon & ig & 0 \\ -ig & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{pmatrix}. \qquad (2.4.39)$$

где

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega'\omega_e^2}{\omega\left(\omega'^2 - \Omega_e^2\right)}, \quad g = \frac{\Omega_e\omega_e^2}{\omega\left(\omega'^2 - \Omega_e^2\right)}, \quad \eta = 1 - \frac{\omega_e^2}{\omega\omega'}. \qquad (2.4.40)$$

Даже если пренебречь столкновениями, положив $\omega' = \omega$, тензор диэлектрической проницаемости плазмы не будет действительным, в нем будут присутствовать мнимые недиагональные члены $\pm ig$, описывающие обмен энергией между полем и внутренними колебаниями в плазме. В отсутствие внешнего магнитного поля и столкновений тензор (2.4.39) становится диагональным и $\eta = \varepsilon = 1 + \chi$ в соответствии с (2.4.1).

Рассмотрим систему координат с осью $z' = x'_3$, повернутой на угол $\theta$ относительно магнитного поля против часовой стрелки в плоскости $(y, z) = (x_2, x_3)$. Вектор координат и тензор диэлектрической проницаемости преобразуются следующим образом:

$$\mathbf{r}' = \hat{A}\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\mathbf{r}, \quad \hat{\varepsilon}' = \hat{A}\hat{\varepsilon}\hat{A}^T, \qquad (2.4.41)$$

что приводит к выражению

$$\hat{\varepsilon}' = \begin{pmatrix} \varepsilon & ig\cos\theta & -ig\sin\theta \\ -ig\cos\theta & \varepsilon\cos^2\theta + \eta\sin^2\theta & (\eta - \varepsilon)\cos\theta\sin\theta \\ ig\sin\theta & (\eta - \varepsilon)\sin\theta\cos\theta & \varepsilon\sin^2\theta + \eta\cos^2\theta \end{pmatrix}. \qquad (2.4.42)$$

**Распространение плоских волн в анизотропной среде**

Рассмотрим распространение электромагнитных волн в анизотропной среде [1, 10]. В такой среде нельзя определить скалярный показатель преломления, поскольку ее рефракционные свойства зависят и от направления распространения, и от поляризации волны. Поляризация волны при ее распространении, вообще говоря, меняется. Тем не менее существуют характеристиче-

ские волны с постоянной поляризацией, для каждой из которых можно определить свой показатель преломления. Запишем уравнения для характеристических волн. Запишем эти волны в виде

$$\mathbf{E}\exp\left(i\omega\left(\frac{n}{c}(\mathbf{r},\mathbf{s})-t\right)\right),\quad \mathbf{B}\exp\left(i\omega\left(\frac{n}{c}(\mathbf{r},\mathbf{s})-t\right)\right). \tag{2.4.43}$$

Подставляя эти выражения в уравнения Максвелла с учетом (2.3.84), получим

$$\begin{aligned} i\omega nc\left[\mathbf{s},\mathbf{B}\right] &= -i\omega\hat{\varepsilon}\mathbf{E}, \\ i\omega\frac{n}{c}\left[\mathbf{s},\mathbf{E}\right] &= i\omega\mathbf{B}. \end{aligned} \tag{2.4.44}$$

Отсюда следует дисперсионное уравнение

$$\hat{\varepsilon}\mathbf{E} = -n^2\left[\mathbf{s},\left[\mathbf{s},\mathbf{E}\right]\right] = n^2\left(\mathbf{E}-\mathbf{s}\left(\mathbf{s},\mathbf{E}\right)\right) = n^2\mathbf{E}_\perp. \tag{2.4.45}$$

или

$$\hat{\varepsilon}\mathbf{E} - n^2\left(\mathbf{E}-\mathbf{s}\left(\mathbf{s},\mathbf{E}\right)\right) = 0. \tag{2.4.46}$$

Это уравнение определяет как показатель преломления, так и поляризацию волны. Для изотропной среды из него следует, что волна является поперечной $\mathbf{E} = \mathbf{E}_\perp$ и $\varepsilon = n^2$. В анизотропной среде поперечность поля до некоторой степени сохраняется, т.к. и вектор магнитной индукции, и вектор $\hat{\varepsilon}\mathbf{E}$ перпендикулярны направлению распространения **s**. Поскольку векторы **s**, **E** и $\hat{\varepsilon}\mathbf{E}$ перпендикулярны **B**, они лежат в одной плоскости.

Направим ось *z* вдоль направления распространения волны, так что **s** = (0, 0, 1), и запишем дисперсионное уравнение в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon-n^2 & ig\cos\theta & -ig\sin\theta \\ -ig\cos\theta & \varepsilon\cos^2\theta+\eta\sin^2\theta-n^2 & (\eta-\varepsilon)\cos\theta\sin\theta \\ ig\sin\theta & (\eta-\varepsilon)\sin\theta\cos\theta & \varepsilon\sin^2\theta+\eta\cos^2\theta \end{pmatrix}\mathbf{E} = 0. \tag{2.4.47}$$

Условием его разрешимости является равенство нулю детерминанта матрицы, что приводит к квадратному уравнению относительно $n^2$, решение которого имеет вид:

$$n^2 = \frac{2\varepsilon\eta+\left(\varepsilon^2-g^2-\varepsilon\eta\right)\sin^2\theta \pm \left(4\eta^2g^2\cos^2\theta+\left(\varepsilon^2-g^2-\varepsilon\eta\right)^2\sin^4\theta\right)^{1/2}}{2\varepsilon\sin^2\theta+2\eta\cos^2\theta}. \tag{2.4.48}$$

Рассмотрим частный случай волны, распространяющейся вдоль магнитного поля: $\theta = 0$. В этом случае

$$n^2 = \varepsilon \pm g. \tag{2.4.49}$$

Поляризация волны определяется соотношением

$$R = \frac{E_x}{E_y}. \tag{2.4.50}$$

Из первого уравнения системы (2.4.47) находим

$$\frac{E_x}{E_y} = -\frac{ig}{\varepsilon - n^2} = \pm i. \tag{2.4.51}$$

Это соответствует сдвигу фаз между компонентами $E_x$ и $E_y$, составляющему $\pm\pi/2$ радиан. Поэтому характеристические волны имеют круговую поляризацию, которая, в зависимости от знака сдвига фаз, будет правой или левой. Левая волна называется также обыкновенной, а правая называется необыкновенной. Обыкновенная волна определяется условием обращения $n^2$ в 0 при $\eta = 0$, соответствующим выбору отрицательного знака в (2.4.48). В этом случае, в соответствии с (2.4.40), $n^2$ обращается в 0 на плазменной частоте, как в отсутствие магнитного поля, если пренебречь столкновениями.

Показатели преломления для двух характеристических волн с правой или левой поляризацией имеют следующий вид:

$$n_R^2 = 1 - \frac{\omega_e^2}{\omega(\omega' - \Omega_e)}, \quad n_L^2 = 1 - \frac{\omega_e^2}{\omega(\omega' + \Omega_e)}. \tag{2.4.52}$$

Для волны, перпендикулярной магнитному полю $\theta = \pi/2$:

$$n_o^2 = \eta, \quad n_x^2 = \frac{\varepsilon^2 - g^2}{\varepsilon}. \tag{2.4.53}$$

Первая волна с квадратом показателя преломления $n_o^2$, не зависящим от магнитного поля, является обыкновенной, а вторая необыкновенной. Из дисперсионного уравнения (2.4.47) следует, что у обыкновенной волны отлична от нуля только $E_y$ компонента. Она обладает линейной поляризацией, и вектор **E** направлен вдоль магнитного поля. У необыкновенной компоненты, напротив, $E_y = 0$, а между $E_x$ и $E_z$ имеется соотношение

$$\frac{E_x}{E_z} = i\frac{\varepsilon}{g}, \tag{2.4.54}$$

что соответствует эллиптической поляризации в плоскости, перпендикулярной магнитному полю.

В теории распространения радиоволн в ионосфере [1] часто используются следующие обозначения:

$$X = \frac{\omega_e^2}{\omega^2}, \quad \mathbf{Y} = \frac{\Omega_e}{\omega}\mathbf{b}, \quad Z = \frac{\nu_e}{\omega}. \tag{2.4.55}$$

В этих обозначениях уравнение для плотности тока

$$\omega_H [\mathbf{j}, \mathbf{b}] + (\nu_e - i\omega)\mathbf{j} = \omega_e^2 \varepsilon_0 \mathbf{E}, \tag{2.4.56}$$

принимает следующий вид:

$$i[\mathbf{j}, \mathbf{Y}] + (1 + iZ)\mathbf{j} = i\varepsilon_0 \omega X \mathbf{E}. \tag{2.4.57}$$

Кроме того, имеется соотношение (2.4.46), следующее из уравнений Максвелла, которое можно переписать как

$$\mathbf{E} - n^2 \mathbf{E}_\perp + \frac{i}{\varepsilon_0 \omega}\mathbf{j} = 0. \tag{2.4.58}$$

В системе координат, где ось $z$ направлена вдоль распространения волны, а ось $y$ выбрана вдоль проекции внешнего магнитного поля на плоскость волнового фронта, из уравнения (2.4.58) следует

$$n^2 = 1 + \frac{i}{\varepsilon_0 \omega} \frac{j_x}{E_x} = 1 + \frac{i}{\varepsilon_0 \omega} \frac{j_y}{E_y} \tag{2.4.59}$$

и

$$j_z = i\varepsilon_0 \omega E_z. \tag{2.4.60}$$

Отсюда вытекает соотношение для поляризации

$$R = \frac{E_x}{E_y} = \frac{j_x}{j_y}. \tag{2.4.61}$$

Запишем уравнение (2.4.58) для компоненты $E_z$ и учтем (2.4.60):

$$ij_x Y_y + (1 + iZ) j_z = i\varepsilon_0 \omega X E_z = X j_z. \tag{2.4.62}$$

Отсюда следует

$$j_z = i \frac{j_x Y_y}{X - 1 - iZ}. \tag{2.4.63}$$

Запишем уравнение (2.4.58) для компонент $x$, $y$:

$$\begin{aligned} &i\left(j_y Y_z - j_z Y_y\right) + (1 + iZ) j_x = i\varepsilon_0 \omega X E_x, \\ &-ij_x Y_z + (1 + iZ) j_y = i\varepsilon_0 \omega X E_y, \end{aligned} \tag{2.4.64}$$

и исключим из него $j_z$, пользуясь (2.4.63):

$$ij_y Y_z + \left(1 + iZ + \frac{Y_y^2}{X - 1 - iZ}\right) j_x = i\varepsilon_0 \omega X E_x. \tag{2.4.65}$$

Воспользуемся тем, что $E_x = RE_y$ и $j_x = Rj_y$, и объединим уравнения (2.4.64):

$$iY_z + \left(1 + iZ + \frac{Y_y^2}{X - 1 - iZ}\right) R = R\left(-iRY_z + (1 + iZ)\right), \tag{2.4.66}$$

что приводит к квадратному уравнению для $R$:

$$R^2 + i \frac{Y_y^2}{Y_z (1 + iZ - X)} R + 1 = 0. \tag{2.4.67}$$

Из второго уравнения (2.4.64) и (2.4.59) следует соотношение между $n^2$ и $R$:

$$n^2 = 1 - \frac{X}{1 + iZ - iY_z R}. \tag{2.4.68}$$

Решениями уравнения (2.4.67) являются

$$R_{o,x} = -i\frac{Y_y^2}{2Y_z\left(1+iZ-X\right)} \pm i\sqrt{\frac{Y_y^4}{4Y_z^2\left(1+iZ-X\right)^2}+1}, \qquad (2.4.69)$$

где верхний знак соответствует обыкновенной волне с левой круговой поляризацией, а нижний – необыкновенной волне с правой круговой поляризацией. Произведение корней уравнения (2.4.67) равно свободному члену:

$$R_o R_x = 1. \qquad (2.4.70)$$

Поэтому обыкновенная и необыкновенная волны либо имеют правую и левую круговую поляризацию, либо обе поляризованы линейно. Линейная поляризация имеет место, вообще говоря, лишь в плоскости, перпендикулярной направлению распространения, как мы видели выше при рассмотрении необыкновенной волны, перпендикулярной магнитному полю.

Подстановка (2.4.69) в (2.4.68) приводит к формуле Эпплтона–Хартри. Выпишем эту формулу в квазипродольном приближении для $Y_z \gg Y_y$:

$$n_{o,x}^2 = 1 - \frac{X}{1+iZ \pm Y_z} \qquad (2.4.71)$$

и квазипоперечном приближении $Y_z \ll Y_y$:

$$n_o^2 = 1 - \frac{X}{1+iZ}, \quad n_x^2 = 1 - X\left(1+iZ-\frac{Y_y^2}{1+iZ-X}\right)^{-1}. \qquad (2.4.72)$$

Без изменения поляризации в ионосфере распространяются лишь характеристические волны. Любую линейно поляризованную волну можно представить в виде линейной комбинации характеристических волн. Поскольку показатели преломления для них различны, разность фаз между ними будет меняться вдоль трассы распространения. Это будет приводить к повороту плоскости поляризации на угол, равный половине изменения разности фаз, которая на трассе длиной $s$ равна

$$\Delta\varphi = \frac{\omega}{2c}\mathrm{Re}\left(n_o - n_x\right)s. \qquad (2.4.73)$$

Этот эффект называется эффектом Фарадея. При малой частоте соударений ($Z$ мало) и высокой частоте $\omega \gg \Omega_e$, когда показатель преломления близок к 1 и $Y_z^2$ мало, формула для поворота плоскости поляризации в квазипродольном приближении имеет вид

$$\Delta\psi = \int \frac{\omega}{2c} Y_z X\, ds = \frac{e^3}{2cm_e^2\omega^2\varepsilon_0}\int B\cos\theta N_e\, ds. \qquad (2.4.74)$$

Эта формула позволяет по измерениям эффекта Фарадея определять интегральное содержание электронов в трубке единичного сечения вдоль радиолуча [11].

**Перенос энергии электромагнитными волнами в анизотропной среде**

В заключение рассмотрим вопрос переноса энергии электромагнитными волнами в анизотропной среде. Приведенный выше вывод выражения для

энергии (2.2.45) с небольшими изменениями переносится на анизотропную среду. Для комплексных амплитуд электрического и магнитного полей **E** и **B**, учитывая тензорный и комплексный характер диэлектрической проницаемости, мы получим выражения плотности и потока энергии:

$$W = W_E + W_B = \frac{\varepsilon_0 \mathbf{E}^* \hat{\varepsilon} \mathbf{E} + \varepsilon_0 c^2 \mathbf{B}^* \mathbf{B}}{4},$$
$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} c^2 \varepsilon_0 \left[ \mathbf{E}, \mathbf{B}^* \right]. \qquad (2.4.75)$$

Тензор $\hat{\varepsilon}$ считается эрмитовым и положительно определенным. При наличии столкновений у тензора $\hat{\varepsilon}$ появится неэрмитова компонента, описывающая диссипацию энергии.

Комплексный характер $\hat{\varepsilon}$ определяет важное отличие ионосферы от других анизотропных сред, таких как кристаллы. В кристаллах тензор $\hat{\varepsilon}$ вещественен и симметричен. Поэтому характеристические волны в кристаллах обладают линейной поляризацией [10].

В анизотропной среде лучевое направление, понимаемое как направление переноса энергии, является, как и в изотропной среде, общей нормалью к векторам **E**, **B**. Однако это направление уже не совпадает с нормалью к волновому фронту **s**, которая является общей нормалью к векторам $\hat{\varepsilon}\mathbf{E}, \mathbf{B}$.

## Литература


1. *Дэвис К.* Радиоволны в ионосфере. М.: Мир, 1973. 503 с.
2. *Брюнелли Б.Е., Намгаладзе А.А.* Физика ионосферы. М.: Наука, 1988. 528 с.
3. *Chapman S.* The absorption and dissociative or ionizing effect of monochromatic radiation in an atmosphere on a rotating Earth // Proc. Phys. Soc. 1931. V. 43. P. 26.
4. *Bilitza D.* International reference ionosphere 2000 // Radio Science. 2001. V. 36, № 2. P. 261–275.
5. *Bilitza D.* International reference ionosphere 2000: Examples of improvements and new features // Adv. Space Res. 2003. V. 31, № 3. P. 757–767.
6. *Bilitza D., Reinisch B.* International reference ionosphere 2007: Improvements and new parameters // J. Adv. Space Res. 2008. V. 42, № 4. P. 599–609. doi:10.1016/j.asr.2007.07.048
7. *Воробьев В.В., Кан В.* Фоновые флуктуации при радиопросвечивании ионосферы в эксперименте GPS–Microlab-1 // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 1999. Т. XLII, № 6. С. 511–523.
8. *Воробьев В.В., Красильникова Т. Г.* Оценка точности восстановления атмосферного показателя преломления по измерениям доплеровского сдвига частоты на частотах, используемых в системе NAVSTAR // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1993. Т. 29, № 5. С. 626–632.
9. *Гинзбург В.Л.* Теория распространения радиоволн в ионосфере // УФН. 1946. Т. 28, вып. 2–3.
10. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. 2-е изд. М.: Наука, 1973. 720 с.
11. *Альперт Я.Л.* Распространение электромагнитных волн и ионосфера. М.: Наука, 1972. 564 с.

# 3. Распространение радиоволн

## 3.1. Волновое уравнение в неоднородной среде

**Исходное уравнение**

Выше мы уже получили волновое уравнение в неоднородной изотропной среде (2.2.38), которое в силу (2.2.39) имеет вид [1]

$$\Delta\boldsymbol{\mathcal{E}} - \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{\mathcal{E}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 n^2\boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial t^2} = 0 \tag{3.1.1}$$

Здесь и далее мы будем пользоваться исключительно показателем преломления $n$. В силу первого из уравнений Максвелла (2.2.36) в электрически нейтральной среде

$$\operatorname{div}\left(n^2\boldsymbol{\mathcal{E}}\right) = n^2\operatorname{div}\boldsymbol{\mathcal{E}} + \boldsymbol{\mathcal{E}}\operatorname{grad}n^2 = 0, \tag{3.1.2}$$

откуда следует

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\mathcal{E}} = -\boldsymbol{\mathcal{E}}\operatorname{grad}\ln n^2. \tag{3.1.3}$$

Это приводит к волновому уравнению:

$$\Delta\boldsymbol{\mathcal{E}} + \operatorname{grad}\left(\boldsymbol{\mathcal{E}}\operatorname{grad}\ln n^2\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 n^2\boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial t^2} = 0. \tag{3.1.4}$$

Нас интересуют квазимонохроматические сигналы, которые можно записать в форме

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}(\mathbf{r},t)\exp(-i\omega t), \tag{3.1.5}$$

где временная зависимость комплексной амплитуды поля $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ учитывает медленные по сравнению с периодом колебаний вариации амплитуды и фазы. В дальнейшем мы будем рассматривать комплексные амплитуды. Показатель преломления атмосферы также является функцией и пространственных, и временных координат $n(\mathbf{r}, t)$. Перепишем уравнение (3.1.4) для комплексной амплитуды. Два первых члена, содержащие лишь производные по пространственным переменным, умножаются на $\exp(-i\omega t)$, а третий член равен

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(n^2\mathbf{E}\exp(-i\omega t)\right) = \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 n^2\mathbf{E}}{\partial t^2} - \frac{2ik}{c}\frac{\partial n^2\mathbf{E}}{\partial t} - k^2n^2\mathbf{E}\right)\exp(-i\omega t). \tag{3.1.6}$$

Подставляя это выражение в уравнение (3.1.4) и сокращая $\exp(-i\omega t)$, получим точное уравнение для комплексной амплитуды поля в неоднородной среде:

$$\Delta\mathbf{E} + k^2n^2\mathbf{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 n^2\mathbf{E}}{\partial t^2} - \operatorname{grad}\left(\mathbf{E}\operatorname{grad}\ln n^2\right) - \frac{2ik}{c}\frac{\partial n^2\mathbf{E}}{\partial t}. \tag{3.1.7}$$

Если рассматривать стационарную задачу, то временные производные в правой части можно считать равными нулю. Однако задачу лимбового зон-

дирования атмосферы радиосигналами можно считать стационарной лишь приближенно. Лимбовое зондирование основано на приеме радиосигналов системы GPS, прошедших через атмосферу по касательной трассе космос – атмосфера – космос. Прием осуществляется на низкоорбитальном спутнике, который в процессе эксперимента движется таким образом, что принимаемый радиолуч погружается в атмосферу. Скорость низкоорбитальных спутников составляет около 8 км/с, а вертикальная скорость погружения луча в атмосферу – около 2–4 км/с при слабой рефракции. Каждый эксперимент длится около 1 минуты. За это время крупномасштабные неоднородности в атмосфере меняются пренебрежимо мало. Однако на распространение волн и на флуктуации принимаемых сигналов существенное влияние оказывает атмосферная турбулентность.

**Оценки масштабов физических лучей**

Для оценок введем следующие параметры: $\lambda$ – длина волны, $N_0$ – характерная величина индекса рефракции в нижней тропосфере, $H$ – характерный вертикальный масштаб убывания атмосферного индекса рефракции.

Вертикальный профиль показателя преломления оценим для сухой изотермической атмосферы из уравнения гидростатики (2.3.12), пренебрегая высотной зависимостью ускорения свободного падения:

$$d \ln P = -\frac{g_0}{R_d T} dz. \tag{3.1.8}$$

Отсюда получаем высотный профиль давления и показателя преломления:

$$\begin{aligned} P(z) &= P_0 \exp\left( -\frac{g_0}{R_d T} z \right), \\ N(z) &= C_1 \frac{P(z)}{T} = C_1 \frac{P_0}{T} \exp\left( -\frac{g_0}{R_d T} z \right) = N_0 \exp\left( -\frac{z}{H} \right). \end{aligned} \tag{3.1.9}$$

Обозначим $N_0 = C_1 \dfrac{P_0}{T}$ – характерное значение индекса рефракции на поверхности и $H = \dfrac{R_d T}{g_0}$ – характерный вертикальный масштаб (высота однородной атмосферы). Для $P_0$ = 1000 гПа и $T$ = 273 К получаем $N_0 \approx 284$ ppm и $H \approx 8$ км.

Оценим физический размер луча, который определяется как размер области, влияющей на принимаемую волну при фиксированном положении источника и приемника. Эффекты, связанные с отличием физического луча от идеального бесконечного тонкого луча, называются дифракцией. Рассмотрим геометрию задачи зондирования атмосферы, изображенную на рис. 4.

Будем считать, что лучи в атмосфере близки к прямым (приближение слабой рефракции). Вычислим атмосферную добавку $\Psi$ оптического пути вдоль прямого луча с прицельной высотой $p$, отсчитываемой от центра Земли:

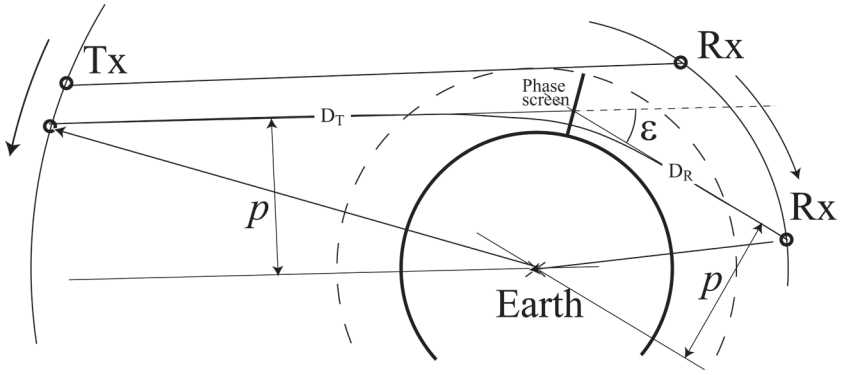



**Рис. 4.** Геометрия задачи радиозатменного зондирования атмосферы. Передатчик (Tx) и приемник (Rx) движутся так, что соединяющий их радиолуч погружается в атмосферу

$$\Psi(p)=\int N\,ds=2\int_0^{\infty}N\left(\sqrt{p^2+s^2}\right)ds=2\int_{R_E}^{\infty}N(r)\frac{ds}{dr}dr=2\int_{R_E}^{\infty}\frac{N(r)\,r\,dr}{\sqrt{r^2-p^2}},\quad(3.1.10)$$

где $r=R_E+z$, $R_E$ – радиус Земли (для оценок берется усредненный радиус 6371 км), $s=\sqrt{r^2-p^2}$ – расстояние от перигея до текущей точки луча. Для прямого луча прицельная высота луча и высота его перигея равны. В дальнейшем, при изучении атмосферной рефракции, эти две величины будут различаться. Оценим этот интеграл следующим образом:

$$\Psi(p)=2\int_p^{\infty}\frac{N_0\exp\left(-\frac{r-R_E}{H}\right)rdr}{\sqrt{r^2-p^2}}\approx N_0\exp\left(-\frac{p-R_E}{H}\right)\sqrt{2p}\int_0^{\infty}\exp\left(-\frac{z'}{H}\right)\frac{dz'}{\sqrt{z'}}=\quad(3.1.11)$$

$$=N_0\exp\left(-\frac{p-R_E}{H}\right)\sqrt{2p}\,2\int_0^{\infty}\exp\left(-\frac{\zeta^2}{H}\right)d\zeta=N_0\exp\left(-\frac{p-R_E}{H}\right)\sqrt{2\pi\,p\,H},$$

где $z'=r-p$ – высота перигея луча над поверхностью Земли, $\zeta=\sqrt{z'}$ – новая переменная интегрирования. Использовано приближение тонкой атмосферы, основанное на том, что $H\ll R_E$ и $\sqrt{r^2-p^2}\approx\sqrt{2p(r-p)}$. Для луча, касающегося поверхности Земли, получаем характерное значение фазовой задержки около 170 м. Величина $\sqrt{2\pi\,p\,H}$ близка к длине луча $L$, заключенной в диапазоне высот между $p$ и $p+H$:

$$L=2\sqrt{(p+H)^2-p^2}\approx 2\sqrt{2pH}.\quad(3.1.12)$$

Эта величина слабо зависит от $p$ внутри атмосферы. Полагая $p=R_E$, получаем оценку характерной длины взаимодействия луча и атмосферы $L=450$ км.

Для оценок эффектов дифракции воспользуемся приближением фазового экрана (phase screen). Приближение фазового экрана состоит в том, что атмо-

сферу мы заменяем тонким слоем среды, перпендикулярным лучам и дающим фазовый набег $\Psi(p)$. В соответствии с принципом Гюйгенса–Френеля каждую точку фазового экрана можно считать вторичным источником, и принимаемое поле можно оценить, как сумму всех вторичных источников, считая их ненаправленными. Пусть источник расположен на расстоянии $D_T$ от фазового экрана, а приемник – на расстоянии $D_R$. Тогда для луча с прицельной высотой $p$ принимаемое поле оценивается следующим интегралом:

$$E = E_0 \int \exp\left(ik\bar{\Psi}\left(p, r, r_\perp\right)\right) dr\, dr_\perp. \tag{3.1.13}$$

где $r, r_\perp$ – вертикальная и горизонтальная координаты в плоскости фазового экрана, $\bar{\Psi}\left(p, r, r_\perp\right)$ – эйконал подынтегрального выражения:

$$\bar{\Psi}\left(p, r, r_\perp\right) = \Psi\left(\sqrt{r^2 + r_\perp^2}\right) + \sqrt{D_T^2 + \left(r - p\right)^2 + r_\perp^2} + \sqrt{D_R^2 + \left(r - p\right)^2 + r_\perp^2}. \tag{3.1.14}$$

Подынтегральное выражение в (3.1.13) является осциллирующим. Основной вклад в интеграл дает окрестность точки стационарной фазы $r^s, r_\perp^s$, где

$$\frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial p'} = 0 \quad , \frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial p_\perp} = 0. \tag{3.1.15}$$

Отсюда следует, что в этой точке $r_\perp^s = 0$, а для $r^s$, полагая

$$D_{T,R} \gg \left|p - r\right|. \tag{3.1.16}$$

имеем уравнение

$$\frac{d}{dr}\left(\Psi\left(r\right) + D_T + \frac{\left(r - p\right)^2}{2D_T} + D_R + \frac{\left(r - p\right)^2}{2D_R}\right) = 0, \tag{3.1.17}$$

которое приводит к условию

$$-\frac{d\Psi\left(r^s\right)}{dr} = \frac{r^s - p}{D_T} + \frac{r^s - p}{D_R} = \frac{r^s - p}{D}, \tag{3.1.18}$$

где $D$ – приведенное расстояние наблюдения, равное

$$D = \frac{D_T D_R}{D_T + D_R}. \tag{3.1.19}$$

Величина в правой части (3.1.18) равна сумме углов $\varepsilon_T(p)$ и $\varepsilon_R(p)$ (рис. 4), т.е. полному углу поворота, или углу рефракции луча $\varepsilon(p)$. Обозначение $\varepsilon$ в дальнейшем будет закреплено исключительно за углом рефракции. Из (3.1.11) угол атмосферной рефракции можно оценить следующим образом:

$$\varepsilon\left(p\right) = \frac{d}{dp}\Psi\left(p\right) = N_0\sqrt{\frac{2\pi p}{H}}\exp\left(-\frac{p - R_E}{H}\right), \tag{3.1.20}$$

откуда получаем оценку угла рефракции для луча, касающегося поверхности Земли:

$$\varepsilon\left(R_E\right) = N_0\sqrt{\frac{2\pi p}{H}} = 0.02. \tag{3.1.21}$$

Эйконал в окрестности точки стационарной фазы является квадратичной функцией координат:

$$\bar{\Psi}\left(p, r, r_\perp\right) = \bar{\Psi}\left(p, r^s, r_\perp^s\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\bar{\Psi}}{\partial r^2}\left(r - r^s\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\bar{\Psi}}{\partial r_\perp^2}\left(r - r_\perp^s\right)^2. \tag{3.1.22}$$

Вторые производные эйконала $\bar{\Psi}$ в точке стационарной фазы равны

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\bar{\Psi}}{\partial r^2} &= \Psi''\left(r^s\right) + \frac{1}{D}, \\ \frac{\partial^2\bar{\Psi}}{\partial r_\perp^2} &= \frac{1}{D}, \end{aligned} \tag{3.1.23}$$

где мы снова воспользовались условием (3.1.16). Характерный размер области, дающей основной вклад в поле, оценивается из условия

$$k\left(\bar{\Psi}\left(p, r, r_\perp\right) - \bar{\Psi}\left(p, r^s, r_\perp^s\right)\right) \le \frac{\pi}{4}. \tag{3.1.24}$$

Эта область называется зоной Френеля [2, 3]. Для регулярной сферически-слоистой среды зона Френеля имеет форму эллипса с вертикальным и горизонтальным размерами, равными

$$\begin{aligned} \Delta r &= \sqrt{\lambda\left(\frac{\partial^2\bar{\Psi}}{\partial r^2}\right)^{-1}} = \sqrt{\frac{\lambda D}{1 + D\Psi''\left(r^s\right)}}, \\ \Delta r_\perp &= \sqrt{\lambda\left(\frac{\partial^2\bar{\Psi}}{\partial r_\perp^2}\right)^{-1}} = \sqrt{\lambda D}, \end{aligned} \tag{3.1.25}$$

где $\lambda$ – длина волны, связанная с волновым вектором соотношением $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.

Лучевая картина, называемая геометрической оптикой, применима для описания распространения волн в среде с характерными масштабами неоднородностей не меньше $\Delta r, \Delta r_\perp$.

Оценим эти масштабы для задачи радиозатменного зондирования атмосферы сигналами системы GPS. Высота орбиты спутников системы GPS около $H_T$ = 20200 км, а низкоорбитальные спутники находятся на высоте около $H_R$ = 720 км. Расстояния от спутников до лимба планеты составляют

$$\begin{aligned} D_T &= \sqrt{\left(R_E + H_T\right)^2 - R_E^2} \approx 25800 \text{ км}, \\ D_R &= \sqrt{\left(R_E + H_R\right)^2 - R_E^2} \approx 3100 \text{ км}. \end{aligned} \tag{3.1.26}$$

Поскольку $D_T \gg D_R$, приведенное расстояние $D$ = 2800 км ≈ $D_R$. Частоты системы GPS составляют $f_1$ = 1575,42 МГц и $f_2$ = 1227,60 МГц, что соответствует

длинам волн $\lambda_{1,\,2} = c\,/\,f_{1,\,2}$, равным 0.190425 м и 0.244379 м. Величины $\sqrt{\lambda_{1,2} D}$ составляют 730 и 820 м, т.е. около 800 м. Оценим величину $1+D\Psi''(r^s)$:

$$D\Psi''\left(r^s\right)+1=1+\frac{DN_0\sqrt{2\pi R_E H}}{H^2}\exp\left(-\frac{z}{H}\right). \tag{3.1.27}$$

Для нашей модели сухой атмосферы эта величина составляет около 8 у поверхности Земли. Корень из этой величины – около 3, таким образом, вертикальный масштаб физического луча будет около 250 м, но с высотой он растет и приближается к 800 м.

Оценим скорость погружения луча в атмосферу $\dot{r}^s$. Дифференцируя уравнение (3.1.18) по времени, получаем

$$-\Psi''\dot{r}^s=\frac{\dot{r}^s-\dot{p}}{D}-\frac{r^s-p}{D^2}\dot{D}, \tag{3.1.28}$$

Будем считать, что $D_T \gg D_R$ и $D \approx D_R$. Пусть принимающий спутник движется со скоростью $V_R$. Тогда $\dot{p}$ и $\dot{D}$ являются двумя перпендикулярными компонентами скорости:

$$\begin{aligned}\dot{p}&=V_R\frac{\sqrt{\left(R_E+H_R\right)^2-p^2}}{R_E+H_R}\approx V_R\frac{D_R}{R_E+H_R},\\ \dot{D}&=V_R\frac{p}{R_E+H_R}.\end{aligned} \tag{3.1.29}$$

Это приводит к соотношению

$$\dot{r}^s\left(1+D_R\frac{d^2\Psi}{dr^2}\right)=\dot{p}+\frac{r^s-p}{D_R}\dot{D}_R. \tag{3.1.30}$$

Поскольку $\dfrac{r^s-p}{D_R}\ll\dfrac{D_R}{p}$, вторым членом здесь можно пренебречь. Это приводит к оценке максимальной скорости погружения луча для вертикальной плоскости орбиты приемного спутника:

$$\dot{r}^s=\frac{\dot{p}}{1+D_R\Psi''}=\frac{1}{1+D_R\Psi''}\frac{V_R D_R}{R_E+H_R}. \tag{3.1.31}$$

В случае если величина $D_R\,\Psi''$ мала, эта скорость составляет около 4 км/с. Практически плоскость орбиты приемного спутника может быть наклонена и эта скорость лежит в пределах 2–4 км/с. В тропосфере за счет роста величины $D_R\,\Psi''$ скорость погружения луча убывает в 8 и более раз. Введем временной масштаб влияния отдельных неоднородностей на луч:

$$\Delta t=\frac{\Delta r}{\dot{r}^s}=\sqrt{\lambda D}\sqrt{1+D_R\Psi''}\frac{R_E+H_R}{V_R D_R}. \tag{3.1.32}$$

Это время для вертикальной скорости луча 2–4 км/с в условиях слабой рефракции составляет примерно 0.2–0.4 с, но оно может возрастать примерно в 3 раза в тропосфере.

**Вывод уравнения Гельмгольца**

Оценим теперь порядки величин членов, входящих в уравнение (3.1.7) [1]. Введем следующие параметры: $l_0$ – характерный масштаб неоднородностей, $N$ – характерная флуктуация индекса рефракции в нижней тропосфере, $v$ – скорость перемещения неоднородностей (скорость ветра).

Рассмотрим атмосферный вклад в член $k^2n^2\mathbf{E}$, равный по порядку величины $2k^2EN \sim \dfrac{EN}{\lambda^2}$. Член $\operatorname{grad}\left(\mathbf{E}\operatorname{grad}\ln n^2\right)$ примерно равен $2\operatorname{grad}\left(\mathbf{E}\operatorname{grad}N\right) \sim \dfrac{EN}{l_0^2}$.

Оценим член $-\dfrac{2ik}{c}\dfrac{\partial n^2\mathbf{E}}{\partial t}$. Введем временной масштаб $\tau \sim \dfrac{l_0}{v}$ переноса неоднородностей ветром. Типичные скорости ветра составляют несколько м/с. Типичные величины $l_0$ составляют миллиметры или сантиметры. Поэтому масштаб $\tau$ не превышает масштаба $\Delta t$ и все временные производные оцениваются с использованием масштаба $\tau$. Тогда производная за счет переноса неоднородностей ветром имеет порядок $\dfrac{1}{\lambda c}\dfrac{ENv}{l_0}$. Производная за счет возникновения доплеровских частот при перемещении неоднородностей оценивается величиной $\dfrac{1}{\lambda c}\dfrac{ENv}{\lambda}$. Поскольку обе эти оценки пропорциональны малой величине $\dfrac{v}{c}$, этот член при любом соотношении $\lambda$ и $l_0$ существенно меньше, чем $k^2\left(n^2-1\right)\mathbf{E}+\operatorname{grad}\left(\mathbf{E}\operatorname{grad}\ln n^2\right)$.

Член $\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 n^2\mathbf{E}}{\partial t^2}$ оценивается аналогичным образом, что приводит к величине $\dfrac{1}{c^2}\dfrac{NEv^2}{l_0^2}+\dfrac{1}{c^2}\dfrac{NEv^2}{\lambda^2}$, и это существенно меньше, чем $k^2\left(n^2-1\right)\mathbf{E}+\operatorname{grad}\left(\mathbf{E}\operatorname{grad}\ln n^2\right)$, что по порядку величины равно $\dfrac{EN}{\lambda^2}+\dfrac{EN}{l_0^2}$, поскольку $v^2 \ll c^2$.

Величину $\ln n^2$ можно с достаточной точностью заменить на $n^2 - 1$. В конечном счете мы приходим к тому, что уравнение (3.1.7) можно упростить:

$$\Delta\mathbf{E}+k^2n^2\mathbf{E}=-\operatorname{grad}\left(\mathbf{E}\operatorname{grad}n^2\right). \qquad (3.1.33)$$

Каждая компонента вектора, стоящего в левой части, зависит только от соответствующей компоненты вектора **E**. Для вектора, стоящего в правой части,

это не так, поэтому правая часть описывает эффекты изменения поляризации при распространении волны. Перепишем это уравнение в следующей форме:

$$\Delta\mathbf{E} + k^2\mathbf{E} = -k^2\left(n^2 - 1\right)\mathbf{E} - \operatorname{grad}\left(\mathbf{E}\operatorname{grad} n^2\right). \qquad (3.1.34)$$

Левая часть этого уравнения представляет собой оператор Гельмгольца. Пользуясь функцией Грина [4], можно записать интегральное уравнение для поля **E**:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\exp\left(ik\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}\left[k^2\left(n^2(\mathbf{r}')-1\right)\mathbf{E}(\mathbf{r}') + \operatorname{grad}\left(\mathbf{E}(\mathbf{r}')\operatorname{grad} n^2(\mathbf{r}')\right)\right]d^3\mathbf{r}'. \qquad (3.1.35)$$

Преобразуем второй член в подынтегральном выражении при помощи теоремы Гаусса:

$$\int_V u\operatorname{grad} v\, dV = \int_{\partial V} uv\, dS - \int_V v\operatorname{grad} u\, dV, \qquad (3.1.36)$$

где $V$ – некоторый объем и $\partial V$ – ограничивающая его поверхность. Считая объем достаточно большим, пренебрежем поверхностными эффектами. Вычислим градиент функции Грина:

$$\operatorname{grad}_{\mathbf{r}'}\frac{\exp\left(ik\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|} = -ik\frac{\exp\left(ik\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|} = -ik\frac{\exp\left(ik\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}\mathbf{l}(\mathbf{r},\mathbf{r}'), \qquad (3.1.37)$$

где **l**(**r**, **r′**) – единичный вектор направления из точки **r′** в точку **r**. Здесь достаточно дифференцировать только осциллирующую экспоненту, если выполнено условие $k\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right| \gg 1$. Область на достаточном удалении от рассеивающего объема, в которой выполнено это условие, называется волновой зоной. В нашем случае это условие выполняется с большим запасом. В результате мы приходим к следующему соотношению:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\exp\left(ik\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}\times \\ \times\left[k^2\left(n^2(\mathbf{r}')-1\right)\mathbf{E}(\mathbf{r}') + ik\,\mathbf{l}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\left(\mathbf{E}(\mathbf{r}')\operatorname{grad} n^2(\mathbf{r}')\right)\right]d^3\mathbf{r}'. \qquad (3.1.38)$$

Второй член в этом выражении снова преобразуем, пользуясь теоремой Гаусса. При этом учтем, что $\operatorname{grad} n^2 \ll k$, поэтому величиной $\operatorname{div}\mathbf{E} = -\mathbf{E}\operatorname{grad}\ln n^2$ можно пренебречь:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{k^2}{4\pi}\int \frac{\exp\left(ik\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}\left[\left(n^2(\mathbf{r}')-1\right)\left(\mathbf{E}(\mathbf{r}') - \mathbf{l}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\left(\mathbf{l}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\mathbf{E}(\mathbf{r}')\right)\right)\right]d^3\mathbf{r}'. \qquad (3.1.39)$$

Наш вывод является более общим, чем тот, который приведен в [1], поскольку мы не использовали приближение однократного рассеяния. Как отмечено в [1], это уравнение выведено без использования каких-либо специальных предположений на вид падающей волны и рассеивающего объема. Требуется лишь, чтобы точка наблюдения находилась в волновой зоне. Выражение **E** – **l**(**l**, **E**) равно компоненте поля **E**, перпендикулярной направлению рассеи-

вания. Как мы видели выше, характерные углы атмосферной рефракции составляют сотые доли радиана, а характерный угловой размер рассеивающего объема $\frac{\Delta r}{D_R} \sim 3\times 10^{-4}$. Это позволяет воспользоваться приближением рассеяния на малые углы. Поскольку электрическое поле является поперечным, отличием величины **E** – **l**(**l**, **E**) от **E** можно пренебречь. В любом случае отличие **E** – **l**(**l**, **E**) от **E** соответствует малым поправкам к амплитуде и к поляризации. Однако в экспериментах по радиозатменному зондированию требования к точности измерения амплитуды невысоки, а поляризация не измеряется. Пренебрежение величиной **l**(**l**, **E**) в (3.1.39) соответствует использованию уравнения Гельмгольца в неоднородной среде:

$$\Delta \mathbf{E} + k^2 n^2 \mathbf{E} = 0. \qquad (3.1.40)$$

Это уравнение разделяется на три независимых уравнения для каждой компоненты электрического поля, поэтому в дальнейшем мы будем пользоваться не векторным, а скалярным полем $u$, равным одной из компонент электрического поля и удовлетворяющим скалярному уравнению

$$\Delta u + k^2 n^2 u = 0. \qquad (3.1.41)$$

Уравнение Гельмгольца обладает симметрией по отношению к изменению длины волны и масштаба среды. Чтобы это увидеть, достаточно перейти к безразмерной координате $kx$. Тогда уравнение не меняется, если с изменением волны среда масштабируется так, что зависимость $n(kx)$ не меняется.

Уравнение (3.1.41) записано для поля в 3-мерном пространстве. В каждом радиозатменном эксперименте регистрируется поле вдоль траектории спутника, т.е. 1-мерная функция. Для постановки обратной задачи с использованием 3-мерного уравнения Гельмгольца необходимы измерения поля на некоторой 2-мерной поверхности, однако такие измерения технически неосуществимы. Таким образом, постановка обратной задачи требует дальнейших приближений.

Как было показано выше, горизонтальный размер зоны Френеля составляет около 800 м. Характерные горизонтальные масштабы синоптических возмущений полей метеопараметров существенно больше, они составляют десятки километров. Вертикальные же масштабы синоптических возмущений, особенно в планетарном пограничном слое, т.е. на высотах до 1–2 км, составляют десятки или сотни метров. Поэтому они меньше или сравнимы с вертикальным размером зоны Френеля, составляющим от 250 до 800 м. Это позволяет рассмотреть 2-мерное приближение для уравнения Гельмгольца, которое мы запишем в вертикальном сечении атмосферы. 2-мерное приближение существенно ускоряет численное моделирование радиозатменных измерений. Численное решение 2-мерной задачи для частот GPS с учетом только крупномасштабных атмосферных возмущений требует несколько минут на современных компьютерах. Численное решение 3-мерной задачи требует в несколько тысяч раз больше вычислительного времени, которое может измеряться сутками.

Моделирование распространения волн с учетом мелкомасштабных возмущений полей метеопараметров оказывается очень сложной задачей. С одной стороны, оно требует решения 3-мерного уравнения. С другой стороны, оно требует также малого шага интегрирования вдоль направления распространения волны. Это может приводить к нереалистично большим затратам вычислительного времени.

### Литература


1. *Татарский В.И.* Распространение волн в турбулентной атмосфере. М.: Наука, 1967. 548 с.
2. *Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И.* Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука, 1980. 304 с.
3. *Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И.* Введение в статистическую радиофизику. Ч. II. Случайные поля. М.: Наука, 1978. 464 с.
4. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988. 512 с.


## 3.2. Условия излучения и факторизация уравнения Гельмгольца

Уравнение Гельмгольца является уравнением в частных производных второго порядка. Фундаментальным решением называется решение неоднородного уравнения с точечным источником в правой части [1]. Рассмотрим фундаментальное решение оператора Гельмгольца в вакууме:

$$\Delta\mathfrak{E} + k^2\mathfrak{E} = \delta(\mathbf{r}). \tag{3.2.1}$$

В 3-мерном случае имеется два фундаментальных решения [1]:

$$\mathfrak{E}_3(\mathbf{r}) = -\frac{e^{ikr}}{4\pi r}, \quad \bar{\mathfrak{E}}_3(\mathbf{r}) = -\frac{e^{-ikr}}{4\pi r}. \tag{3.2.2}$$

В 2-мерном случае фундаментальные решения записываются в виде

$$\mathfrak{E}_2(\mathbf{r}) = -\frac{i}{4}H_0^{(1)}(kr), \quad \bar{\mathfrak{E}}_2(\mathbf{r}) = \frac{i}{4}H_0^{(2)}(kr), \tag{3.2.3}$$

где $H_0^{(1,2)}$ – функции Ханкеля, для которых удобно пользоваться асимптотическими представлениями в волновой зоне ($kr \gg 1$) [2]:

$$\mathfrak{E}_2(\mathbf{r}) = -i\sqrt{\frac{1}{8\pi kr}}\exp\left(ikr - i\frac{\pi}{4}\right), \quad \bar{\mathfrak{E}}_2(\mathbf{r}) = i\sqrt{\frac{1}{8\pi kr}}\exp\left(-ikr + i\frac{\pi}{4}\right), \tag{3.2.4}$$

Два фундаментальных решения соответствуют двум типам стационарных волн: распространяющихся от источника на бесконечность и распространяющихся с бесконечности к источнику. Второй тип решения, с одной стороны, может показаться нарушением принципа причинности, но, с другой стороны, используется в процедуре обращения волнового фронта, которая обсуждается в разделе 3.5. Наличие двух типов решения приводит к неединственности решения Гельмгольца с заданными источниками, поскольку однородное уравнение обладает ненулевым решением, например

$$-\frac{i}{2}\left(\mathfrak{E}_3(\mathbf{r})-\overline{\mathfrak{E}}_3(\mathbf{r})\right)=\operatorname{Im}\mathfrak{E}_3(\mathbf{r})=-\frac{\sin kr}{4\pi r}. \qquad (3.2.5)$$

Другим примером решения однородного уравнения является плоская волна $u_0 \exp(i\mathbf{kr})$. Чтобы выделить только один тип решения, соответствующий волнам от источника, на решение накладывается условие излучения Зоммерфельда:

$$u(\mathbf{r})=O\left(r^{-1}\right);\quad \frac{\partial u}{\partial r}-iku=o\left(r^{-1}\right),\quad r\to\infty. \qquad (3.2.6)$$

При рассмотрении уравнения Гельмгольца в среде (3.1.41) ситуация усложняется. Для произвольной среды неизвестно точное фундаментальное решение; все решения строятся только в различных приближениях. Кроме того, в неоднородной среде возможно рассеяние волны назад. Мы, однако, будем рассматривать задачу распространения коротких волн, которые рассеиваются лишь на малые углы. Кроме того, мы всегда будем выделять ограниченную область, занятую средой, на которую падает заданная волна от источника.

Для задачи рассеяния на малые углы уравнение Гельмгольца является чересчур общим, т.к. оно содержит ненужные типы решений. Вместо наложения условия излучения чаще всего от уравнения Гельмгольца переходят к так называемому параболическому уравнению, которое проще уравнения Гельмгольца, а его решения автоматически удовлетворяют условию излучения.

Рассмотрим вывод параболического уравнения, основанный на факторизации уравнения Гельмгольца. Выделим координату $x$, вдоль которой с точностью до рассеяния на малые углы распространяется волна. По аналогии с квантовой механикой введем нормированные дифференциальные операторы. В квантовой механике частица с заданной энергией $E$ и импульсом $\mathbf{p}$ описывается плоской волной

$$\psi(\mathbf{r},t)=\psi_0\exp\left(\frac{i}{\hbar}\mathbf{pr}-\frac{i}{\hbar}Et\right), \qquad (3.2.7)$$

где $\hbar=h/2\pi$ – редуцированная постоянная Планка, и вводятся операторы энергии и импульса

$$\hat{E}=i\hbar\frac{\partial}{\partial t};\quad \hat{\mathbf{p}}=-i\hbar\frac{\partial}{\partial r}. \qquad (3.2.8)$$

Эти операторы играют важную роль в построении квазиклассического приближения [4], являющегося асимптотикой решения уравнения Шредингера при $h\to 0$. Поскольку мы будем изучать коротковолновые асимптотики решения уравнения Гельмгольца при $k^{-1}\to 0$, введем аналогичные операторы $\frac{1}{ik}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}$. Запишем уравнение Гельмгольца

$$\left(\frac{1}{ik}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 u-\frac{1}{k^2}\Delta_\perp u-n^2u=0, \qquad (3.2.9)$$

где $\Delta_\perp$ – оператор Лапласа по поперечным координатам $x$, $y$. Факторизуем оператор в левой части как разность двух квадратов:

$$\left(\frac{1}{ik}\frac{\partial}{\partial x}+\sqrt{n^2+\frac{1}{k^2}\Delta_\perp}\right)\left(\frac{1}{ik}\frac{\partial}{\partial x}-\sqrt{n^2+\frac{1}{k^2}\Delta_\perp}\right)u=0, \qquad (3.2.10)$$

Такая факторизация является приближенной, поскольку операторы $\frac{1}{ik}\frac{\partial}{\partial x}$ и $\left(n^2+\frac{1}{k^2}\Delta_\perp\right)^{1/2}$ не коммутируют. Оценим величину коммутатора, которым мы пренебрегли. Поскольку $\frac{1}{ik}\frac{\partial}{\partial x}$ и $\frac{1}{k^2}\Delta_\perp$ коммутируют, достаточно вычислить коммутатор $\frac{1}{ik}\frac{\partial}{\partial x}$ и $n$:

$$\left[\frac{1}{ik}\frac{\partial}{\partial x},n\right]f=\frac{1}{ik}\frac{\partial}{\partial x}(nf)-n\frac{1}{ik}\frac{\partial}{\partial x}f=f\frac{1}{ik}\frac{\partial}{\partial x}n. \qquad (3.2.11)$$

При $k^{-1}\to 0$ этот коммутатор стремится к 0. Величина $\frac{1}{ik}\frac{\partial}{\partial x}n$ по порядку величины равна изменению показателя преломления на расстоянии, равном длине волны λ. Если волновое поле распространяется в направлении $x$, то оно близко к $u_0\exp(inkx)$ и $\frac{1}{ik}\frac{\partial}{\partial x}u$ близко к $nu$, что не зависит от $k$. Таким образом, коммутатором можно пренебречь, если изменение показателя преломления мало на расстоянии порядка длины волны. Это условие автоматически выполнено, если исследуются коротковолновые асимптотики. В любом случае условие малости изменения показателя преломления на расстоянии порядка длины волны использовалось при выводе уравнения Гельмгольца.

В левой части уравнения (3.2.10) стоит произведение двух операторов, которые с достаточной точностью можно считать коммутирующими. Один из операторов описывает волны, распространяющиеся назад, другой – волны, распространяющиеся вперед. Выделим уравнение для волн, распространяющихся вперед:

$$\left(\frac{1}{ik}\frac{\partial}{\partial x}-\sqrt{n^2+\frac{1}{k^2}\Delta_\perp}\right)u=0. \qquad (3.2.12)$$

Это уравнение содержит операторный квадратный корень и относится к классу псевдодифференциальных уравнений. Вычисление этого корня в явном виде является сложной задачей. Но для его вычисления можно построить простые приближения. Величина $\frac{1}{k^2}\Delta_\perp u$ приближенно равна квадрату угла рассеяния. Для малых углов рассеяния разложим корень в ряд и получим параболическое уравнение:

$$\left(\frac{1}{ik}\frac{\partial}{\partial x}-n-\frac{1}{2k^2}\Delta_\perp\right)u=0. \qquad (3.2.13)$$

Приведем еще одно приближенное уравнение, в котором выделяется точный оператор для вакуума и приближенный оператор описания вклада среды:

$$\left(\frac{1}{ik}\frac{\partial}{\partial x}-(n-1)-\sqrt{1+\frac{1}{k^2}\Delta_\perp}\right)u=0. \qquad (3.2.14)$$

Операторный корень здесь уже не содержит $n^2(\mathbf{r})$ и легко вычисляется. Для этого следует воспользоваться тем, что в пространстве Фурье-образов оператор Лапласа является умножением на квадрат частоты. Это позволяет определить произвольную алгебраическую функцию от оператора Лапласа. Она равна композиции преобразования Фурье, умножения на соответствующую функцию от квадрата частоты и обратного преобразования Фурье. Более детально вопросы исчисления функций от дифференциальных операторов мы будем рассматривать ниже, в главах, посвященных асимптотическим методам решения волновых задач.

В случае вакуума ($n = 1$) уравнение (3.2.12) является точным, и любое его точное решение будет также точным решением исходного уравнения Гельмгольца, удовлетворяющим условиям излучения.

### Литература


1. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988. 512 с.
2. *Weng Cho Chew.* Waves and fields in inhomogeneous media. New York: IEEE Press, 1994. 636 p.
3. *Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И.* Введение в статистическую радиофизику. Ч. II. Случайные поля. М.: Наука, 1978. 464 с.
4. *Мищенко А.С., Стернин Б.Ю., Шаталов В.Е.* Лагранжевы многообразия и метод канонических оператора. М.: Наука, 1978. 354 с.


## 3.3. Общее решение граничной задачи с условиями излучения в вакууме

Рассмотрим граничную задачу для уравнения Гельмгольца в вакууме. Это решение понадобится нам в дальнейшем при обсуждении метода обратного распространения (обращения волнового фронта). Нас будет интересовать, прежде всего, так называемая внешняя задача Дирихле: граничные значения поля $u$ заданы на некоторой поверхности $S$, и ищется решение, удовлетворяющее условиям излучения, во внешней области. При строгом математическом рассмотрении задачи [1] поверхность считается замкнутой. Для нас будет достаточно задать некоторую ориентацию поверхности, при которой ее сторона в направлении нормали считается внешней, а другая сторона – внутренней. Нормаль выбирается в направлении распространении волны. Мы бу-

дем пользоваться фундаментальным решением $\mathfrak{E}_3(\mathbf{r})$; аналогичные результаты можно также получить и для решения $\overline{\mathfrak{E}}_3(\mathbf{r})$.

Решения граничных задач Неймана (задано граничное значение нормальной производной поля) и Дирихле (задано граничное значение поля) ищутся в виде потенциалов простого и двойного слоя соответственно [1]:

$$V^{(0)} = \mathfrak{E}_3 * (\mu\delta_S); \quad V^{(1)} = -\mathfrak{E}_3 * \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_\mathbf{x}} \nu\delta_S \right), \tag{3.3.1}$$

где $\mathbf{n}_\mathbf{x}$ – нормаль к поверхности $S$ в точке $\mathbf{x}$. Простым и двойным слоем с плотностями $\mu$ и $\nu$ соответственно называются обобщенные функции, действующие по следующему правилу:

$$\begin{aligned} &(\mu\delta_S, \varphi) \equiv \int \mu(\mathbf{y})\,\delta_S(\mathbf{y})\,\varphi(\mathbf{y})\,d^3\mathbf{y} = \int_S \mu(\mathbf{y})\,\varphi(\mathbf{y})\,dS_\mathbf{y}, \\ &\left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_\mathbf{x}} \nu\delta_S, \varphi \right) \equiv \int \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_\mathbf{y}} \left( \nu(\mathbf{y})\,\delta_S(\mathbf{y}) \right) \varphi(\mathbf{y})\,d^3\mathbf{y} = -\int_S \nu(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_\mathbf{y}} \varphi(\mathbf{y})\,dS_\mathbf{y}. \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

Потенциалы (3.3.1) являются решениями однородного уравнения Гельмгольца вне поверхности $S$, поскольку плотности потенциалов простого и двойного слоя обращаются там в 0.

Вычислим предельное значение потенциала двойного слоя $V^{(1)}(\mathbf{x})$ на поверхности $S$. Рассмотрим $\varepsilon$-окрестность точки $\mathbf{x}$, которую мы обозначим $S_\varepsilon$. Тогда предельное значение потенциала можно записать в следующем виде:

$$V_+^{(1)}(\mathbf{x}) = \lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{\mathbf{x}'\to\mathbf{x}_+} \int_{S_\varepsilon} \nu(\mathbf{y}) \frac{\partial \mathfrak{E}_3(\mathbf{x}'-\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_\mathbf{y}} dS_\mathbf{y} + \lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{\mathbf{x}'\to\mathbf{x}_+} \int_{S\setminus S_\varepsilon} \nu(\mathbf{y}) \frac{\partial \mathfrak{E}_3(\mathbf{x}'-\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_\mathbf{y}} dS_\mathbf{y}. \tag{3.3.3}$$

где точка $\mathbf{x}'$, стремится к $\mathbf{x}$ с внешней стороны поверхности, что обозначено $\mathbf{x}' \to \mathbf{x}_+$. Второй интеграл в пределе равен

$$\int_S \nu(\mathbf{y}) \frac{\partial \mathfrak{E}_3(\mathbf{x}-\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_\mathbf{y}} dS_\mathbf{y}. \tag{3.3.4}$$

В первом интеграле можно вынести $\nu(y)$ из-под интеграла и заменить на $\nu(x)$. В оставшемся интеграле по малой области множитель $\exp(ik\,|\,\mathbf{x}' - \mathbf{y}\,|\,)$ заменим на 1, поскольку максимальное расстояние от точки $\mathbf{x}'$ до точек области $S_\varepsilon$ можно сделать сколь угодно малым. Иными словами, в $\varepsilon$-окрестности источника при $\varepsilon$, существенно меньшем, чем длина волны $\lambda$, можно использовать приближение статического поля, описываемого уравнением Лапласа. Это позволяет записать этот интеграл в следующем виде:

$$-\frac{1}{4\pi} \int_{S_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_\mathbf{y}} \frac{1}{|\mathbf{x}'-\mathbf{y}|} dS_\mathbf{y}. \tag{3.3.5}$$

Если точка $\mathbf{x}'$ лежит на поверхности, то этот интеграл стремится к 0 при $\varepsilon \to 0$. Это связано с тем, что вектор $\mathbf{x}' - \mathbf{y}$ почти перпендикулярен $\mathbf{n}_\mathbf{y}$ для всех $\mathbf{y}$ и

$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_\mathbf{y}}|\mathbf{x}'-\mathbf{y}| \to 0$. Если же точка $\mathbf{x}'$ сколь угодно близка к поверхности, но не лежит на ней, его предельное значение будет конечным. В этом случае в области интегрирования угол между векторами $\mathbf{n}_\mathbf{y}$ и $\mathbf{x}' - \mathbf{y}$ будет пробегать интервал значений, стремящийся к $[-\pi, \pi]$. Таким образом, потенциал $V^{(1)}(\mathbf{x})$ претерпевает скачок: если точка $\mathbf{x}$ лежит на поверхности $S$, то значение потенциала $V^{(1)}(\mathbf{x})$ и предельные значения $V_\pm^{(1)}(\mathbf{x})$ снаружи и изнутри будут различными.

Считая поверхность $S$ гладкой, ее малый элемент $S_\varepsilon$ будем считать плоским, поскольку, выбирая достаточно малое $\varepsilon$, можно сделать отклонение $S_\varepsilon$ от касательной плоскости сколь угодно малым. Введем на поверхности $S_\varepsilon$ расстояние $\rho$ от точки $\mathbf{x}$ и в пространстве расстояние $z$ от $S_\varepsilon$ до точки $\mathbf{x}'$, которую мы расположим на нормали к точке $\mathbf{x}$. Обозначим $r^2 = \rho^2 + z^2$. Тогда интеграл можно переписать в следующем виде:

$$\frac{2\pi}{4\pi}\int_0^\varepsilon \frac{z}{r}\frac{\rho d\rho}{r^2} = \frac{z}{2}\int_z^{\sqrt{\varepsilon^2+z^2}} \frac{rdr}{r^3} = \frac{z}{2}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2+z^2}}\right). \tag{3.3.6}$$

Устремляя $z$ к +0 при любом фиксированном $\varepsilon$, в пределе получаем 1/2. Аналогично рассматривается предельное значение $V_-^{(1)}(\mathbf{x}')$ для точки, лежащей внутри поверхности. В этом случае последний интеграл меняет знак. Окончательно получаем выражение для предельных значений $V_\pm^{(1)}(\mathbf{x})$ на поверхности:

$$V_\pm^{(1)}(\mathbf{x}) = \pm\frac{\nu(\mathbf{x})}{2} + \int_S \nu(\mathbf{y})\frac{\partial \mathfrak{E}_3(\mathbf{x}-\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_\mathbf{y}} dS. \tag{3.3.7}$$

Эта формула позволяет записать решение задачи Дирихле. Будем искать его в виде потенциала двойного слоя с неизвестной плотностью. Величины $V_\pm^{(1)}(\mathbf{x})$ равны заданным граничным условиям $u_0(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x} \in S$. Тогда соотношение (3.3.7) представляет собой интегральное уравнение Фредгольма второго рода относительно неизвестной плотности $\nu(\mathbf{x})$. Если поверхность $S$ плоская, то интегральный член равен 0 и решение оказывается тривиальным. В частности, для внешней задачи Дирихле

$$u(\mathbf{x}) = 2\int_S u_0(\mathbf{y})\frac{\partial \mathfrak{E}_3(\mathbf{x}-\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_\mathbf{y}} dS_\mathbf{y}. \tag{3.3.8}$$

Выше мы приводили оценки зоны Френеля для радиозатменных экспериментов. Горизонтальный размер зоны Френеля оказывается равным примерно 800 м. Однако характерные горизонтальные масштабы синоптических атмосферных неоднородностей существенно больше этой величины. Это позволяет пользоваться двумерным приближением для уравнения Гельмгольца и параболического уравнения, записывая их в вертикальном сечении атмосферы. Получим аналогичное решение в двумерном случае.

Решения граничных задач Неймана и Дирихле ищутся в виде аналогичных потенциалов простого и двойного слоя, в которых теперь используется фун-

даментальное решение $\mathfrak{E}_2(\mathbf{x})$. Для вычисления предельного значения потенциала нужно вычислить интеграл, аналогичный (3.3.5), в котором используется приближенное выражение для фундаментального решения вблизи источника. В двумерном случае в этом качестве мы воспользуемся фундаментальным решением уравнения Лапласа [1]:

$$\mathfrak{E}_2(\mathbf{x}) \approx \frac{1}{2\pi}\ln|\mathbf{x}|, \quad |\mathbf{x}| \ll \frac{1}{k}. \tag{3.3.9}$$

Двумерный аналог интеграла (3.3.5) по малой окрестности полюса будет иметь следующий вид:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{z}{r}\frac{d\rho}{r} = \frac{z}{2\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{d\rho}{\rho^2+z^2} = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\varepsilon}{z}. \tag{3.3.10}$$

Устремляя $z$ к +0 при любом заданном ε, в пределе получаем 1/2. Отсюда получаем формулу для предельного значения потенциала в двумерном случае:

$$V_{\pm}^{(1)}(\mathbf{x}) = \pm\frac{\nu(\mathbf{x})}{2} + \int_S \nu(\mathbf{y})\frac{\partial\mathfrak{E}_2(\mathbf{x}-\mathbf{y})}{\partial\mathbf{n}_\mathbf{y}}dS. \tag{3.3.11}$$

Решение внешней задачи Дирихле, если граничное условие задано на прямой, имеет вид

$$u(\mathbf{x}) = 2\int_S u_0(\mathbf{y})\frac{\partial\mathfrak{E}_2(\mathbf{x}-\mathbf{y})}{\partial\mathbf{n}_\mathbf{y}}dS_\mathbf{y}. \tag{3.3.12}$$

Запишем выражения (3.3.8) и (3.3.12) для коротких волн в волновой зоне:

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) &= -\frac{ik}{2\pi}\int_S u_0(\mathbf{y})\cos\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})\frac{\exp\left(ik|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\right)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}dS_\mathbf{y}, \\ u(\mathbf{x}) &= \sqrt{\frac{k}{2\pi}}\int_S u_0(\mathbf{y})\cos\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})\frac{\exp\left(ik|\mathbf{x}-\mathbf{y}|-i\frac{\pi}{4}\right)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{1/2}}dS_\mathbf{y}, \end{aligned} \tag{3.3.13}$$

где $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ – угол между вектором $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ и нормалью к поверхности или кривой $S$ в точке $\mathbf{y}$. Хотя эти выражения были получены для случая, когда граничные условия заданы на плоскости или прямой, этими выражениями можно пользоваться как приближенными, если в пределах зоны Френеля кривизна поверхности или кривой достаточно мала. Это приближение применимо, если для двух разных точек $\mathbf{x}'$ и $\mathbf{x}''$, принадлежащих $S$ и лежащих в зоне Френеля, выполнены условия:

$$\begin{aligned} \cos\varphi(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') &\ll 1, \\ \cos\varphi(\mathbf{x}'', \mathbf{x}') &\ll 1. \end{aligned} \tag{3.3.14}$$

Решение задачи Неймана строится с использованием потенциала простого слоя $V_{\pm}^{(0)}$. Для этого используются формулы для предельного значения нормальной производной потенциала, аналогичные (3.3.11). Однако решение задачи Неймана нам не потребуется.

Решение задачи Дирихле (3.3.13) является выражением принципа Гюйгенса–Френеля. Каждый фронт распространяющей волны можно рассматривать как совокупность вторичных источников с диаграммой направленности $\cos\varphi$ ($\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$). Может показаться парадоксальным, что точечный источник создает не всенаправленную сферическую волну, соответствующую фундаментальным решениям $\mathfrak{E}_3$ и $\mathfrak{E}_2$. На самом деле это связано с тем, что решение уравнения Гельмгольца с заданием только граничных значений поля не единственно. Для заданного точечного источника существует бесконечное множество различных конфигураций поля. Наложение условий излучения соответствует выделению только волн, распространяющихся в направлении нормали к поверхности *S*. Для точечного источника такая волна уже не является сферической. Точечный источник соответствует волне, падающей на поверхность *S* с внутренней стороны, фокусирующейся в точке расположения источника и расходящейся с внешней стороны поверхности *S*. К обсуждению этого вопроса мы вернемся в дальнейшем при обсуждении интегральных операторов Фурье.

### Литература

1. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988. 512 с.

## 3.4. Пространственные спектры волнового поля. Импульсное представление

Выше мы получили решение граничной задачи для уравнения Гельмгольца в вакууме в форме дифракционных интегралов (3.3.13). В данном разделе рассмотрим другой подход к решению этой задачи, основанный на аппарате пространственных спектров волнового поля [1], который не только позволяет строить эффективные численные алгоритмы, но и вводит понятия, которые будут играть важную роль в данной монографии.

Будем рассматривать задачу с условиями излучения, в которой граничное условие задано на плоской поверхности *S*. Запишем уравнение (3.2.12) для вакуума

$$\left(\frac{1}{ik}\frac{\partial}{\partial x}-\sqrt{1+\frac{1}{k^2}\Delta_\perp}\right)u=0. \tag{3.4.1}$$

Ось *x*, вдоль которой распространяется волна, направлена перпендикулярно к поверхности *S*. В этом уравнении используются нормированные дифференциальные операторы. Введем нормированное 2-мерное преобразование Фурье по поперечным координатам:

$$\begin{aligned}\tilde f(\eta,\zeta)&=\int f(y,z)\exp(-iky\eta-ikz\zeta)\,dy\,dz,\\ f(y,z)&=\frac{k^2}{4\pi^2}\int \tilde f(\eta,\zeta)\exp(iky\eta+ikz\zeta)\,d\eta\,d\zeta.\end{aligned} \tag{3.4.2}$$

Если применить преобразование Фурье по поперечным координатам к полю $u$, то мы получим уравнение, содержащее дифференцирование только по координате распространения, а поперечные пространственные частоты входят в качестве параметров:

$$\frac{1}{ik}\frac{\partial}{\partial x}\tilde{u}(x,\eta,\zeta)=\sqrt{1-\eta^2-\zeta^2}\,\tilde{u}(x,\eta,\zeta). \tag{3.4.3}$$

Это уравнение легко проинтегрировать:

$$\tilde{u}(x+\Delta x,\eta,\zeta)=\exp\left(ik\sqrt{1-\eta^2-\zeta^2}\,\Delta x\right)\tilde{u}(x,\eta,\zeta). \tag{3.4.4}$$

Мы записали решение для 3-мерного случая. Для 2-мерного случая достаточно положить частоту $\zeta$ равной 0 и воспользоваться 1-мерным нормированным преобразованием Фурье:

$$\begin{aligned}\tilde{f}(\eta)&=\int f(y)\exp(-iky\eta)\,dy,\\ f(y)&=\frac{k}{2\pi}\int \tilde{f}(\eta)\exp(iky\eta)\,d\eta.\end{aligned} \tag{3.4.5}$$

Эта конструкция, несмотря на ее простоту, обладает глубоким содержанием. Величина $\exp\left(ik\sqrt{1-\eta^2-\zeta^2}\,\Delta x\right)$ является передаточной функцией свободного пространства, или вакуумным пропагатором. Ее смысл можно прояснить следующим образом. Поле в свободном пространстве является суперпозицией плоских волн вида

$$\tilde{u}(\xi,\eta,\zeta)\exp(ikx\xi+iky\eta+ikz\zeta), \tag{3.4.6}$$

где $\tilde{u}(\xi,\eta,\zeta)$ – 3-мерный Фурье-образ поля $u$, а величины ($\xi$, $\eta$, $\zeta$) удовлетворяют условию

$$\xi^2+\eta^2+z^2=1. \tag{3.4.7}$$

Если величины ($\xi$, $\eta$, $\zeta$) действительны, то они образуют единичный вектор в направлении распространения волны. Каждая 2-мерная Фурье-гармоника $\tilde{u}(x,\eta,\zeta)\exp(iky\eta+ikz\zeta)$ с частотами ($\eta$, $\zeta$) в заданной плоскости $x$ является срезом 3-мерной плоской волны, у которой пространственная частота $\xi$ положительна в силу условия излучения и равна

$$\xi=\sqrt{1-\eta^2-\zeta^2}, \tag{3.4.8}$$

что позволяет сразу записать формулу для вакуумного пропагатора.

Величины ($\eta$, $\zeta$) обладают двойственным смыслом: они являются и пространственными частотами, и составляющими единичного направляющего вектора плоской волны. Как мы увидим далее, в гамильтоновом подходе эти величины приобретают смысл компонент импульса.

В приближения рассеяния волн на малые углы можно записать следующее приближение для пропагатора:

$$\tilde{u}(x+\Delta x,\eta,\zeta)=\exp\left(ik\left(1-\frac{\eta^2+\zeta^2}{2}\right)\Delta x\right)\tilde{u}(x,\eta,\zeta). \tag{3.4.9}$$

Это решение соответствует параболическому уравнению (3.2.13), записанному в вакууме.

Можно рассматривать комплексные пространственные частоты (ξ, η, ζ), удовлетворяющие соотношению (3.4.7). Соответствующие волны (3.4.6), также являющиеся решениями уравнения Гельмгольца, будут не только осциллировать, но и экспоненциально возрастать или убывать по одной или нескольким координатам. Такие волны называются неоднородными.

Формула (3.4.4) позволяет пересчитывать волновое поле из одной плоскости в другую. Эта форма представления решения эквивалентна дифракционному интегралу (3.3.13) с тем ограничением, что формула (3.4.4) применима лишь, если поверхность $S$ – плоскость. В этом случае дифракционный интеграл сводится к свертке и допускает реализацию в виде умножения на передаточную функцию в пространстве Фурье-образов. Если в дискретном представлении имеется $N$ выборок поля, то количество операций для вычисления дифракционного интеграла пропорционально $N^2$, а для численной реализации формулы (3.4.4), основанной на быстром преобразовании Фурье, – $N \ln N$. Это дает существенный выигрыш вычислительного времени.

Таким образом, волновое поле можно представить в виде суперпозиции распространяющихся в пространстве плоских волн. Распространение каждой плоской волны можно точно описать в рамках лучевых представлений. Плоская волна соответствует системе параллельных лучей, перпендикулярных волновому фронту. Однако полное поле, вообще говоря, уже нельзя точно описать в рамках геометрической оптики. Отклонения от геометрической оптики называются дифракцией. Поскольку поле в вакууме является суперпозицией плоских волн, дифракция эквивалентна интерференции. Представление волнового поля в вакууме интегралом Фурье по поперечным координатам является бездифракционным, поскольку в нем уравнения поля не содержат дифференциальных операторов по поперечным координатам. Начальные условия в каждой точке (η, ζ) исходной плоскости $x$ влияют только на значения $\tilde{u}(x,\eta,\zeta)$ с теми же пространственными частотами. Поэтому в этом представлении поле описывается системой лучей, параллельных оси распространения $x$.

Понятие представления волнового поля широко используется в квантовой механике. В частности, преобразование Фурье реализует импульсное представление [2]. Любое чистое состояние элементарной частицы описывается волновой функцией, или элементом некоторого гильбертова пространства состояний $|\psi\rangle$, который можно разложить по базисным состояниям. Значениям волновой функции как функции координат соответствует скалярное произведение базисного состояния с заданной координатой $|\mathbf{x}\rangle$ и состояния $|\psi\rangle$:

$$\psi(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x} | \psi \rangle. \tag{3.4.10}$$

В частности, базисные состояния с заданным значением импульса $\mathbf{p}'$ в координатном представлении равны

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{p}' \rangle = \frac{1}{h^{3/2}} \exp\left( \frac{i}{\hbar} \mathbf{p}'\mathbf{x} \right), \tag{3.4.11}$$

и множитель выбран так, чтобы обеспечить нормировку:

$$\langle \mathbf{p} | \mathbf{p}' \rangle = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}'). \tag{3.4.12}$$

Состояния с заданной координатой $\mathbf{x}'$ равны в координатном представлении:

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{x}' \rangle = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \tag{3.4.13}$$

Формулу (3.4.12) можно понимать не только как условие нормировки, но и как выражение для состояния с заданным импульсом в импульсном представлении. Состояние с заданной координатой в импульсном представлении равно функции, комплексно сопряженной с (3.4.11):

$$\langle \mathbf{p} | \mathbf{x}' \rangle = \frac{1}{h^{3/2}} \exp\left( -\frac{i}{\hbar} \mathbf{p}\mathbf{x}' \right). \tag{3.4.14}$$

Разложение волновой функции по базисным состояниям представляется следующим образом:

$$|\psi\rangle = \int |\mathbf{x}\rangle \langle \mathbf{x} | \psi \rangle \, d\mathbf{x} = \int |\mathbf{p}\rangle \langle \mathbf{p} | \psi \rangle \, d\mathbf{p}. \tag{3.4.15}$$

Запись $|\psi\rangle$ относится к физическому состоянию частицы независимо от конкретного представления. Волновая функция в импульсном представлении равна

$$\langle \mathbf{p} | \psi \rangle = \int \langle \mathbf{p} | \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{x} | \psi \rangle \, d\mathbf{x} = \tilde{\psi}(\mathbf{p}) = \frac{1}{h^{3/2}} \int \psi(\mathbf{x}) \exp\left( -\frac{i}{\hbar} \mathbf{p}\mathbf{x} \right) d\mathbf{x}. \tag{3.4.16}$$

И обратно, волновая функции в координатном представлении выражается через волновую функцию в импульсном представлении:

$$\langle \mathbf{x} | \psi \rangle = \int \langle \mathbf{x} | \mathbf{p} \rangle \langle \mathbf{p} | \psi \rangle \, d\mathbf{p} = \psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{h^{3/2}} \int \tilde{\psi}(\mathbf{p}) \exp\left( \frac{i}{\hbar} \mathbf{p}\mathbf{x} \right) d\mathbf{p}, \tag{3.4.17}$$

Динамика волновой функции описывается уравнением Шредингера, которое можно записать в общем виде:

$$\hat{E} |\psi\rangle = \hat{H} |\psi\rangle, \tag{3.4.18}$$

где $\hat{E}$ – оператор энергии, равный $i\hbar \dfrac{\partial}{\partial t}$, а $\hat{H} = H(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{p}})$ – оператор Гамильтона, т.е. выражение энергии через координату и импульс с подстановкой по определенному рецепту операторов вместо классических координаты и импульса. Состояния с заданной координатой или импульсом являются собственными функциями операторов координаты и импульса соответственно, а значения координаты и импульса в этих состояниях являются их собственными значениями. Символически это записывается так:

$$\begin{aligned} \hat{x}_i |\mathbf{x}'\rangle &= x_i' |\mathbf{x}'\rangle, \\ \hat{p}_i |\mathbf{p}'\rangle &= p_i' |\mathbf{p}'\rangle. \end{aligned} \tag{3.4.19}$$

где $\hat{x}_i$ и $\hat{p}_i$ являются операторами. В координатном представлении, в силу формул (3.4.13) и (3.4.11), эти операторы равны

$$\hat{x}_i = x_i,$$
$$\hat{p}_i = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{3.4.20}$$

В импульсном представлении, в силу формул (3.4.12) и (3.4.14), операторы координаты и импульса имеют вид

$$\hat{x}_i = i\hbar\frac{\partial}{\partial p_i},$$
$$\hat{p}_i = p_i. \tag{3.4.21}$$

С классической точки зрения переход к импульсному представлению эквивалентен замене координат в фазовом пространстве $(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \to (\mathbf{p}, -\mathbf{x})$. В частности, в каждой плоскости $(x_i, p_i)$ это преобразование является поворотом на $\pi / 2$, который в волновой механике реализуется преобразованием Фурье.

Рассмотрим простой пример. Гамильтониан нерелятивистской частицы с массой $m$ во внешнем поле с потенциалом $U$ имеет вид

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + U(\mathbf{x}). \tag{3.4.22}$$

Тогда уравнение Шредингера имеет вид в координатном представлении:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + U(\mathbf{x}). \tag{3.4.23}$$

Это уравнение является аналогом параболического уравнения (3.2.13). К нему также применимо понятие дифракции, и его решение можно строить в квазиклассическом приближении, являющемся полным аналогом геометрической оптики. То же уравнение в импульсном представлении имеет вид

$$i\hbar\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial t} = \left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + U(\hat{\mathbf{x}})\right)\tilde{\psi}, \tag{3.4.24}$$

где функция общего вида от дифференциального оператора $U(\hat{\mathbf{x}})$ нуждается в дополнительном определении. В частности, если внешнее поле равно $U = 0$, то это представление будет бездифракционным.

Круг вопросов, связанный с представлениями волновых полей и описывающих их уравнений, будет детально рассмотрен в следующих главах. Центральной темой данной монографии является применение аппарата представлений волновых полей для решения практических задач интерпретации данных радиопросвечивания атмосферы.

## Литература


1. *Зверев В.А.* Радиооптика. М.: Сов. радио, 1975. 304 с.
2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика: Учеб. пособ.: Для вузов. В 10 т. Т. III. Квантовая механика (нерелятивистская теория). 6-е изд., испр. М.: Физматлит, 2008. 800 с.

## 3.5. Обращение волнового фронта, или обратное распространение

### Принципы взаимности и синтезированной апертуры

Выше мы рассматривали решение задачи распространения с граничными условиями, заданными на некоторой поверхности, дополненными условиями излучения. Можно рассмотреть и обратную задачу: имеются измерения поля, пришедшего на некоторую поверхность, и по ним нужно восстановить приходящее поле в пространстве или его источники. Эта задача решается методом обращения волнового фронта или обратного распространения. С математической точки зрения задача обращения волнового фронта отличается от рассмотренных выше граничных задач для волнового уравнения с условиями излучения лишь тем, что вместо функций Грина $\mathfrak{E}_{2,3}(\mathbf{r})$, определенных (3.2.2) и (3.2.3), используются сопряженные функции $\overline{\mathfrak{E}}_{2,3}(\mathbf{r})$ в формулах, аналогичных (3.3.13), или пропагатор $\exp\left(ik\sqrt{1-\eta^2-\zeta^2}\Delta x\right)$ с отрицательным $\Delta x$. В этом случае рассматривается волна, распространяющаяся вперед, но которую мы пересчитываем назад. Возможен другой подход, в котором используются функции Грина $\mathfrak{E}_{2,3}(\mathbf{r})$ и пропагатор $\exp\left(-ik\sqrt{1-\eta^2-\zeta^2}\Delta x\right)$, а задача решается для сопряженного волнового поля. Операция сопряжения поля соответствует изменению знака у фазы, т.е. обращению направления распространения волны.

Термин «обращение волнового фронта» часто встречается в литературе: так называют один из методов адаптивной оптики, позволяющий компенсировать искажения световой волны, например, вносимые турбулентной средой [1–4]. Если на неоднородную среду падает плоская волна, то, пройдя через среду, волна сильно искажается. Но если прошедшую волну обратить и пропустить в обратном направлении через ту же среду, то в результате снова будет получена плоская волна. Возможность обращения волнового фронта связана с фундаментальным свойством функции Грина $G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ волнового уравнения в неоднородной среде:

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = G(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1). \tag{3.5.1}$$

Это свойство очевидно для вакуума, поскольку в этом случае функция Грина зависит от $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$. В произвольной среде принцип взаимности вытекает из принципа Гюйгенса–Френеля–Фейнмана [5] и континуальной записи решения волнового уравнения [6, 7, 8]. Из принципа взаимности следует, что если источник и приемник волн, расположенные в любой неоднородной среде или в вакууме, поменять местами, то принимаемое поле не изменится.

В рамках данной книги мы рассматриваем лишь методы устранения дифракционных эффектов при распространении в вакууме, что существенно упрощает задачу, поскольку вакуумный пропагатор точно известен. Кроме того, у нас речь идет не о физическом обращении волны, а о методе численной обработки принятого поля.

Принцип обработки измерений поля, выполненных при помощи антенны относительно малых размеров при ее перемещении вдоль некоторой кривой или поверхности, называется принципом синтезированной апертуры. Этот принцип широко используется как в радиолокации и радиоастрономии, так и при обработке радиозатменных данных. В частности, обращение волнового фронта обязательно предполагает использование принципа синтезированной апертуры.

Принцип синтезированной апертуры позволяет добиться наилучшего разрешения при обработке дифракционных изображений. Важную роль в дифракционных задачах играет френелевский масштаб (зона Френеля), который мы обсуждали в разделе 3.1. В простейшем случае этот масштаб оценивается величиной $\sqrt{\lambda D}$, где $D$ – расстояние наблюдения. Дифракционное изображение объекта будет правильно передавать детали с размерами порядка или большими френелевского масштаба. Детали с меньшими размерами будут искажены. Тем не менее размер зоны Френеля не является принципиальным ограничением на разрешение. Принцип синтезированной апертуры в сочетании с обращением волнового фронта позволяет уменьшить эффективное расстояние наблюдения и избавиться от этого ограничения.

Предельное разрешение можно установить из формы вакуумного пропагатора. Пропагатор является комплексной функцией, по модулю равной единице для пространственных частот в направлении, поперечном к направлению распространения волны, меньших $k$. Более высокие пространственные частоты соответствуют экспоненциально затухающим неоднородным волнам, как мы видели в разделе 3.4. Таким образом, предельный масштаб исходного объекта, который можно восстановить по дифракционным изображениям, равен длине волны $\lambda$. Однако поперечные пространственные частоты порядка $k$ соответствуют плоским волнам, распространяющимся по отношению к основному направлению волн под углом, приближающимся к прямому. Чтобы в измерениях дифракционного изображения были представлены такие волны, необходима очень большая апертура. Рассмотрим объект с размером $\delta y$, который мы наблюдаем с расстояния $x$. Характерная дифракционная расходимость волны составляет $\lambda / \delta y$, поэтому необходимый размер синтезированной апертуры оценивается величиной

$$a = \frac{\lambda x}{\delta y}. \tag{3.5.2}$$

И наоборот, если измерения выполнены на синтезированной апертуре $a$, то предельное разрешение можно оценить величиной

$$\delta y = \lambda \min\left(1, \frac{x}{a}\right). \tag{3.5.3}$$

**Пример: радиозатменное зондирование колец Сатурна**

Одно из применений метода обращения волнового фронта, или обратного распространения, описано в [9], где этим методом были обработаны дифракционные изображения колец Сатурна. Кольца просвечивались сигналами на

длинах волн 3.6 и 13 см, излучаемых спутником и принимаемых на Земле. Геометрия наблюдений приведена на рис. 5. В силу принципа взаимности можно считать, что волна приходит с Земли, дифрагирует на кольцах, которые можно представить тонким центрально-симметричным амплитудно-фазовым экраном с плотностью $T(\rho)$, где $\rho$ – расстояние от центра планеты. В силу большого расстояния от Сатурна до Земли падающую волну можно считать плоской. Тогда принимаемое поле можно записать следующим образом [9]:

$$E_c(t) = E_0 \frac{\sin B}{i\lambda} \int T(\rho) \exp(ik\mathbf{u}_i\boldsymbol{\rho}) \frac{\exp\left(ik\left|\mathbf{R}_c(t) - \boldsymbol{\rho}\right|\right)}{\left|\mathbf{R}_c(t) - \boldsymbol{\rho}\right|} d\boldsymbol{\rho}, \qquad (3.5.4)$$

где $\mathbf{R}_c(t)$ – траектория движения космического аппарата, $\boldsymbol{\rho}$ – радиус-вектор в плоскости колец, $\mathbf{u}_i$ – направление падающей волны, $B$ – угол между вектором $\mathbf{u}_i$ и плоскостью колец (рис. 5). Это выражение записано в предположении, что размер освещенной области колец мал по сравнению с расстоянием от спутника до колец, что позволяет приближенно считать угол $B$ не зависящим от $\boldsymbol{\rho}$. Процедура восстановления структуры колец соответствует процедуре пересчета принятого поля в плоскость колец, где поле равно $T(\rho)\exp(ik\mathbf{u}_i\boldsymbol{\rho})$, а фактор $\exp(ik\mathbf{u}_i\boldsymbol{\rho})$ определяется известной геометрией наблюдений. В данном случае невозможно измерить поле на 2-мерной поверхности, измеряется лишь поле вдоль траектории движения спутника. Однако и сама структура колец обладает симметрией, что позволяет свести задачу к одномерному интегральному уравнению. Измеряемое поле удобно параметризовать не временем, а геометрической величиной. Введем пространственные декартовы координаты $(x, y, z)$, где оси $x$ и $y$ лежат в плоскости колец, и ось $x$ направлена вдоль проекции вектора $\mathbf{u}_i$ на плоскость колец.

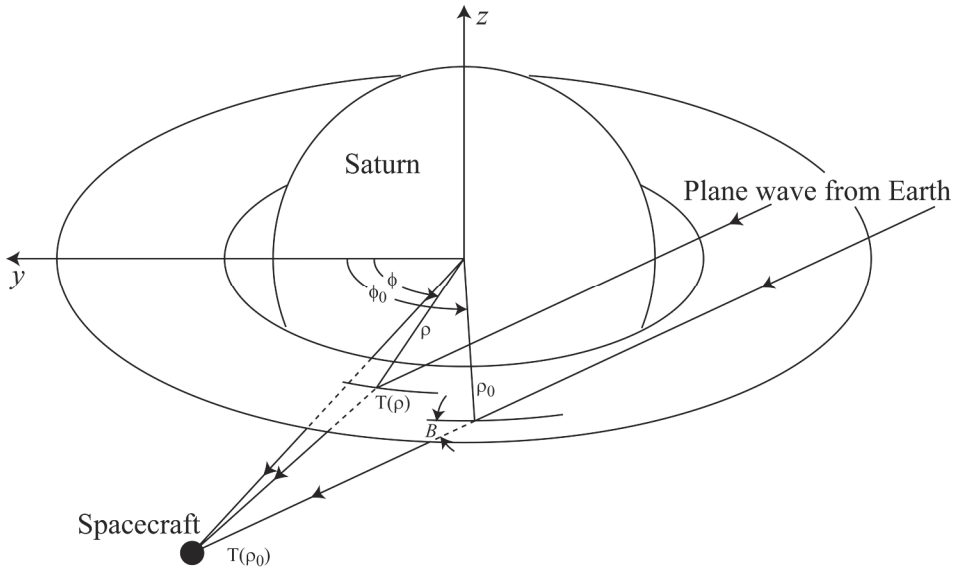



**Рис. 5.** Геометрия зондирования колец Сатурна

В плоскости колец введем полярные координаты (ρ, ϕ), где угол ϕ отсчитывается от оси *x*. Тогда точка пересечения плоскости колец и прямого луча между источником и приемником равна $\boldsymbol{\rho}_0 = (\rho_0, \phi_0)$, и переменную $\rho_0$ можно считать параметром траектории, определяемым через зависимости $\mathbf{R}_c(t)$, $\rho_0(t)$, $\phi_0(t)$, которые являются параметрической формой задания зависимостей $\mathbf{R}_c(\rho_0)$, $\phi_0(\rho_0)$. Удобно нормализовать принимаемое поле на опорное поле, которое наблюдалось бы в отсутствие колец:

$$\hat{T}(\rho_0) = \left(\frac{E_c}{E_0}\right) \exp\left(-ik\mathbf{u}_i \mathbf{R}_c\right). \tag{3.5.5}$$

Одномерное уравнение можно записать следующим образом:

$$\hat{T}(\rho_0) = \int K(\rho_0, \rho)\, T(\rho)\, d\rho, \tag{3.5.6}$$

где ядро равно

$$K(\rho_0, \rho) = \frac{\sin B}{i\lambda} \int \frac{\exp\left(ik\left(\mathbf{u}_i\left(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{R}_c(\rho_0)\right) + \left|\mathbf{R}_c(\rho_0) - \boldsymbol{\rho}\right|\right)\right)}{\left|\mathbf{R}_c(\rho_0) - \boldsymbol{\rho}\right|} \rho\, d\phi, \tag{3.5.7}$$

и где ϕ – полярный угол в плоскости колец.

Полезно рассмотреть приемы построения приближенного решения этого уравнения, поскольку они часто применяются в волновых задачах. Амплитудный множитель $\left|\mathbf{R}_c(\rho_0) - \boldsymbol{\rho}\right|^{-1}$ мало меняется в освещенной области, поэтому его можно заменить на $\left|\mathbf{R}_c(\rho_0) - \boldsymbol{\rho}_0\right|^{-1} = D^{-1}$ и вынести из-под интеграла. Эйконал подынтегрального выражения обозначим $\psi(\rho_0, \phi_0; \rho, \phi)$. Тогда ядро можно записать следующим образом:

$$K(\rho_0, \rho) = \frac{\rho \sin B}{i\lambda D} \int \exp\left(ik\psi(\rho_0, \phi_0; \rho, \phi)\right) d\phi. \tag{3.5.8}$$

Воспользуемся соотношениями в системе координат (*x*, *y*, *z*):

$$\begin{aligned} &\mathbf{u} = (\cos B, 0, \sin B), \quad \boldsymbol{\rho} = (\rho\cos\phi, \rho\sin\phi, 0), \\ &\mathbf{R}_c = \boldsymbol{\rho}_0 + D\mathbf{u}_i = (\rho_0\cos\phi_0 + D\cos B, \rho_0\sin\phi_0, D\sin B). \end{aligned} \tag{3.5.9}$$

Отсюда следует:

$$\mathbf{u}_i(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{R}_c) = \mathbf{u}_i(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0 - D\mathbf{u}_i) = \cos B(\rho\cos\phi - \rho_0\cos\phi_0) - D,$$

$$\left|\mathbf{R}_c(\rho_0) - \boldsymbol{\rho}\right| = \left((\rho_0\cos\phi_0 - \rho\cos\phi + D\cos B)^2 + (\rho_0\sin\phi_0 - \rho\sin\phi)^2 + D^2\sin^2 B\right)^{1/2}. \tag{3.5.10}$$

Обозначая $\mathbf{u}_i(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0) = -\xi$, второе выражение можно записать как

$$\begin{aligned} \left|\mathbf{R}_c(\rho_0) - \boldsymbol{\rho}\right| &= \left(1 + 2D\xi + (\rho_0\cos\phi_0 - \rho\cos\phi)^2 + (\rho_0\sin\phi_0 - \rho\sin\phi)^2\right)^{1/2} = \\ &= \left(D^2 + 2D\cos B(\rho_0\cos\phi_0 - \rho\cos\phi) + \rho_0^2 + \rho^2 - 2\rho\rho_0\cos(\phi_0 - \phi)\right)^{1/2}. \end{aligned} \tag{3.5.11}$$

Обозначая $\rho_0^2+\rho^2-2\rho\rho_0\cos(\phi_0-\phi)=\eta$, можно записать эйконал как

$$\psi(\rho_0,\phi_0;\rho,\phi)=\sqrt{D^2+2D\xi+\eta}-D-\xi. \tag{3.5.12}$$

Выражение (3.5.8) является осциллирующим интегралом, и основной вклад в этот интеграл дает окрестность точки стационарной фазы $\phi_s$, где $\partial\psi/\partial\phi=0$. Метод стационарной фазы, играющий важную роль в построении приближенных решений волновых задач, позволяет оценивать такие интегралы. Разложим эйконал в окрестности точки $\phi_s$ до членов второго порядка:

$$\psi(\rho_0,\phi_0;\rho,\phi)=\psi(\rho_0,\phi_0;\rho,\phi_s)+\frac{\psi''_\phi}{2}(\phi-\phi_s)^2 \tag{3.5.13}$$

и вычислим полученный гауссов интеграл:

$$\begin{aligned}K(\rho_0,\rho)&=\frac{\rho\sin B}{i\lambda D}\exp\left(ik\psi(\rho_0,\phi_0;\rho,\phi_s)\right)\int\exp\left(ik\frac{\psi''_\phi}{2}(\phi-\phi_s)^2\right)d\phi=\\&=\frac{\rho\sin B}{i\lambda D}\sqrt{\frac{2\pi}{ik\psi''_\phi}}\exp\left(ik\psi(\rho_0,\phi_0;\rho,\phi_s)\right).\end{aligned} \tag{3.5.14}$$

Дальнейшие приближения основаны на том, что при $\rho=\rho_0$ точка стационарной фазы равна $\phi_s=\phi_0$, поэтому можно раскладывать эйконал и его производные по $\phi$ по произведениям степеней $\rho-\rho_0$ и $\phi-\phi_0$, пользуясь тем, что $\rho-\rho_0\ll D$ и $\phi-\phi_0\ll 2\pi$. Положим $\phi=\phi_0$ и выпишем главные члены разложений по степеням $\rho-\rho_0$:

$$\begin{aligned}\psi_0&=\frac{1}{2}\left(1-\cos^2 B\cos^2\phi_0\right)\frac{(\rho-\rho_0)^2}{D},\\ \psi'_{\phi,0}&=\cos^2 B\cos\phi_0\sin\phi_0\rho_0\frac{\rho-\rho_0}{D},\\ \psi''_{\phi,0}&=\left(1-\cos^2 B\sin^2\phi_0\right)\frac{\rho_0^2}{D}.\end{aligned} \tag{3.5.15}$$

Тогда для эйконала можно записать разложение по степеням $\phi-\phi_0$:

$$\psi=\psi_0+\psi'_{\phi,0}(\phi-\phi_0)+\frac{1}{2}\psi''_{\phi,0}(\phi-\phi_0)^2. \tag{3.5.16}$$

Из условия $\partial\psi/\partial\phi=0$ находим первое приближение $\phi_s$:

$$\phi_s=\phi_0-\frac{\psi'_0}{\psi''_0}=\phi_0-\frac{\cos^2 B\cos\phi_0\sin\phi_0}{1-\cos^2 B\sin^2\phi_0}\frac{\rho-\rho_0}{D}. \tag{3.5.17}$$

Соответствующий эйконал равен

$$\psi=\psi_0-\frac{1}{2}\frac{(\psi'_0)^2}{\psi''_0}=\frac{1-\cos^2 B\sin^2\phi_0}{\sin^2 B}\frac{(\rho-\rho_0)^2}{2D}. \tag{3.5.18}$$

Фаза $k\psi$ может быть записана как

$$k\psi = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\rho - \rho_0}{F}\right)^2, \qquad (3.5.19)$$

где $F$ – френелевский масштаб, равный в данном случае

$$F = \left(\frac{\lambda D}{2}\frac{1-\cos^2 B\sin^2\phi_0}{\sin^2 B}\right)^{1/2}. \qquad (3.5.20)$$

При использовании приближений для фазы (3.5.19) и ее второй производной $\psi''_\phi$ (3.5.15) и с учетом того, что в амплитудном множителе $\rho / \rho_0 \approx 1$, одномерное преобразование (3.5.6) сводится к свертке:

$$\hat{T}(\rho_0) = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}F}\int \exp\left(ik\frac{\pi}{2}\left(\frac{\rho-\rho_0}{F}\right)^2\right) T(\rho)\, d\rho,. \qquad (3.5.21)$$

Такое интегральное преобразование называется преобразованием Френеля. К преобразованиям такого типа сводятся дифракционные интегралы в приближении малых углов рассеяния. В частности, преобразование Френеля можно получить из приближенного вакуумного пропагатора (3.4.9); в такой же форме записывается решение параболического уравнения (3.2.13). Формула обращения имеет симметричный вид [10]:

$$T(\rho) = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2}F}\int \exp\left(-ik\frac{\pi}{2}\left(\frac{\rho-\rho_0}{F}\right)^2\right) \hat{T}(\rho_0)\, d\rho_0,. \qquad (3.5.22)$$

Это решение позволяет восстанавливать структуру колец по результатам радиопросвечивания.

**Анализ ионосферных неоднородностей**

В работах [11, 12] метод обратного распространения был применен для анализа спорадических слоев Е ионосферы. Структура неоднородностей поля электронной концентрации в ионосфере достаточно сложна. Ионосферу можно представить как комбинацию локально сферически-слоистых и случайных неоднородностей.

Геометрия обратного распространения при обработке радиозатменных данных представлена на рис. 6, где источник для простоты помещен на бесконечности. В общем случае поле измеряется вдоль орбиты низкоорбитального спутника (LEO – Low Earth Orbiter). Хотя и передатчик, и приемник движутся в процессе измерений, движение передатчика, расположенного на спутнике GPS, существенно медленнее, и есть приближение, позволяющее свести задачу к стационарному источнику. Кроме того, движение луча, соединяющего источник и приемник, не является чисто вертикальным. Однако можно пренебречь боковыми движениями луча и считать, что все лучи лежат в одном вертикальном сечении атмосферы. Эти приближения будут детально описаны в дальнейшем.

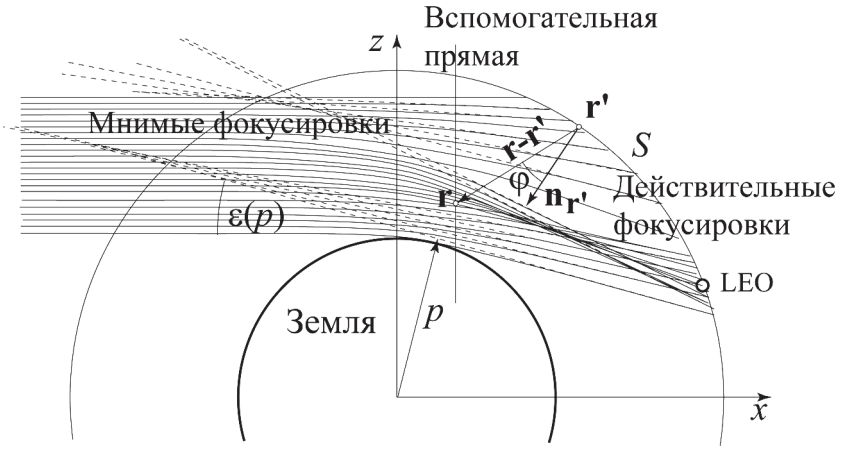



**Рис. 6.** Геометрия обратного распространения при обработке радиозатменных данных

Идея метода обратного распространения применительно к исследованию ионосферы заключается в том, чтобы вычислить поле обратного распространения во всей плоскости радиозахода и анализировать его амплитуду. Каждая неоднородность может быть представлена как линза. Такая случайная система линз приведет к сложной картине измеряемого поля: будут возникать фокусировки и дефокусировки. Достаточно сильные фокусировки будут приводить к многолучевому распространению, когда в одну точку приходит сразу несколько лучей. Обратное распространение соответствует обращению прямых лучей. Рассмотрим случай, когда имеется всего одна локализованная неоднородность. В этом случае обращение лучей приведет к тому, что амплитуда поля обратного распространения окажется наиболее близкой к невозмущенному значению, т.е. к амплитуде падающей волны в окрестности этой неоднородности. Пересчет поля за неоднородность начнет приводить к мнимым фокусировкам, где флуктуации амплитуды снова усилятся. Подчеркнем, что поле обратного распространения не равно фактическому полю в плоскости радиозахода, поскольку наша процедура обратного распространения использует вакуумные решения, а сама среда неизвестна. Таким образом, идея метода обратного распространения заключается в сохранении направлений принятых лучей.

Пользуясь решением граничной задачи (3.3.13), запишем формулу обратного распространения в двумерном приближении:

$$u(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{k}{2\pi}} \int_S u_0(\mathbf{y}) \cos\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) \frac{\exp\left(-ik|\mathbf{x}-\mathbf{y}| + i\frac{\pi}{4}\right)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{1/2}} dS_{\mathbf{y}}, \qquad (3.5.23)$$

где $u_0(\mathbf{y})$ – волновое поле вдоль эффективной орбиты спутника LEO $S_{\mathbf{y}}$, и $u(\mathbf{x})$ – волновое поле, пересчитанное в произвольную точку вертикальной плоскости радиозахода. Дифракционные интегралы прямого (3.3.13) и обратного

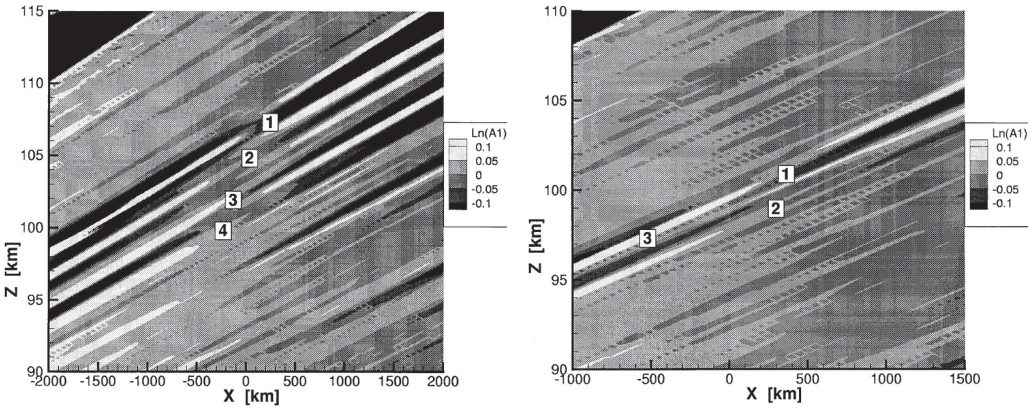



**Рис. 7.** Примеры амплитуд поля обратного распространения для сеансов наблюдений 2 февраля 1997 г. (эксперимент GPS/MET). Цифры показывают предположительную локализацию неоднородностей

(3.5.23) распространения образуют пару взаимно обратных интегральных преобразований. В малоугловом приближении для задачи прямого и обратного распространения поля с одной прямой на другую они переходят в прямое и обратное преобразования Френеля (3.5.21) и (3.5.22).

Дифракционный интеграл (3.5.23) достаточно вычислить лишь для точек **x**, лежащих на некоторой вспомогательной прямой. С этой прямой можно пересчитывать поле на другие параллельные ей прямые, пользуясь более быстрым алгоритмом, основанным на пространственных спектрах (3.4.4) и использующим быстрое преобразование Фурье.

Пример обработки данных эксперимента GPS/MET (длина волны около 20 см) приведен на рис. 7 [11]. Структура поля обратного распространения показывает направления лучей, и хорошо просматриваются фокусировки и дефокусировки. Предполагаемые неоднородности локализуются между областями фокусировок и дефокусировок. В примере на левой панели неоднородности локализованы в окрестности перигеев лучей, что позволяет выдвинуть предположение об их сферически-слоистой структуре. На правой панели неоднородности заметно смещены по отношению к перигею, что указывает на заметные нарушения сферической симметрии.

Как показано в [12], двумерное приближение не всегда достаточно точно для описания распространения дециметровых волн в ионосфере. Поэтому метод обратного распространения для обработки радиозатменных наблюдений в ионосфере носит скорее качественный характер.

### Восстановление параметров нейтральной атмосферы

В работах [13, 14] метод обратного распространения был применен в комбинации с приближением фазового экрана для восстановления параметров нейтральной атмосферы.

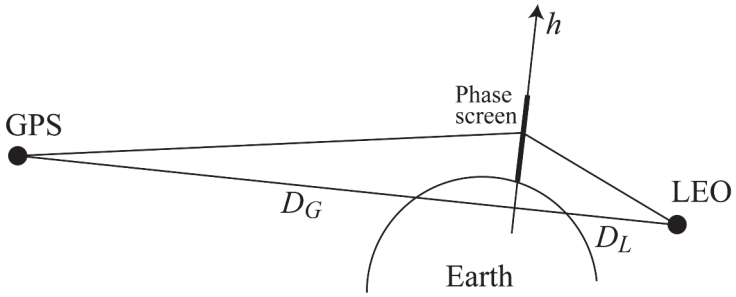



**Рис. 8.** Геометрия восстановления параметров нейтральной атмосферы методом обратного распространения в приближении фазового экрана

Обозначая через $\Psi(h)$ набег оптического пути в фазовом экране (рис. 8), можно записать принимаемое поле в приближении рассеяния на малый угол следующим образом:

$$E(h_b) = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{\lambda D}} \int A(h) \exp\left( i\pi \frac{(h-h_b)^2}{\lambda D} + i\Psi(h) \right) dh, \qquad (3.5.24)$$

где $A(h)$ – амплитудная функция, учитывающая вариации амплитуды падающей волны на экране, $D = D_G D_L / (D_G + D_L)$ – приведенное расстояние наблюдения, $h$ – высота в фазовом экране, $h_b$ – прицельная высота в точке наблюдения. Фазовый экран не меняет амплитуду падающего поля. Однако можно рассмотреть и амплитудно-фазовый экран, в котором амплитудная функция может дополнительно описывать изменения амплитуды за счет рефракционных эффектов и поглощения в атмосфере. В данном случае мы рассматриваем лишь фазовые эффекты, а амплитудная функция неважна. Формула обращения имеет следующий вид:

$$A(h)\exp\left(i\Psi(h)\right) = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{\lambda D}} \int E(h_b) \exp\left( i\pi \frac{(h-h_b)^2}{\lambda D} \right) dh_b, \qquad (3.5.25)$$

Эта формула позволяет восстановить $\Psi(h)$ в приближении постоянного приведенного расстояния наблюдения $D$. Формула (3.5.25) реализует обратное распространение принятого поля в плоскость фазового экрана, описывающего атмосферу. Аргумент поля обратного распространения $\Psi(h)$ пропорционален интегралу от показателя преломления вдоль линии визирования:

$$\Psi(h) = k \int n\left(\mathbf{r}(h,s)\right) ds, \qquad (3.5.26)$$

где $\mathbf{r}(h, s)$ – уравнение луча с высотой перигея $h$, параметризованной расстоянием $s$. Показатель преломления можно восстановить, предположив сферическую симметрию атмосферы $n = n(r)$. В этом случае задача сведется к одномерному линейному интегральному уравнению. Методы решения уравнений такого типа будем рассматривать ниже в разделе 6.2. Для реальной геометрии наблюдения расстояние $D$ является функцией $D(h)$, что можно приближенно учесть при помощи нелинейной замены координат $u = h / \sqrt{\lambda D(h)}$ и

$u_b = h_b / \sqrt{\lambda D(h_b)}$. В любом случае основным ограничением этого метода является низкая точность приближения фазового экрана на высотах менее 5 км, которое начинает давать заметные систематические ошибки. Ниже мы увидим, что именно в этой области высот критичным является применение дифракционных методов, являющихся развитием идеи обратного распространения и позволяющих улучшить разрешение по сравнению с масштабом Френеля. Это объясняет, почему обсуждаемый метод, получивший название френелевской инверсии, не получил распространения в системах обработки данных радиозатменного зондирования.

В работах [15–17] метод обратного распространения был применен для определения лучевой структуры волнового поля в многолучевых областях. При этом используется то же самое уравнение обратного распространения (3.5.23). Измеренное поле пересчитывается на некоторую вспомогательную прямую (рис. 6), и используется только фаза поля обратного распространения. Однако, в отличие от метода френелевской инверсии, при этом не используется приближение фазового экрана. Процедура обратного распространения сохраняет направления лучей, поэтому у каждого луча остается неизменным как прицельный параметр $p$, так и угол рефракции $\varepsilon$. Таким образом, если удастся расположить вспомогательную прямую между действительными и мнимыми фокусировками, то поле обратного распространения будет соответствовать ситуации однолучевого распространения. В этом случае производная фаза в каждой точке будет однозначно связана с направлением (единственного) луча, приходящего в эту точку.

Важным в данной задаче является понятие каустик, определяемых как огибающие семейства лучей. Фокусировки поля происходят на каустиках. Структура действительных и мнимых каустик определяется зависимостью $\varepsilon(p)$. Если мы примем для простоты, что падающая волна плоская, то семейство всех прямых лучей можно описать уравнением

$$x \sin \varepsilon(p) + y \cos \varepsilon(p) = p. \qquad (3.5.27)$$

Чтобы вывести уравнение для каустик, нужно продифференцировать уравнение (3.5.27) по параметру семейства лучей $p$ и решить получающуюся систему из двух уравнений. В результате получается уравнение для огибающей:

$$\begin{aligned} x &= p \sin \varepsilon(p) + \frac{\cos \varepsilon(p)}{\varepsilon'(p)}, \\ y &= p \cos \varepsilon(p) - \frac{\sin \varepsilon(p)}{\varepsilon'(p)}. \end{aligned} \qquad (3.5.28)$$

Если всюду $|\varepsilon'(p)| < \infty$, то огибающая представляется как семейство непрерывных каустик двух видов: 1) действительные каустики, соответствующие $\varepsilon'(p) > 0$, возникающие вследствие фокусировок; и 2) мнимые каустики, соответствующие $\varepsilon'(p) < 0$, возникающие вследствие дефокусировок. При этом каждый луч, для которого $\varepsilon'(p) \neq 0$, касается ровно одной каустики. Точки перигея прямых лучей описываются уравнением

$$x = p\sin\varepsilon(p),$$
$$y = p\cos\varepsilon(p). \qquad (3.5.29)$$

и лежат между действительными и мнимыми каустиками, т.е. в однолучевой области. Расстояние между действительными и мнимыми каустиками оценивается как $\frac{2}{\varepsilon'(p)}$, т.е. оно минимально в области сильной рефракции.

Применительно к обработке радиозатменных данных именно этот метод получил название метода обратного распространения. По сравнению с методом френелевской инверсии, он оказывается более точным, поскольку не использует приближения фазового экрана. Метод обратного распространения позволяет восстановить профиль угла рефракции $\varepsilon(p)$. Уравнение, связывающее $\varepsilon(p)$ и $n(r)$, и его решение мы рассмотрим в разделе 6.2. Этот метод не всегда работает, поскольку в ряде случаев действительные и мнимые каустики могут перекрываться и оказывается невозможным найти положение вспомогательной прямой (или даже вспомогательную кривую) так, чтобы она лежала в однолучевой области.

И метод френелевской инверсии, и метод обратного распространения были первыми шагами в том направлении, которое привело к созданию эффективных и высокоточных методов, использующих минимум предположений и позволяющих восстанавливать лучевую структуру волнового поля и улучшать разрешение по сравнению с френелевским масштабом. Однако для понимания этих методов необходима подготовительная работа, которой мы займемся в следующей главе.

## Литература


1. Обращение волнового фронта оптического излучения в нелинейных средах: Сборник научных трудов. Горький: ИПФ АН СССР, 1979. 205 с.
2. Обращение волнового фронта оптического излучения в нелинейных средах: Сборник научных трудов. Горький: ИПФ АН СССР, 1982. 247 с.
3. *Зельдович Б.Я., Пилипецкий Н.Ф., Шкунов В.В.* Обращение волнового фронта. М.: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит., 1985. 240 с.
4. *Дмитриев В.Г.* Нелинейная оптика и обращение волнового фронта. М.: Физматлит, 2003. 256 с.
5. *Gitin A.V.* Huygens–Feynman–Fresnel principle as the basis of applied optics // Applied Optics. 2013. V. 52, No. 31. P. 7419–7434.
6. *Фейнман Р., Хибс А.* Квантовая механика и интегралы по траекториям. М.: Мир, 1968. 382 с.
7. *Kleinert H.* Path integrals in quantum mechanics, statistics, polymer physics, and financial markets. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2004. 1505 p.
8. *Кляцкин В.И.* Стохастические уравнения. Теория и ее приложения к акустике, гидродинамике и радиофизике. Т. 2. Когерентные явления в статистических динамических системах. М.: Физматлит, 2008. 344 с.
9. *Marouf E.A., Tyler G.L., Rosen P.A.* Profiling Saturn rings by radio occultation // Icarus. 1986. V. 68, No. 1. P. 120–166.
10. *Bracewell R.N.* The Fourier transform and its applications. New York: McGraw-Hill, 1978.
11. *Gorbunov M.E., Gurvich A.S., Shmakov A.V.* Back-propagation and radio-holographic methods for investigation of sporadic ionospheric E-layers from Microlab-1 data // Int. Journal of Remote Sensing. 2002. V. 23, No. 4. P. 675–685.

12. *Sokolovskiy S., Schreiner W., Rocken C., Hunt D.* Detection of high-altitude ionospheric irregularities with GPS/MET // Geophysical Research Letters. 2002. V. 29, No. 3. 10.1029/2001gl013398.

13. *Melbourne W.G., Davis E.S., Duncan C.B., Hajj G.A., Hardy K.R., Kursinsk E.R., Meehan T.K*., *Young L.E., Yunck T.P.* The application of spaceborne GPS to atmospheric limb sounding and global change monitoring. JPL publication 94-18, 138 p. JPL, Pasadena, CA, USA, 1994.

14. *Mortensen M.D., Høeg P.* Inversion of GPS occultation measurements using Fresnel diffraction theory // Geophysical Research Letters. 1998. V. 25, No. 13. P. 2441–2444.

15. *Gorbunov M.E., Gurvich A.S.* Algorithms of inversion of Microlab-1 satellite data including effects of multipath propagation // Int. Journal of Remote Sensing. 1998. V. 19, No. 12. P. 2283–2300.

16. *Gorbunov M.E., Gurvich A.S.* Microlab-1 experiment: multipath effects in the lower troposphere // Journal of Geophysical Research. 1998. V. 103, No. D12. P. 13819–13826.

17. *Mortensen M.D., Linfield R.P., Kursinski E.R.* Vertical resolution approaching 100 m for GPS occupations of the Earth's atmosphere // Radio Science. 1999. V. 34, № 6. P. 1475–1484.

# 4. Асимптотические методы решения волновых задач

## 4.1. Геометрическая оптика

### Исходные принципы

Система понятий геометрической оптики уже использовалась в этой книге. Основным понятием геометрической оптики является луч, т.е. линия, вдоль которой происходит перенос энергии волнового поля. Если на пути распространения волны поместить поглощающее препятствие, то в рамках геометрической оптики возникнет область тени, в которой поле будет полностью отсутствовать. Между областью света и тенью при этом имеется резкая граница, и любой луч, проходящий на сколь угодно малом расстоянии от препятствия, никак не взаимодействует с ним. Разумеется, такая картина является приближенной. В волновой задаче возникает френелевский масштаб $\sqrt{\lambda L}$, который зависит не только от длины волны λ, но и от расстояния наблюдения $L$. Френелевский масштаб позволяет ввести понятие «физического луча» [1], т.е. той области пространства, которая существенно влияет на поле, наблюдаемое в заданной точке. В частности, препятствие не будет влиять на наблюдаемое поле, если соответствующий физический лучевой объем не перекрывается с препятствием, т.е. если (идеальный) луч проходит на расстоянии от препятствия, большем зоны Френеля. Если же объем физического луча перекрывается с препятствием, то существенную роль начинают играть дифракционные эффекты, приводящие к тому, что волна начинает огибать препятствие и освещать область геометрооптической тени. Поскольку объем физического луча убывает с уменьшением длины волны λ, при заданной геометрии наблюдений поле будет тем лучше описываться геометрической оптикой, чем короче длина волны. В силу этого геометрическая оптика относится к классу коротковолновых асимптотических решений волнового уравнения.

Геометрическая оптика является отправной точкой для построения более сложных и точных асимптотических методов, таких как метод канонического оператора Маслова и метод интегральных операторов Фурье, или операторов Фурье–Маслова. В данном разделе мы рассмотрим построение геометрической оптики.

Геометрическую оптику можно строить как для псевдодифференциального уравнения (3.2.12) или параболического уравнения (3.2.13), записанных с учетом условия излучения, так и для исходного уравнения Гельмгольца (3.1.41). В уравнениях (3.2.12) и (3.2.13) имеется два вида координат: координата распространения $x$ и поперечные координаты $\mathbf{r}_\perp = (y, z)$. В уравнении Шредингера (3.4.18) роль координаты распространения играет время $t$, а «поперечными» являются все пространственные координаты. Соответственно имеется два вида дифференциальных операторов: оператор энергии, соответствующий времени или координате распространения, и операторы импульса, соответствующие остальным координатам. Для построения геометрической

оптики удобно все координаты рассматривать как однородные $\mathbf{x} = (x_1,..., x_n)$, где $x_1$ – координата распространения или время, а вместо оператора энергии рассматривать соответствующий импульс $\hat{p}_1 = -\hat{E}$. Уравнения (3.2.12), (3.2.13) и (3.2.14) мы запишем в общем виде в расширенном фазовом пространстве:

$$\left(\hat{p}_1 + \hat{H}\left(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{p}}\right)\right)u \equiv \mathcal{H}\left(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{p}}\right)u = 0. \qquad (4.1.1)$$

В уравнение Гельмгольца все координаты изначально входят симметричным образом.

Оператор Гамильтона (гамильтониан) $\mathcal{H}\left(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{p}}\right)$ представляет собой функцию от дифференциальных операторов (псевдодифференциальный оператор). В этом разделе мы будем считать, что эта функция представима в качестве полинома или ряда по полиномам. Это предположение упрощает выкладки, поскольку все вычисления алгебраизуются, не теряя общности. Достаточно выписать формулу, справедливую для любого полинома, и она будет применима для функций общего вида.

Этот подход, ориентированный на решение физических задач, а не на достижение математической строгости, проще вычислений, приводимых в [2, 3], но приводит к тем же результатам и позволяет достичь замкнутости и простоты изложения. С другой стороны, читатель, освоивший излагаемый материал, сможет успешно решать физические задачи, связанные с распространением волн в атмосфере и других неоднородных средах. Этот же подход мы будем применять на протяжении всей этой главы, посвященной асимптотическим методам.

**Коммутация гамильтониана и осциллирующей экспоненты**

Геометрическая оптика основана на том, что асимптотическое решение волнового уравнения ищется в виде осциллирующей функции [1]

$$u\left(\mathbf{x}\right) = A\left(\mathbf{x}\right)\exp\left(ik\Psi\left(\mathbf{x}\right)\right), \qquad (4.1.2)$$

где $A(\mathbf{x})$ – амплитуда и $\Psi(\mathbf{x})$ – эйконал. Амплитуда и эйконал считаются гладкими функциями, мало меняющимися на масштабах порядка длины волны. Основную роль в дальнейшем будет играть формула коммутации гамильтониана с быстро осциллирующей экспонентой, которую мы сейчас выведем.

Начнем с уточнения определения гамильтониана. Как мы видели в разделе 3.4, координаты $x_i$ можно также считать операторами (умножение на соответствующую координату). Операторы $x_i$ не коммутируют с операторами $\hat{p}_i$, их коммутатор равен

$$\left[x_i, \hat{p}_i\right] = x_i \circ \hat{p}_i - \hat{p}_i \circ x_i = \frac{i}{k}, \qquad (4.1.3)$$

где символ $\circ$ использован для обозначения композиции операторов:

$$\left[x_i, \hat{p}_i\right]f = x_i\hat{p}_i f - \hat{p}_i\left(x_i f\right) = \left(\hat{p}_i x_i\right)f = \frac{i}{k}f. \qquad (4.1.4)$$

Любые другие пары операторов коммутируют:

$$\begin{aligned}&\left[x_i, x_j\right]=0;\quad \left[\hat{p}_i, \hat{p}_j\right]=0;\\ &\left[x_i, \hat{p}_j\right]=0,\quad i\neq j.\end{aligned} \tag{4.1.5}$$

Некоммутативность делает построение операторной функции $\mathcal{H}\left(\mathbf{x},\hat{\mathbf{p}}\right)$ неоднозначным. Так, например, выражения $x^2+2x\hat{p}+\hat{p}^2$ и $\left(x+\hat{p}\right)^2=x^2+x\hat{p}+\hat{p}x+\hat{p}^2$ не равны друг другу в операторной алгебре, хотя совпадают в обычной алгебре. Чтобы установить связь между алгебраическим и операторным выражениями гамильтониана, необходимо задать упорядочение операторов. Мы договоримся, что первыми действуют импульсы. Это символически записывают как $\mathcal{H}\left(\overset{2}{\mathbf{x}},\overset{1}{\hat{\mathbf{p}}}\right)$ [4]. Алгебраическая функция $\mathcal{H}\left(\mathbf{x},\mathbf{p}\right)$ называется символом оператора. Очевидно, что соответствие между операторами и символами может устанавливаться лишь с учетом заданного упорядочения операторов. Кроме того, некоммутативность приводит к тому, что, например, символ композиции операторов вообще говоря не равен произведению их символов. Вопросы исчисления функций от некоммутативных операторов мы рассмотрим в главе 7.

Рассмотрим действие оператора $\mathcal{H}\left(\mathbf{x},\hat{\mathbf{p}}\right)$ на осциллирующую экспоненту $A\left(\mathbf{x}\right)\exp\left(ik\Psi\left(\mathbf{x}\right)\right)$. Мы считаем, что оператор $\mathcal{H}\left(\mathbf{x},\hat{\mathbf{p}}\right)$ полиномиально зависит от $\hat{\mathbf{p}}$, т.е. является линейной комбинацией мономов вида $a\left(\mathbf{x}\right)\hat{p}_{i_1}\ldots\hat{p}_{i_n}$, где $a(\mathbf{x})$ – гладкая функция. Поскольку действие $a(\mathbf{x})$ состоит просто в умножении на $a(\mathbf{x})$, достаточно рассмотреть моном $\hat{p}_{i_1}\ldots\hat{p}_{i_n}$. Действие каждого оператора импульса записывается следующим образом:

$$\hat{p}_i\left[A\left(\mathbf{x}\right)\exp\left(ik\Psi\left(\mathbf{x}\right)\right)\right]=\exp\left(ik\Psi\left(\mathbf{x}\right)\right)\left(\frac{\partial\Psi\left(\mathbf{x}\right)}{\partial x_i}+\hat{p}_i\right)A\left(\mathbf{x}\right). \tag{4.1.6}$$

Для монома имеем

$$\prod_k\hat{p}_{i_k}\left[A\left(\mathbf{x}\right)\exp\left(ik\Psi\left(\mathbf{x}\right)\right)\right]=\exp\left(ik\Psi\left(\mathbf{x}\right)\right)\prod_k\left(\frac{\partial\Psi\left(\mathbf{x}\right)}{\partial x_{i_k}}+\hat{p}_{i_k}\right)A\left(\mathbf{x}\right). \tag{4.1.7}$$

В результате мы получаем формулу коммутации гамильтониана с осциллирующей экспонентой, справедливую для любого монома, в том числе с координатными множителями, а значит и для их произвольной линейной комбинации:

$$\mathcal{H}\left(\mathbf{x},\hat{\mathbf{p}}\right)\left[A\left(\mathbf{x}\right)\exp\left(ik\Psi\left(\mathbf{x}\right)\right)\right]=\exp\left(ik\Psi\left(\mathbf{x}\right)\right)\mathcal{H}\left(\mathbf{x},\nabla\Psi+\hat{\mathbf{p}}\right)A\left(\mathbf{x}\right), \tag{4.1.8}$$

**Асимптотическое разложение**

Дальнейшее построение состоит в разложении выражения (4.1.8) по степеням малого параметра $(ik)^{-1}$. Для получения уравнения 0-го порядка достаточно опустить оператор $\hat{\mathbf{p}}$, являющийся величиной первого порядка. Это приводит к уравнению эйконала:

$$\mathcal{H}\left(\mathbf{x}, \nabla\Psi\right) = 0. \tag{4.1.9}$$

Получим уравнение 1-го порядка. Как и выше, достаточно получить формулу для оператора $\mathcal{H}\left(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{p}}\right)$, являющегося мономом, т.е. вычислить член 1-го порядка разложения следующего оператора:

$$\mathcal{H}\left(\mathbf{x}, \nabla\Psi + \hat{\mathbf{p}}\right) = \left(\nabla_{i_1}\Psi + \hat{p}_{i_1}\right) \circ \ldots \circ \left(\nabla_{i_n}\Psi + \hat{p}_{i_n}\right). \tag{4.1.10}$$

Все импульсы коммутируют между собой, и имеет место следующее соотношение коммутации:

$$[\hat{p}_i, \nabla_j\Psi] = \hat{p}_i\nabla_j\Psi = \hat{p}_j\nabla_i\Psi = [\hat{p}_j, \nabla_i\Psi], \tag{4.1.11}$$

откуда следует

$$\left[\left(\nabla_i\Psi + \hat{p}_i\right), \left(\nabla_j\Psi + \hat{p}_j\right)\right] = \left[\nabla_i\Psi, \hat{p}_j\right] + \left[\hat{p}_i, \nabla_j\Psi\right] = 0. \tag{4.1.12}$$

Поэтому оператор (4.1.10) не зависит от порядка индексов $i_k$, и его можно заменить на симметризованное выражение

$$\frac{1}{N!}\sum_{\sigma}\left(\nabla_{\sigma(1)}\Psi + \hat{p}_{\sigma(1)}\right) \circ \ldots \circ \left(\nabla_{\sigma(N)}\Psi + \hat{p}_{\sigma(N)}\right), \tag{4.1.13}$$

где суммирование выполняется по всем возможным $N$ перестановкам σ набора индексов $i_k$. Член 1-го порядка равен симметризованной сумме выражений вида

$$\begin{aligned}&\hat{p}_{\sigma(1)} \circ \nabla_{\sigma(2)}\Psi \ldots \nabla_{\sigma(N)}\Psi + \nabla_{\sigma(1)}\Psi\ \hat{p}_{\sigma(2)} \circ \nabla_{\sigma(2)}\Psi \ldots \nabla_{\sigma(N)}\Psi + \ldots \\ &\ldots + \nabla_{\sigma(1)}\Psi \ldots \nabla_{\sigma(N-1)}\Psi\ \hat{p}_{\sigma(1)}\end{aligned} \tag{4.1.14}$$

Это выражение следует привести к стандартной форме, в которой все импульсы стоят справа и действуют первыми. Для этого воспользуемся соотношением коммутации (4.1.11):

$$\hat{p}_i \circ \nabla_j\Psi = \left(\nabla_j\Psi\right)\hat{p}_i + [\hat{p}_i, \nabla_j\Psi] = \left(\nabla_j\Psi\right)\hat{p}_i + \hat{p}_i\nabla_j\Psi, \tag{4.1.15}$$

В каждом члене импульсы следует протаскивать направо, и каждое протаскивание будет приводить к появлению дополнительных членов вида

$$\nabla_{\sigma(1)}\Psi \ldots \widehat{\nabla_{\sigma(i)}\Psi} \ldots \widehat{\nabla_{\sigma(j)}\Psi} \ldots \nabla_{\sigma(n)}\Psi\left(\hat{p}_{\sigma(i)}\nabla_{\sigma(j)}\Psi\right), \tag{4.1.16}$$

где крышка означает, что соответствующие множители пропущены. Чтобы подсчитать число таких членов в конечном результате, достаточно заметить, что в силу симметрии в сумме выражений (4.1.14) в половине случаев $\hat{p}_i$ стоит левее $\nabla_j\Psi$ и в половине случаев правее. Следовательно, дополнитель-

ные члены со вторыми производными эйконала появятся в половине случаев для любой пары индексов $(i, j)$. Это позволяет записать ответ:

$$\frac{1}{ik}\left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial x_i}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p_i\,\partial p_j}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_i\,\partial x_j}\right], \tag{4.1.17}$$

где по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. В результате мы получаем уравнение переноса для амплитуды:

$$\left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial x_i}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p_i\,\partial p_j}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_i\,\partial x_j}\right] A = 0, \tag{4.1.18}$$

Уравнения эйконала (4.1.9) и переноса (4.1.18) являются основными уравнениями геометрической оптики или квазиклассического приближения квантовой механики. Получаемые решения являются главным членом асимптотики и не зависят от волнового числа $k$. Для построения приближений более высоких порядков амплитуду представляют в виде ряда по степеням параметра $(ik)^{-1}$ и находят поправки к уравнению переноса [1]. Однако такие приближения используются редко, поэтому мы их не рассматриваем.

Рассмотрим гамильтониан

$$\mathcal{H}\left(\mathbf{x},\mathbf{p}\right)=\frac{1}{2}\left(\mathbf{p}^2-n^2\left(\mathbf{x}\right)\right), \tag{4.1.19}$$

соответствующий уравнению Гельмгольца (3.1.41). Показатель преломления мы считаем действительной величиной и не рассматриваем диссипацию энергии в среде. Множитель 1/2 введен для удобства. Уравнения эйконала и амплитуды в приближении геометрической оптики имеют вид

$$\begin{aligned} &n^2=\left(\nabla\Psi\right)^2, \\ &\nabla_i\Psi\frac{\partial A}{\partial x_i}+\frac{1}{2}A\,\Delta\Psi=0. \end{aligned} \tag{4.1.20}$$

**Гамильтонова механика. Принцип Ферма**

Уравнение эйконала (4.1.9) является нелинейным уравнением в частных производных первого порядка относительно неизвестной функции $\Psi(\mathbf{x})$. В общем случае такие уравнения решаются методом характеристик. Как известно из любого стандартного курса по дифференциальным уравнениям, например [5], каждая интегральная поверхность может быть представлена как совокупность характеристических кривых, задаваемых уравнениями

$$dt=\frac{dx_i}{\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}}=-\frac{dp_i}{\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i}+p_i\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Psi}}=\frac{d\Psi}{p_i\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}}, \tag{4.1.21}$$

где $t$ – некоторый параметр, $\mathbf{p} = \nabla\Psi$. Задание начальных условий, т.е. градиента и начального значения эйконала в некоторой точке пространства однозначно задает как саму характеристическую кривую, так и значения эйконала вдоль нее. С учетом того, что наш гамильтониан $\mathcal{H}$ зависит только от про-

изводных эйконала, характеристические уравнения принимают вид гамильтоновой системы [6]:

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{x}}, \quad \dot{\Psi} = \mathbf{p}\dot{\mathbf{x}}, \tag{4.1.22}$$

где точка обозначает полную производную по параметру $t$ («времени»). Эти уравнения формализуют понятие луча как нормали к волновому фронту. В соответствии с этим направление луча совпадает с градиентом эйконала.

Уравнения Гамильтона являются выражением вариационного принципа. Каждый луч, соединяющий две заданные точки, минимизирует оптический путь Ψ. Чтобы прийти к этому результату, рассмотрим действие

$$S = \int_a^b \left(\mathbf{p}d\mathbf{x} - \mathcal{H}\,dt\right) = \int_a^b \left(\mathbf{p}\dot{\mathbf{x}} - \mathcal{H}\right) dt, \tag{4.1.23}$$

где интеграл берется по кривой, соединяющей заданные точки $a$ и $b$. Зададим вариации кривой в фазовом пространстве $\delta\mathbf{x}$ и $\delta\mathbf{p}$, такие, что на концах кривой $\delta\mathbf{x}\,\big|_{a,b} = 0$, а на $\delta\mathbf{p}$ не накладывается ограничений. Вариация действия равна

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_a^b \left( \delta\mathbf{p}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{p}\delta\dot{\mathbf{x}} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{x}}\delta\mathbf{x} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}}\delta\mathbf{x} \right) dt = \\ &= \mathbf{p}\delta\mathbf{x}\Big|_a^b + \int_a^b \left( \delta\mathbf{p}\left( \dot{\mathbf{x}} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}} \right) - \delta\mathbf{x}\left( \dot{\mathbf{p}} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{x}} \right) \right) dt, \end{aligned} \tag{4.1.24}$$

где член $\mathbf{p}\delta\dot{\mathbf{x}}$ проинтегрирован по частям. Приравнивая $\delta S$ к нулю и учитывая, что $\mathbf{p}\delta\mathbf{x}\big|_a^b = 0$ в силу граничных условий, для произвольных и независимых вариаций $\delta\mathbf{x}$ и $\delta\mathbf{p}$ мы получаем уравнения Гамильтона (4.1.22). Полная производная гамильтониана вдоль траекторий равна 0:

$$\dot{\mathcal{H}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}}\dot{\mathbf{p}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{x}}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{x}} = 0. \tag{4.1.25}$$

Если задавать начальные условия так, чтобы $\mathcal{H}(a, \mathbf{p}_0) = 0$, т.е. $|\mathbf{p}_0| = n(a)$, то гамильтониан будет равен 0 на экстремалях действия. С учетом этого мы приходим к вариационному принципу для укороченного действия [6]:

$$\Psi = \int_a^b \mathbf{p}d\mathbf{x}, \tag{4.1.26}$$

В теоретической механике этот принцип называется принципом Мопертюи (Эйлера–Лагранжа–Якоби) [6], а в оптике – принципом Ферма [1].

Справедливо и обратное утверждение. Зафиксируем некоторую точку $a$ и рассмотрим веер лучей, исходящих из этой точки и покрывающих некоторую область пространства. Лучи мы определяем как экстремали действия (4.1.23). Область считаем достаточно малой, чтобы в ней не возникало фокальных точек, т.е. чтобы в каждую точку приходил единственный луч. В этой области тем самым будет задана функция

$$S(\mathbf{x}) = \int_a^{\mathbf{x}} (\mathbf{p}d\mathbf{x}' - \mathcal{H}dt), \tag{4.1.27}$$

где интеграл берется вдоль луча, соединяющего точки $a$ и $\mathbf{x}$. Как и выше, этим задано поле эйконала $\Psi(\mathbf{x}) = S(\mathbf{x})$. Если рассмотреть вариацию концевой точки $\delta\mathbf{x}$, такую, что $\mathbf{p}\delta\mathbf{x} = 0$, то, в силу вариационного принципа и выражения (4.1.24) для вариации действия, должно выполняться $\delta\Psi = 0$. В вариационном исчислении это утверждение называется принципом трансверсальности [7]. А в рамках геометрической оптики это утверждение состоит в том, что импульсы являются нормалями к волновым фронтам. Таким образом, на основании вариационного принципа мы снова приходим к тому, что $\mathbf{p} = \nabla\Psi$ и построенное поле эйконала $\Psi(\mathbf{x})$ будет удовлетворять уравнению эйконала (4.1.9). Напомним, что в изотропной среде направление луча совпадает с направлением нормали к волновому фронту, а в анизотропной среде это, вообще говоря, не так.

Для гамильтониана (4.1.19) уравнения (4.1.22) приобретают вид

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{p}, \quad \dot{\mathbf{p}} = n\nabla n, \quad \dot{\Psi} = \mathbf{p}\dot{\mathbf{x}}. \tag{4.1.28}$$

Поскольку $|\mathbf{p}| = n$, из первого уравнения следует связь между параметром $t$ и длиной дуги лучевой траектории $s$:

$$dt = \frac{ds}{n}. \tag{4.1.29}$$

Отсюда получаем выражение для оптического пути:

$$\dot{\Psi} = n\frac{d\Psi}{ds} = \mathbf{p}^2 = n^2, \qquad d\Psi = n\,ds. \tag{4.1.30}$$

Уравнение переноса (4.1.18) с учетом уравнений гамильтоновой динамики можно переписать в следующем виде:

$$\left[\dot{\mathbf{x}}\nabla + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial p_i\,\partial p_j}\frac{\partial p_i}{\partial x_j}\right]A = 0, \tag{4.1.31}$$

где первый член соответствует простому переносу амплитуды вдоль лучевых траекторий без изменения, а второй член описывает эффекты, связанные с кривизной фазового фронта (фокусировка и дефокусировка). Для гамильтониана (4.1.19) это уравнение примет вид

$$\left[\dot{\mathbf{x}}\nabla + \frac{1}{2}\operatorname{div}\dot{\mathbf{x}}\right]A = 0, \tag{4.1.32}$$

эквивалентный

$$\left[\dot{\mathbf{x}}\nabla + \operatorname{div}\dot{\mathbf{x}}\right]A^2 = \operatorname{div}\left(\dot{\mathbf{x}}A^2\right) = 0. \tag{4.1.33}$$

Это уравнение означает, что поток вектора $\dot{\mathbf{x}}A^2$ через любую замкнутую поверхность равен 0. Если рассмотреть отрезок лучевой трубки, то поток через его поверхность будет складываться из положительного потока с одного конца трубки и отрицательного – с другой. Поток через боковые стенки равен 0.

Если площадь перпендикулярного сечения бесконечно малой трубки равна $d\sigma$, то поток вектора $\dot{\mathbf{x}}A^2$ через поверхность равен $|\dot{\mathbf{x}}|A^2\,d\sigma = nA^2\,d\sigma$. Это означает, что величина $nA^2$ пропорциональна плотности потока энергии поля. Это соответствует пространственной плотности энергии поля (2.2.50), умноженной на фазовую скорость распространения волны в среде:

$$\frac{\varepsilon_0 n^2 E^2}{2}\frac{c}{n} \sim nE^2. \tag{4.1.34}$$

Таким образом, амплитуду вдоль луча можно вычислять, рассматривая некоторую бесконечно малую лучевую трубку и вычисляя изменение ее сечения, что приводит к формуле

$$A = A_0\sqrt{\frac{n_0 d\sigma_0}{n\,d\sigma}}, \tag{4.1.35}$$

где нижний индекс 0 относится к начальным условиям.

Читатель может в качестве упражнения записать уравнения геометрической оптики для параболического уравнения (3.2.13) и приближенного псевдодифференциального уравнения (3.2.14).

**Условия применимости геометрической оптики**

Самое первое и необходимое условие, которое должно быть выполнено при выводе уравнений геометрической оптики, состоит в гладкости функций $A(\mathbf{x})$, $\Psi(\mathbf{x})$ и $n(\mathbf{x})$, т.е. в малости их изменений на масштабах порядка длины волны. Другие критерии применимости геометрической оптики основаны на понятии физического луча [1]. Пусть источник расположен в точке $\mathbf{r}_1$, а поле наблюдается в точке $\mathbf{r}_2$ и эйконал наблюдаемого поля равен $\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$. Френелевский объем определяется как множество всех точек $\mathbf{r}'$, задаваемых условием (рис. 9)

$$\left|\Psi(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}') + \Psi(\mathbf{r}',\mathbf{r}_2) - \Psi(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)\right| \le \frac{\lambda}{2}. \tag{4.1.36}$$

Френелевский объем является областью пространства, оказывающей основное влияние на наблюдаемое поле. Именно этот объем называется физическим лучом в отличие от идеального математического луча, являющегося бесконечно тонкой линией. Исходя из понятия физического луча, сформулируем критерии применимости геометрической оптики:

1. Параметры среды и поля $A(\mathbf{x})$, $\Psi(\mathbf{x})$ и $n(\mathbf{x})$ должны мало меняться в поперечном сечении луча.

2. Френелевские объемы лучей, приходящих в одну и ту же точку, не должны существенно пересекаться.

Если точечный источник и точка наблюдения находятся в вакууме на расстоянии друг от друга, много большем, чем длина волны, то несложно получить выражение для поперечного размера физического луча. Рассмотрим точку, расположенную на расстоянии $D_1$ от источника и $D_2$ от точки наблюдения. Для радиуса $F$ френелевского объема можно записать приближенное соотношение:

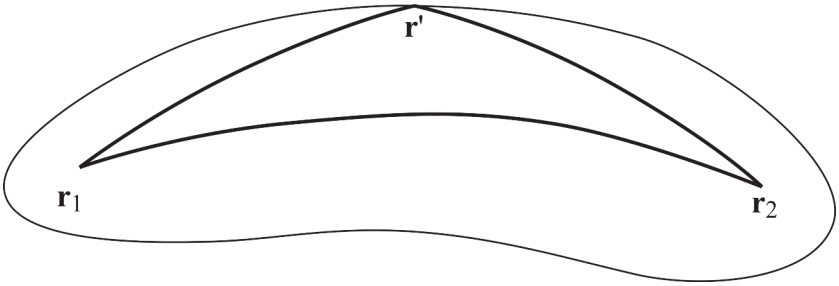



**Рис. 9.** Определение френелевского объема (физического луча)

$$\frac{\lambda}{2} = \sqrt{D_1^2 + F^2} - D_1 + \sqrt{D_2^2 + F^2} - D_2 \approx \frac{F^2}{2}\left(\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2}\right), \qquad (4.1.37)$$

что приводит к соотношению $F = \sqrt{\lambda L}$, где $L$ – приведенное расстояние наблюдения, определяемое соотношением $L^{-1} = D_1^{-1} + D_2^{-1}$.

Эти условия определяют применимость геометрической оптики для наблюдаемого поля. Как мы видели в разделе 3.1, они могут быть слишком ограничительными в задачах дистанционного зондирования атмосферы. С другой стороны, эти условия включают расстояние наблюдения. Поэтому применение техники обратного распространения, описанной в разделе 3.5, позволит использовать методы геометрической оптики для решения обратных задач, даже если эффекты дифракции на трассе распространения волн от атмосферы до наблюдателя оказываются значительными. В следующих разделах данной монографии мы будем развивать более эффективный подход, являющийся обобщением техники обратного распространения.

### Литература

1. *Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И.* Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука, 1980. 304 с.

2. *Мищенко А.С., Стернин Б.Ю., Шаталов В.Е.* Лагранжевы многообразия и метод канонических операторов. М.: Наука, 1978. 354 с.

3. *Nazaikinskii V.E., Shatalov V.E., Sternin B.Yu.* Contact geometry and linear differential equations. Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1992. 216 p.

4. *Маслов В.П.* Операторные методы. М.: Наука, 1973.

5. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969. 424 с.

6. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1978. 472 с.

7. *Коша А.* Вариационное исчисление. М.: Высшая школа, 1983. 279 с.

## 4.2. Лучевое многообразие и его проекции

В разделе 3.5 мы уже встречались с понятием каустики, определяемой как огибающая семейства лучей [1–3] (рис. 10).

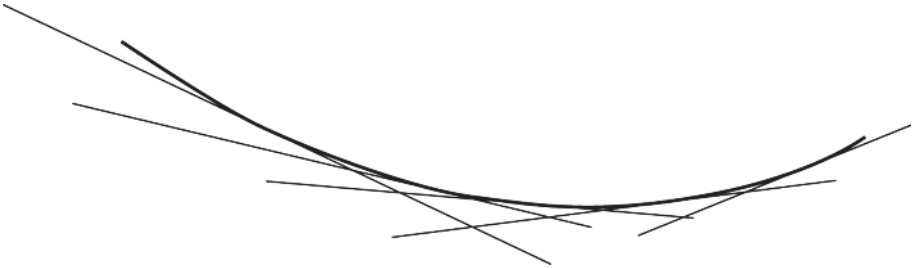


**Рис. 10.** Каустика как огибающая семейства лучей

Лучевая трубка на каустиках перегибается, и там площадь ее сечения становится равной нулю. В результате амплитуда поля, вычисляемая в приближении геометрической оптики по формуле (4.1.35), обращается в бесконечность. Это говорит о нарушении условий применимости геометрической оптики в окрестности каустик. Луч, коснувшийся каустики, приобретает сдвиг фазы, равный в простейшем случае $-\pi / 2$ [1–3]. Эту величину можно понимать как множитель $-i = \exp(-i\pi / 2)$, появляющийся в корне из отрицательной величины, если площадь сечения лучевой трубки $d\sigma$ считать ориентированной площадью, меняющей знак при переходе через каустику. Общая формула для каустического скачка фазы получена в [4]. Анализ различных типов каустик проведен в [5].

Каустика является границей между областями с разным числом лучей, наблюдаемых в одной точке. Множественные лучи, приходящие в одну и ту же точку **x**, имеют в этой точке разные импульсы **p**, поскольку задание начальных условий **x**, **p** однозначно определяет луч. Это означает, что в фазовом пространстве многолучевость отсутствует. Рассмотрение конфигураций лучей в фазовом пространстве приводит к понятию лучевого многообразия. Понятие лучевого многообразия естественным образом возникает в задачах, где рассматривается падение на среду волны достаточно простого типа, например плоской или сферической. В общем случае можно считать, что задана некоторая исходная плоскость, в которой в каждой точке имеется только один луч с известным направлением или импульсом, причем импульсы гладко зависят от координат. Это задает в фазовом пространстве структуру многообразия, называемого лучевым многообразием. Например, если мы рассматриваем двумерную задачу распространения волны и задаем начальное условие на некоторой прямой, то лучевое многообразие будет иметь размерность 2. Для трехмерной задачи, в которой начальное условие задается на некоторой плоскости, размерность лучевого многообразия будет равна 4.

Рассмотрим распространение такой волны в среде. Каждая лучевая траектория гладко зависит от начальных условий, и никакие два луча не пересекутся в фазовом пространстве. Следовательно, если мы проследим эволюцию лучевого многообразия вдоль координаты распространения волны, то оно будет подвергаться гладким деформациям, но его топологические свойства не изменятся. У лучевого многообразия не появится ни разрывов, ни самопересечений. Именно лучевое многообразие будет основным объектом исследования в этой и последующих главах данной книги.

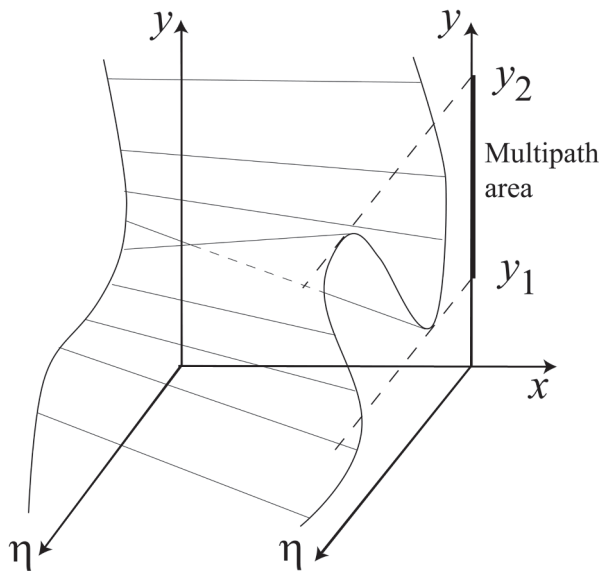



**Рис. 11.** Эволюция лучевого многообразия

Рассмотрим эволюцию лучевого многообразия в двумерной задаче (рис. 11). Пусть $x$ – координата распространения волны, $y$ – поперечная координата, η – соответствующий ей импульс. В дальнейшем отдельные компоненты импульса будут часто обозначаться греческими строчными буквами. В силу условия нормировки $p^2 = n^2$ и условия излучения одна компонента η полностью определяет импульс.

Лучевым многообразием можно называть как соответствующее многообразие в 3-мерном пространстве ($x$, $y$, η), так и его сечения при фиксированных значениях координаты $x$. Хотя топология каждого такого сечения одна и та же – линия без разрывов и самопересечений, – тип его проекции на координатную ось может меняться. В данном примере возникает область многозначной проекции лучевого многообразия в области $[y_1 , y_2]$, что соответствует многолучевому распространению.

Дальнейшее рассмотрение будет существенно опираться на идею перехода в другое представление поля, рассмотренную в разделе 3.4, посвященном пространственным спектрам. Как было показано в разделе, уравнение распространения волн можно записывать как в координатном, так и в импульсном представлении. При рассмотрении распространения волны в вакууме импульсное представление приводит к уравнению, которое тривиальным образом решается. При рассмотрении распространения волн в среде мотивировка для выбора координатного или импульсного представления будет связана с типом проекции лучевого многообразия. Если лучевое многообразие однозначно проецируется на ось координат, то решение строится в приближении геометрической оптики. Если лучевое многообразие однозначно проецируется на ось импульса, то решение строится в импульсном представлении. Для импульсного представления при этом строится асимптотическое

решение, аналог геометрической оптики. Лучевое многообразие может быть устроено так, что его глобальная проекция и на ось координаты, и на ось импульса будет неоднозначной. В этом случае лучевое многообразие разбивается на карты, каждая из которых однозначно проецируется на одну из осей. Для каждой карты решение строится в координатном, импульсном или смешанном представлении, а глобальное решение сшивается из решений для отдельных карт. В этом состоит идея построения канонического оператора Маслова [4], которую мы более формально рассмотрим в следующем разделе.

Проиллюстрируем изложенные соображения простым примером. Пусть лучевое многообразие в некоторой окрестности точки ($y_0$ , $\eta_0$) описывается уравнением

$$y(\eta) = y_0 + \frac{R}{2}(\eta - \eta_0)^2, \qquad (4.2.1)$$

где $R$ – радиус кривизны каустики. Область $y < y_0$ соответствует тени, в области $y > y_0$ имеется два луча, а $y = y_0$ соответствует каустике, где два луча вырождаются в один. Получим выражение для поля в окрестности каустики. Для этого запишем поле в импульсном представлении:

$$\tilde{u}(\eta) = A\exp\left(-ik\int y(\eta)\,d\eta\right) = A\exp\left(-iky_0\eta - ik\frac{R}{6}(\eta-\eta_0)^3\right), \qquad (4.2.2)$$

где амплитуду $A$ мы считаем постоянной. Поле в координатном представлении равно

$$\begin{aligned} u(y) &= \frac{k}{2\pi}\int \tilde{u}(\eta)\exp(iky\eta)\,d\eta = \\ &= \frac{kA}{2\pi}\exp\left(ik(y-y_0)\eta_0\right)\int \exp\left(ik(y-y_0)\eta - ik\frac{R}{6}\eta^3\right)d\eta, \end{aligned} \qquad (4.2.3)$$

Перейдем в интеграле к переменной $\tau = (kR/2)^{1/3}\eta$:

$$\begin{aligned} u(y) &= \frac{A}{2\pi}\frac{k^{2/3}}{R^{1/3}}\exp\left(ik(y-y_0)\eta_0\right)\int \exp\left(i\frac{k^{2/3}}{R^{1/3}}(y-y_0)\tau - i\tau^3\right)d\tau = \\ &= \frac{A}{\pi}\frac{k^{2/3}}{R^{1/3}}\exp\left(ik(y-y_0)\eta_0\right)\mathrm{Ai}\left(2^{1/3}\frac{k^{2/3}}{R^{1/3}}(y_0-y)\right), \end{aligned} \qquad (4.2.4)$$

где Ai – обозначение функции, носящей имя английского оптика Дж.Б. Эйри, который ввел ее в 1838 г. для описания интенсивности света в окрестности каустики [6, 7]. График этой функции представлен на рис. 12.

Отсюда получим оценку ширины каустической зоны по порядку величины:

$$\delta y \simeq \left(R\lambda^2\right)^{1/3}. \qquad (4.2.5)$$

Если геометрическая оптика предсказывает детали каустической структуры с размерами, большими $\delta y$, то они могут наблюдаться как максимумы волнового поля. Предсказываемые детали каустической структуры с меньшими размерами могут практически не проявляться (или слабо проявляться) в наблю-

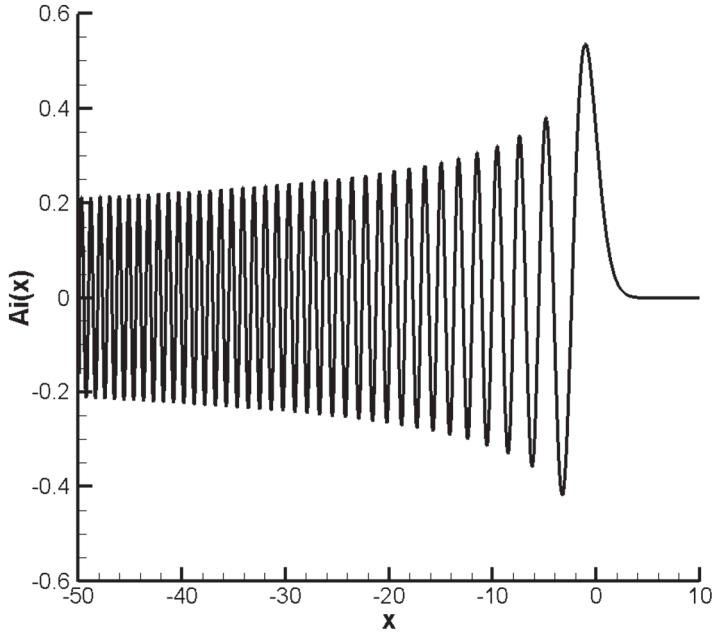



**Рис. 12.** График функции Ai($x$)

даемом волновом поле. Тем не менее применение метода обратного распространения в ряде случаев позволяет восстановить лучевую структуру волнового поля, включая детали каустической структуры с размерами менее $\delta y$.

### Литература

1. *Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И.* Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука, 1980. 304 с.

2. *Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И.* Каустики, катастрофы и волновые поля // Успехи физических наук. 1983. Т. 141. С. 591.

3. *Kravtsov Yu.A., Orlov Yu.I.* Caustics, Catastrophes, and Wave Fields. Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1999. 216 p.

4. *Маслов В.П.* Теория возмущений и асимптотические методы. М.: Изд-во МГУ, 1965. 549 с.

5. *Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М.* Особенности дифференцируемых отображений. Т. 1-2. М., 1982−1984.

6. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика (нерелятивистская теория). 4-е изд. М.: Наука, 1989. 768 с.

7. *Airy G.B.* On the intensity of light in the neighbourhood of a caustic // Transactions of the Cambridge Philosophical Society. 1838. V. 6. P. 379–402.

## 4.3. Канонический оператор Маслова

### Вводные замечания

Теория канонического оператора Маслова опирается на ряд понятий из теории гладких многообразий, которые являются идеализацией физических

объектов. Понятия «гладкость» или «дифференцируемость» в строгом смысле неприменимы к функциям, описывающим физические объекты, поскольку эти понятия предполагают бесконечную дробимость последних. У физических объектов имеются характерные масштабы, определяющие пределы применимости таких идеализаций. В задачах, связанных со средами, имеется понятие «физически бесконечно малый объем», т.е. объем, содержащий достаточное число молекул. В волновых задачах имеется характерный масштаб, равный длине волны. В силу этого понятие «бесконечно тонкая поверхность» в фазовом пространстве может быть принято лишь с оговорками. Имеется соотношение неопределенности, которое задает величину элементарного объема в фазовом пространстве, определяющего предельную точность локализации отдельных точек. Эти же соображения относятся к понятию «асимптотическое решение», поскольку получаемые математические решения являются формальными решениями приближенных уравнений. На распространение очень коротких электромагнитных волн, например лазерных пучков, в реальной атмосфере начинают оказывать влияние турбулентные неоднородности со все меньшими масштабами, приводящие к сильным флуктуациям поля и уширению его пространственного спектра, что ограничивает применимость асимптотических методов. При переходе к еще более коротким волнам начинают сказываться квантовые эффекты. Поэтому нередко, парадоксальным образом, оказывается, что геометрическая оптика и другие коротковолновые асимптотики лучше применимы в диапазоне радиоволн, нежели в оптическом диапазоне. Излагаемые методы не имеют строгого обоснования применимости к физической реальности. В конечном счете пределы применимости этих методов определяются опытом после верификации результатов применения этих методов для обработки данных реальных наблюдений.

**Многообразия, векторные поля и дифференциальные формы**

Мы начнем с изложения основ теории векторных полей и дифференциальных форм на гладких многообразиях, которые понадобятся в дальнейшем. Общее понятие многообразия [1, 2] является обобщением понятия поверхности в евклидовом пространстве. Гладкое многообразие определяется как топологическое пространство, которое можно покрыть атласом карт (открытых множеств), в каждой из которых определяются непрерывные координатные функции $(x^1,..., x^n)$, т.е. имеется непрерывное отображение каждой карты в открытое подмножество евклидова пространства $R^n$. Число $n$ называется размерностью многообразия. На пересечении любых двух карт определены две локальные системы координат $(x^{i'})$ и $(x^{i''})$, которые связаны друг с другом бесконечно дифференцируемым взаимно однозначным преобразованием. Мы будем различать верхние и нижние индексы, которые, согласно общим положениям тензорного анализа, определяют тип преобразования при переходе к другой системе координат [3]. В тензорном анализе штрихи, обозначающие разные системы координат, принято ставить у индексов.

Векторным полем на многообразии называется линейный дифференциальный оператор 1-го порядка. Векторные поля образуют линейное простран-

ство. Если задано векторное поле $\mathbf{Z}(\mathbf{x})$, то в локальных координатах его действие на гладкую функцию $f(\mathbf{x})$ записывается следующим образом:

$$\mathbf{Z}f = Z^i \frac{\partial f}{\partial x^i}. \tag{4.3.1}$$

Это выражение инвариантно относительно замен координат, что обеспечивается законом преобразования компонент векторного поля:

$$Z^{i'} = Z^i \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}. \tag{4.3.2}$$

Объектом, двойственным к векторным полям, являются дифференциальные формы, называемые для краткости просто формами. Формой в общем случае называется полилинейная числовая функция. Дифференциальные формы – это полилинейные числовые функции над векторными полями. Форма 0-го порядка, или 0-форма – это гладкая функция. Формы также образуют линейное пространство. Для форм вводится операция внешнего дифференцирования $d$. Внешней она называется, поскольку повышает порядок формы на единицу, например 0-формы переводит в 1-формы. На 0-формах внешнее дифференцирование определено следующим образом:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i, \tag{4.3.3}$$

где дифференциалы $dx^i$ образуют базис пространства 1-форм, двойственный к базису пространства векторных полей. Правило действия 1-форм на векторные поля следующее:

$$df(\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}f, \tag{4.3.4}$$

в частности,

$$dx^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta^i_j. \tag{4.3.5}$$

Не всякая 1-форма представима в виде градиента функции (4.3.3). В общем случае

$$\omega = \omega_i dx^i, \tag{4.3.6}$$

где компоненты $\omega_i$ преобразуются по градиентному закону:

$$\omega_{i'} = \omega_i \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}. \tag{4.3.7}$$

Величины с таким законом преобразования компонент называются ковекторами.

Операция внешнего дифференцирования на 1-формах определяется следующим образом:

$$d\omega = d\omega_i \wedge dx^i = \frac{\partial \omega_i}{dx_j} dx^j \wedge dx^i, \tag{4.3.8}$$

где символ $\wedge$ обозначает внешнее произведение. Внешним оно называется, поскольку произведение $n$-формы и $m$-формы является $(n+m)$-формой. Эта

операция задает на пространстве дифференциальных форм структуру внешней алгебры.

Внешнее произведение обладает свойством универсальности, т.е. является максимально общей формой кососимметричной (антисимметричной) билинейной операции [4]. Это означает, что через нее выражается любая кососимметричная билинейная операция. Если имеется $n$-мерное линейное пространство с базисом $e_i$, то внешнее произведение любых двух элементов этого пространства лежит в пространстве с базисом из всевозможных элементов вида $e_i \wedge e_j$, которые считаются независимыми от элементов $e_i$. В силу антисимметрии

$$\begin{aligned} e_i \wedge e_j &= -e_j \wedge e_i, \\ e_i \wedge e_i &= 0. \end{aligned} \tag{4.3.9}$$

Таким образом, размерность пространства внешних произведений пар векторов равна $\frac{n(n-1)}{2}$. Если имеются два элемента исходного линейного пространства $\mathbf{a} = a^i e_i$ и $\mathbf{b} = b^j e_j$, то любая билинейная кососимметричная операция $F(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ должна выражаться через $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$, следовательно

$$F(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \sum_{i<j} F(e_i \wedge e_j)\left(a^i b^j - a^j b^i\right). \tag{4.3.10}$$

Элементы $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ называются бивекторами. В общем случае внешние произведения $n$ векторов называются поливекторами. Двойственность между векторными полями и 1-формами переносится и на $n$-формы, которые являются кососимметричными формами от $n$ векторов. В силу свойства универсальности внешнего произведения любая $n$-форма может быть представлена в виде формы от поливектора:

$$\omega(\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_n) = \omega(\mathbf{X}_1 \wedge ... \wedge \mathbf{X}_n). \tag{4.3.11}$$

Базисные элементы пространства $n$-форм имеют вид $dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_n}$, где все индексы $i_1, ..., i_n$ различны. В пространстве $m$-форм над $n$-мерным пространством число базисных элементов равно $\frac{n!}{(n-m)!m!}$. Они двойственны к базису пространства внешних произведений векторов, называемых поливекторами, $\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \wedge ... \wedge \frac{\partial}{\partial x_{i_n}}$:

$$dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_n}\left(\frac{\partial}{\partial x_{j_1}} \wedge ... \wedge \frac{\partial}{\partial x_{j_n}}\right) = \begin{cases} \varepsilon_\sigma, & (j_1, ..., j_n) = \sigma(i_1, ..., i_n) \\ 0 \end{cases}, \tag{4.3.12}$$

т.е. значения базисных $n$-форм на базисных $n$-векторах равны либо четности перестановки, если множество индексов ($j_1, ..., j_n$) является перестановкой множества индексов ($i_1, ..., i_n$), либо 0 в противном случае. Отсюда следует, что

$$dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \left( \mathbf{X}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{X}_n \right) = \sum_{\sigma} \varepsilon_{\sigma} X_1^{\sigma(1)} \ldots X_n^{\sigma(n)}, \qquad (4.3.13)$$

где суммирование выполняется по всем возможным перестановкам индексов 1,...,*n*.

Дифференциальные формы играют важную роль в теории меры [4]. В *n*-мерном пространстве ориентированная мера параллелепипеда, натянутого на векторы ($\mathbf{X}_1$ ,..., $\mathbf{X}_n$), должна определяться полилинейной формой от этих векторов. Если любые два вектора из ($\mathbf{X}_1$ ,..., $\mathbf{X}_n$) совпадают (или, более общо, один из векторов является линейной комбинацией остальных), то мера должна обращаться в 0. Отсюда следует, что форма меры должна быть кососимметричной и в силу свойства универсальности мера должна быть формой от $\mathbf{X}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{X}_n$ . Пространство *n*-форм над *n*-мерным пространством имеет размерность 1, т.к. из *n* дифференциалов $dx_i$ можно составить единственную, с точностью до перестановок $dx_i$ , не равную 0 базисную *n*-форму $dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ .

В частности, для двумерной плоскости с декартовыми координатами *x*, *y* форма $\omega = dx \wedge dy$ является формой ориентированной площади. Значение этой формы на любой паре векторов $\omega(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) = A_x B_y - A_y B_x$ равно ориентированной площади параллелограмма, построенного на этих векторах. Аналогично, в трехмерном пространстве с декартовыми координатами *x*, *y*, *z* форма $\omega = dx \wedge dy \wedge dz$ является формой объема: ее значение на любой тройке векторов равно определителю, составленному построчно из компонент этих векторов $\omega(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = (\mathbf{A}, [\mathbf{B}, \mathbf{C}])$, что равняется ориентированному объему параллелепипеда, построенного на этих векторах.

Необходимым условием представимости 1-формы в виде градиента является ее замкнутость, т.е.

$$d\omega = \frac{1}{2} dx^i \wedge dx^j \left( \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} \right) = 0, \qquad (4.3.14)$$

поскольку для гладкой функции

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}. \qquad (4.3.15)$$

В силу этого соотношения оператор внешнего дифференцирования обладает свойством $d^2 = 0$.

Для любых двух форм $\theta$ и $\omega$

$$d\left(\theta \wedge \omega\right) = d\theta \wedge \omega + \left(-1\right)^{\deg \theta} \theta \wedge d\omega, \qquad (4.3.16)$$

где deg – степень формы. Операции, обладающие этим свойством, называются антидифференцированием. Чтобы это показать, достаточно рассмотреть формы

$$\begin{aligned} \theta &= f\ dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_n}, \quad \deg \theta = n \\ \omega &= g\ dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_m}. \end{aligned} \qquad (4.3.17)$$

Тогда

$$d(\theta\wedge\omega)=(df\ g+f\ dg)dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_n}\wedge dx^{j_1}\wedge\ldots\wedge dx^{j_m}=$$
$$=df\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_n}\wedge g\ dx^{j_1}\wedge\ldots\wedge dx^{j_m}+ \qquad (4.3.18)$$
$$+f\ dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_n}\wedge(-1)^n\ dg\wedge dx^{j_1}\wedge\ldots\wedge dx^{j_m},$$

где множитель $(-1)^n$ появляется при протаскивании 1-формы $dg$ вправо через $n$ 1-форм.

Пусть имеется гладкое отображение $\psi$ многообразия $M$ в многообразие $N$, $\psi : M \to N$. Для этого отображения в каждой точке $\mathbf{m}\in M$ определен дифференциал $d\psi_{\mathbf{m}} : M_{\mathbf{m}} \to N_{\psi(\mathbf{m})}$, являющийся отображением пространства векторов, касательных к многообразию $M$, в пространство векторов, касательных к многообразию $N$. Для дифференциала определен сопряженный оператор $\psi^*_{\mathbf{m}} : N^*_{\psi(\mathbf{m})} \to M^*_{\mathbf{m}}$ на соответствующих пространствах дифференциальных форм:

$$\omega(d\psi_{\mathbf{m}}\mathbf{A})=\psi^*_{\mathbf{m}}\omega(\mathbf{A}),\quad \mathbf{A}\in M_{\mathbf{m}},\quad \omega\in N^*_{\psi(\mathbf{m})}. \qquad (4.3.19)$$

Это определение позволяет перенести форму, определенную на многообразии, на его подмногообразие. Оператор $\psi^*_{\mathbf{m}}$ коммутирует с внешним дифференцированием и внешним произведением:

$$d\left(\psi^*_{\mathbf{m}}\omega\right)=\psi^*_{\mathbf{m}}d\omega,$$
$$\left(\psi^*_{\mathbf{m}}\omega\right)\wedge\left(\psi^*_{\mathbf{m}}\theta\right)=\psi^*_{\mathbf{m}}(\omega\wedge\theta). \qquad (4.3.20)$$

Первое из этих равенств является следствием формулы для производной сложной функции. Второе является следствием линейности отображения $\psi^*_{\mathbf{m}}$ и кососимметричности внешнего произведения.

Для векторных полей часто используется билинейная операция тензорного произведения, обозначаемая знаком $\otimes$. Тензорное умножение обладает свойством универсальности, т.е. является максимально общей формой билинейной операции. Как и внешнее умножение, его достаточно определить на базисных векторах. Если имеется $n$-мерное линейное пространство с базисом $e_i$, то внешнее произведение любых двух элементов этого пространства лежит в пространстве с базисом из всевозможных элементов вида $e_i\otimes e_j$, которые считаются независимыми от элементов $e_i$. Если $i \neq j$, то элементы $e_i\otimes e_j$ и $e_j\otimes e_i$ линейно-независимы друг от друга. Поэтому размерность этого пространства равна $n^2$. Если имеются два элемента исходного линейного пространства $\mathbf{a} = a^i e_i$ и $\mathbf{b} = b^j e_j$, то любая билинейная операция $F(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ должна выражаться через $\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}$, следовательно

$$F(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})=\sum_{i,j}F\left(e_i\otimes e_j\right)a^ib^j. \qquad (4.3.21)$$

Тензорное произведение $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \otimes \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}$, или $\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x} \otimes \partial \mathbf{x}}$, соответствует операции взятия матрицы всех вторых производных.

Если задана $n$-форма $\omega$ и векторное поле $\mathbf{X}$, то определена операция их внутреннего произведения, обозначаемая $i_{\mathbf{X}}\omega$ или $\mathbf{X} \lrcorner \omega$, понижающая порядок формы:

$$i_{\mathbf{X}}\omega(\mathbf{Y}_1,...,\mathbf{Y}_{n-1}) = \omega(\mathbf{X},\mathbf{Y}_1,...,\mathbf{Y}_{n-1}). \tag{4.3.22}$$

На функциях, т.е. 0-формах, эта операция считается равной нулю. На 1-формах вида $df$

$$i_{\mathbf{X}}\, df = df(\mathbf{X}) = \mathbf{X}f. \tag{4.3.23}$$

Операция внутреннего произведения, как и внешнее дифференцирование, является антидифференцированием:

$$i_{\mathbf{X}}(\theta \wedge \omega) = i_{\mathbf{X}}\theta \wedge \omega + (-1)^{\deg\theta}\,\theta \wedge i_{\mathbf{X}}\omega. \tag{4.3.24}$$

Чтобы это показать, рассмотрим набор векторных полей $\mathbf{Y}_1$ ,..., $\mathbf{Y}_{n+m}$ , где $n = \deg\theta$, $m = \deg\omega$. Тогда

$$i_{\mathbf{Y}_1}(\theta \wedge \omega)(\mathbf{Y}_2,...,\mathbf{Y}_{n+m}) = \sum_{\sigma} \varepsilon_\sigma \theta\left(\mathbf{Y}_{\sigma(1)},...,\mathbf{Y}_{\sigma(n)}\right)\omega\left(\mathbf{Y}_{\sigma(n+1)},...,\mathbf{Y}_{\sigma(n+m)}\right), \tag{4.3.25}$$

где суммирование выполняется по всем перестановкам индексов от 1 до $n + m$ типа $(n, m)$, т.е. таким, что $\sigma(1) < ... < \sigma(n)$ и $\sigma(n + 1) < ... < \sigma(n + m)$, а $\varepsilon_\sigma$ – четность перестановки. Выражения в правой части (4.3.24) равны

$$\begin{aligned}
\left(i_{\mathbf{Y}_1}\theta \wedge \omega\right)(\mathbf{Y}_2,...,\mathbf{Y}_{n+m}) &= \sum_{\sigma'} \varepsilon_{\sigma'} \theta\left(\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_{\sigma'(2)},...,\mathbf{Y}_{\sigma'(n)}\right)\omega\left(\mathbf{Y}_{\sigma'(n+1)},...,\mathbf{Y}_{\sigma'(n+m)}\right),\\
\left(\theta \wedge i_{\mathbf{Y}_1}\omega\right)(\mathbf{Y}_2,...,\mathbf{Y}_{n+m}) &= \sum_{\sigma''} \varepsilon_{\sigma''} \theta\left(\mathbf{Y}_{\sigma''(1)},...,\mathbf{Y}_{\sigma''(n)}\right)\omega\left(\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_{\sigma''(n+2)},...,\mathbf{Y}_{\sigma''(n+m)}\right),
\end{aligned} \tag{4.3.26}$$

где $\sigma'$ – перестановки типа $(n - 1, m)$, а $\sigma''$ – перестановки типа $(n, m - 1)$. В каждой перестановке $\sigma$ либо $\sigma(1) = 1$, либо $\sigma(n + 1) = 1$. Поэтому разность выражений $i_{\mathbf{Y}_1}(\theta \wedge \omega)(\mathbf{Y}_2,...,\mathbf{Y}_{n+m})$ и $\left(i_{\mathbf{Y}_1}\theta \wedge \omega\right)(\mathbf{Y}_2,...,\mathbf{Y}_{n+m})$ будет включать все перестановки $\sigma''$. Однако четность перестановок $\sigma$ будет отличаться от соответствующих перестановок $\sigma''$ множителем $(-1)^n$, поскольку четность $\sigma$ учитывает аргумент $\mathbf{Y}_1$, стоящий правее первых $n$ аргументов, а четность $\sigma''$ его не учитывает. Этим доказано, что рассматриваемая разность равна второму выражению из (4.3.26) и тем самым верна формула (4.3.24).

Если задано векторное поле $\mathbf{X}$, то его интегральная кривая $\mathbf{x}_t$ определяется как решение дифференциального уравнения:

$$\frac{d\mathbf{x}_t}{dt} = \mathbf{X}(\mathbf{x}_t). \tag{4.3.27}$$

Через $\mathbf{x}_t(\mathbf{m})$ мы обозначим решение этого уравнения с начальным условием $\mathbf{x}_0 = \mathbf{m}$.

Понятие интегральной кривой позволяет сформулировать важное понятие производной Ли векторных полей и дифференциальных форм. Совокупность интегральных кривых векторного поля задает отображение многообразия в себя. Для заданного параметра $t$ определены преобразования $d\mathbf{x}_t$ для касательных векторов и $\mathbf{x}_t^*$ для дифференциальных форм. Производная Ли $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}$ относительно векторного поля $\mathbf{X}$ определяется следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}(\mathbf{m}) &= \lim_{t\to 0}\frac{d\mathbf{x}_{-t}\left(\mathbf{Y}\left(\mathbf{x}_t(\mathbf{m})\right)\right)-\mathbf{Y}(\mathbf{m})}{t},\\ \mathcal{L}_{\mathbf{X}}\omega(\mathbf{m}) &= \lim_{t\to 0}\frac{\mathbf{x}_t^*\left(\omega\left(\mathbf{x}_t(\mathbf{m})\right)\right)-\omega(\mathbf{m})}{t}.\end{aligned} \tag{4.3.28}$$

Для производной Ли дифференциальной формы существует следующая формула:

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\omega = i_{\mathbf{X}}d\omega + d\left(i_{\mathbf{X}}\omega\right), \tag{4.3.29}$$

или в операторной форме:

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}} = i_{\mathbf{X}}\circ d + d\circ i_{\mathbf{X}}. \tag{4.3.30}$$

Чтобы показать это равенство, заметим, что в силу (4.3.20) производная Ли является дифференцированием и перестановочна с внешним дифференцированием:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\left(\theta\wedge\omega\right) &= \mathcal{L}_{\mathbf{X}}\theta\wedge\omega + \theta\wedge\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\omega,\\ \mathcal{L}_{\mathbf{X}}d\omega &= d\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\omega.\end{aligned} \tag{4.3.31}$$

Для 0-формы $f$ производная Ли равна $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}f = \mathbf{X}f$. Это же следует из формулы (4.3.29)

$$i_{\mathbf{X}}df + d\left(i_{\mathbf{X}}f\right) = df\left(\mathbf{X}\right) + 0 = \mathbf{X}f. \tag{4.3.32}$$

Для 1-формы $df$ производная Ли равна $d\mathcal{L}_{\mathbf{X}}f = d\left(\mathbf{X}f\right)$. Это же следует из формулы (4.3.29):

$$i_{\mathbf{X}}ddf + d\left(i_{\mathbf{X}}df\right) = 0 + d\left(df\left(\mathbf{X}\right)\right) = d\left(\mathbf{X}f\right). \tag{4.3.33}$$

Как было показано выше, обе операции $i_{\mathbf{X}}$ и $d$ являются антидифференцированиями, меняющими порядок форм на ±1. Для любых двух таких антидифференцирований $D_1$ и $D_2$ их антикоммутатор $D_1D_2 + D_2D_1$ является дифференцированием:

$$
\begin{aligned}
&\left(D_1D_2+D_2D_1\right)\left(\theta\wedge\omega\right)=\\
&=D_1\left(D_2\theta\wedge\omega+\left(-1\right)^{\deg\theta}\theta\wedge D_2\omega\right)+D_2\left(D_1\theta\wedge\omega+\left(-1\right)^{\deg\theta}\theta\wedge D_1\omega\right)=\\
&=D_1D_2\theta\wedge\omega+\left(-1\right)^{\deg\theta\pm1}D_2\theta\wedge D_1\omega+\left(-1\right)^{\deg\theta}D_1\theta\wedge D_2\omega+\theta\wedge D_1D_2\omega+\\
&+D_2D_1\theta\wedge\omega+\left(-1\right)^{\deg\theta\pm1}D_1\theta\wedge D_2\omega+\left(-1\right)^{\deg\theta}D_2\theta\wedge D_1\omega+\theta\wedge D_2D_1\omega=\\
&=D_1D_2\theta\wedge\omega+\theta\wedge D_1D_2\omega+D_2D_1\theta\wedge\omega+\theta\wedge D_2D_1\omega=\\
&=\left(D_1D_2+D_2D_1\right)\theta\wedge\omega+\theta\wedge\left(D_1D_2+D_2D_1\right)\omega.
\end{aligned}
\tag{4.3.34}
$$

Поскольку обе части равенства (4.3.30) являются дифференцированиями внешней алгебры форм, совпадающими на элементах вида $f$ и $df$, они будут совпадать на любых комбинациях форм вида $f\,dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_n}$, а значит, и на любых формах.

Приведем в заключение простую вычислительную формулу производной Ли:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\left(f\,dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_n}\right)&=\dot{f}\,dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_n}+\\
&+f\,d\dot{x}^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_n}+\ldots+f\,dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge d\dot{x}^{i_n},
\end{aligned}
\tag{4.3.35}
$$

где точка обозначает производную вдоль интегральных кривых векторного поля **X**.

**Определение канонического оператора**

Теперь рассмотрим построение канонического оператора Маслова. Построение ведется в общем виде для $2n$-мерного фазового пространства с координатами $x^i$ и импульсами $p_i$. В этом фазовом пространстве будем рассматривать многообразие $L$, понимаемое как гладкая гиперповерхность, и соответствующее отображение его вложения $i : L \to \Phi$. В фазовом пространстве определим структурную форму

$$
\omega=\sum_i dp_i\wedge dx^i=d\mathbf{p}\wedge d\mathbf{x}. \tag{4.3.36}
$$

Если ограничение структурной формы на многообразие $L$ равно 0, т.е. $i^*\omega = 0$, то многообразие $L$ называется лагранжевым.

Рассмотрим канонические координаты на лагранжевом многообразии $L$. Размерность многообразия равна $n$, оно покрывается картами, в каждой из которых задается набор канонических координат $\left(\mathbf{x}^I,\mathbf{p}_{\bar{I}}\right)$, где $I$ – некоторое подмножество множества натуральных чисел $\{1,\ldots,n\}$, а $\bar{I}$ – его дополнение. Количества индексов в этих подмножествах мы будем обозначать через $\left|I\right|$ и $\left|\bar{I}\right|$. Таким образом, в каждой карте задается смешанное координатно-импульсное представление, а само многообразие задается уравнениями

$$\mathbf{x}^{\bar{I}} = \mathbf{x}^{\bar{I}}\left(\mathbf{x}^I, \mathbf{p}_{\bar{I}}\right),$$
$$\mathbf{p}_I = \mathbf{p}_I\left(\mathbf{x}^I, \mathbf{p}_{\bar{I}}\right). \tag{4.3.37}$$

Запишем ограничение структурной формы на многообразие:

$$i^*\omega = i^*\left(d\mathbf{p}_I \wedge d\mathbf{x}^I + d\mathbf{p}_{\bar{I}} \wedge d\mathbf{x}^{\bar{I}}\right) = d\mathbf{p}_{\bar{I}} \frac{\partial \mathbf{p}^I}{\partial \mathbf{p}^{\bar{I}}} \wedge d\mathbf{x}^I + d\mathbf{p}_{\bar{I}} \wedge d\mathbf{x}^I \frac{\partial \mathbf{x}^{\bar{I}}}{\partial \mathbf{x}^I}. \tag{4.3.38}$$

Отсюда следует соотношение

$$\frac{\partial \mathbf{p}^I}{\partial \mathbf{p}^{\bar{I}}} = -\frac{\partial \mathbf{x}^{\bar{I}}}{\partial \mathbf{x}^I}. \tag{4.3.39}$$

Введем на лагранжевом многообразии меру $\mu = \mu_I\left(\mathbf{x}^I, \mathbf{p}_{\bar{I}}\right) d^{|I|}\mathbf{x}^I \wedge d^{|\bar{I}|}\mathbf{p}_{\bar{I}}$, где $\mu_I\left(\mathbf{x}^I, \mathbf{p}_{\bar{I}}\right)$ называется плотностью меры, и действие $S = S_I\left(x^I, p_{\bar{I}}\right)$. Для дифференциала действия должно выполняться соотношение

$$dS_I = \mathbf{p}_I d\mathbf{x}^I - \mathbf{x}^{\bar{I}} d\mathbf{p}_{\bar{I}}. \tag{4.3.40}$$

В силу того что многообразие $L$ лагранжево, имеем

$$d^2 S_I = i^*\left(d\mathbf{p}_I \wedge d\mathbf{x}^I - d\mathbf{x}^{\bar{I}} \wedge d\mathbf{p}_{\bar{I}}\right) = i^*\omega = 0, \tag{4.3.41}$$

следовательно, форма (4.3.40) представима в виде дифференциала некоторой функции и действие $S_I$ существует.

Локальный канонический оператор определяется следующим образом:

$$K_I\varphi = \hat{F}^k_{\mathbf{p}_{\bar{I}} \to \mathbf{x}^{\bar{I}}}\left[\exp\left(ikS_I\right)\sqrt{\mu_I}\varphi\right], \tag{4.3.42}$$

где $\hat{F}^k_{\mathbf{p}_{\bar{I}} \to \mathbf{x}^{\bar{I}}}$ – $k$-Фурье-преобразование по импульсам. Мы будем пользоваться нормированным преобразованием Фурье вида

$$\tilde{f}\left(\mathbf{p}_I\right) = \left(\frac{ik}{2\pi}\right)^{|I|/2} \int f\left(\mathbf{x}^I\right) \exp\left(ik\mathbf{x}^I\mathbf{p}_I\right) d\mathbf{x}^I,$$
$$f\left(\mathbf{x}^I\right) = \left(\frac{-ik}{2\pi}\right)^{|I|/2} \int f\left(\mathbf{p}_I\right) \exp\left(ik\mathbf{x}^I\mathbf{p}_I\right) d\mathbf{p}_I. \tag{4.3.43}$$

Оператор $\hat{F}^k_{\mathbf{p}_{\bar{I}} \to \mathbf{x}^{\bar{I}}}$ преобразует функцию из смешанного импульсно-координатного представления в чисто координатное представление. Данное определение является обобщением идеи перехода в импульсное представление, рассмотренной в разделе 3.4.

Чтобы убедиться в возможности построения глобального оператора путем

сшивания локальных операторов в разных картах, рассмотрим пересечение двух карт с разными наборами координат $U_I$ и $U_J$. Рассмотрим множества индексов $I' = I \setminus J$ (все элементы множества $I$, не входящие в $J$) и $J' = J \setminus I$. Требуется сравнить $K_I\varphi$ и $K_J\varphi$. Несложно видеть, что достаточно сравнить функции

$$\hat{F}^{k}_{\substack{\mathbf{p}_{J'}\to\mathbf{x}^{J'}\\ \mathbf{x}^{I'}\to\mathbf{p}_{I'}}} \exp\left(ikS_I\right)\sqrt{\mu_I}\varphi \quad \text{и} \quad \exp\left(ikS_J\right)\sqrt{\mu_J}\varphi. \tag{4.3.44}$$

Воспользуемся формулой метода стационарной фазы в первом приближении по $k$:

$$\left(\frac{ik}{2\pi}\right)^{n/2}\int \exp\left(ik\Phi\left(\mathbf{x},\mathbf{p}\right)\right)\varphi\left(\mathbf{x},\mathbf{p}\right)d\mathbf{p} = \frac{\exp\left(ik\Phi\left(\mathbf{x},\mathbf{p}_s\left(\mathbf{x}\right)\right)\right)\varphi\left(\mathbf{x},\mathbf{p}_s\left(\mathbf{x}\right)\right)}{\sqrt{\det\left\|-\dfrac{\partial^2\Phi\left(\mathbf{x},\mathbf{p}_s\left(\mathbf{x}\right)\right)}{\partial\mathbf{p}\otimes\partial\mathbf{p}}\right\|}}, \tag{4.3.45}$$

где $\mathbf{p}_s(x)$ – точка стационарной фазы. Первое выражение из (4.3.44) равно

$$\left(-1\right)^{|I'|/2}\left(\frac{ik}{2\pi}\right)^{\frac{|I'|+|J'|}{2}}\int \exp\left(ik\left(\mathbf{p}_{J'}\mathbf{x}^{J'} - \mathbf{x}^{I'}\mathbf{p}_{I'} + S_I\right)\right)\sqrt{\mu_I}\varphi\, dp_{J'}dx^{I'}. \tag{4.3.46}$$

Чтобы найти точку стационарной фазы, продифференцируем фазу подынтегрального выражения по $\mathbf{x}^{I'}$ и $\mathbf{p}_{J'}$ с учетом (4.3.40). Это приведет к следующим выражениям:

$$\begin{aligned}\mathbf{p}^{s}_{J'} &= \mathbf{p}_{J'}\left(\mathbf{x}^{J},\mathbf{p}_{\bar{J}}\right),\\ \mathbf{x}^{I'}_{s} &= \mathbf{x}^{I'}\left(\mathbf{x}^{J},\mathbf{p}_{\bar{J}}\right).\end{aligned} \tag{4.3.47}$$

Выражение для точки стационарной фазы соответствует формулам преобразования координат между картами. Это приводит к следующему выражению:

$$\frac{\left(-1\right)^{|I'|/2}\exp\left(ik\left(\mathbf{p}_{J'}\mathbf{x}^{J'} - \mathbf{x}^{I'}\mathbf{p}_{I'} + S_I\right)\right)\sqrt{\mu_I}\varphi}{\sqrt{\det\left\|\dfrac{\partial\left(-\mathbf{p}_{I'},\mathbf{x}^{J'}\right)}{\partial\left(\mathbf{p}_{J'},\mathbf{x}^{I'}\right)}\right\|}}. \tag{4.3.48}$$

Учтем формулу преобразования меры

$$\mu_I = \mu_J \det\left\|\frac{\partial\left(-\mathbf{p}_{I'},\mathbf{x}^{J'}\right)}{\partial\left(\mathbf{p}_{J'},\mathbf{x}^{I'}\right)}\right\|\left(-1\right)^{-|I'|} \tag{4.3.49}$$

и соотношение

$$\mathbf{p}_{J'}\mathbf{x}^{J'} - \mathbf{x}^{I'}\mathbf{p}_{I'} + S_I = S_J, \tag{4.3.50}$$

следующее из (4.3.40) и аналогичного дифференциального соотношения для $S_J$. Из этого мы заключаем, что выражение (4.3.48) совпадает с $\exp\left(ikS_J\right)\sqrt{\mu_J}\varphi$, что и требовалось установить.

**Коммутация гамильтониана и осциллирующей экспоненты**

Вернемся к вопросу о коммутации гамильтониана и осциллирующей экспоненты с учетом того, что теперь гамильтониан записан в смешанном координатно-импульсном представлении и имеет вид $\mathcal{H}\left(\begin{matrix}2 & 2 & 1 & 1\\ \mathbf{x}^I, \hat{\mathbf{x}}^{\bar{I}}, \hat{\mathbf{p}}_I, \mathbf{p}_{\bar{I}}\end{matrix}\right)$. Ход рассуждений остается таким же, как в разделе 4.1. Единственное отличие состоит в том, что все операторы $\hat{\mathbf{x}}^{\bar{I}}$ стоят слева. Рассмотрим гамильтониан, состоящий из мономов вида $\hat{x}^{\bar{I}_1}...\hat{x}^{\bar{I}_m} a\left(x^I, p_{\bar{I}}\right)\hat{p}_{I_1}...\hat{p}_{I_n}$, где $a(x^I, p_{\bar{I}})$ – гладкая функция. Операторы $\hat{\mathbf{x}}^{\bar{I}}$ действуют на функции $a(x^I, p_{\bar{I}})$, поэтому можно записать

$$\hat{x}^{\bar{I}_1}...\hat{x}^{\bar{I}_m} a\left(x^I, p_{\bar{I}}\right)\hat{p}_{I_1}...\hat{p}_{I_n} = a\left(x^I, p_{\bar{I}}\right)\hat{x}^{\bar{I}_1}...\hat{x}^{\bar{I}_m}\hat{p}_{I_1}...\hat{p}_{I_n} - \\ -\frac{1}{ik}\sum_{\bar{I}}\frac{\partial a}{\partial p_{\bar{I}_i}}\hat{x}^{\bar{I}_1}...\hat{x}^{\bar{I}_i}...\hat{x}^{\bar{I}_m}\hat{p}_{I_1}...\hat{p}_{I_n}. \qquad (4.3.51)$$

Это приводит к дополнительному члену 1-го порядка $-\frac{1}{ik}\frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial\mathbf{x}^{\bar{I}}\partial\mathbf{p}_{\bar{I}}}$. Рассматривая действие таких мономов на осциллирующую функцию, мы приходим к формуле

$$\mathcal{H}\left(\mathbf{x}^I, \hat{\mathbf{x}}^{\bar{I}}, \hat{\mathbf{p}}_I, \mathbf{p}_{\bar{I}}\right)\left[A(\mathbf{x})\exp\left(ik\Psi\left(\mathbf{x}^I, \mathbf{p}_{\bar{I}}\right)\right)\right] = \\ = \exp\left(ik\Psi\left(\mathbf{x}^I, \mathbf{p}_{\bar{I}}\right)\right)\left[\mathcal{H}\left(\mathbf{x}^I, -\frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{p}^{\bar{I}}} + \hat{\mathbf{x}}^{\bar{I}}, \frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{x}^I} + \hat{\mathbf{p}}_I, \mathbf{p}_{\bar{I}}\right)\right]A\left(\mathbf{x}^I, \mathbf{p}_{\bar{I}}\right), \qquad (4.3.52)$$

Член 0-го порядка (уравнение эйконала) снова получается опусканием операторов $\hat{\mathbf{x}}^{\bar{I}}$ и $\hat{\mathbf{p}}_I$. Член 1-го порядка (уравнение переноса) будет включать выражение $-\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mathbf{x}^{\bar{I}}}\frac{\partial}{\mathbf{p}_{\bar{I}}} + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mathbf{p}_I}\frac{\partial}{\mathbf{x}^I}$ и дополнительные члены, появляющиеся вследствие некоммутативности. Рассуждения о симметризации и протаскивании операторов вправо, приводящем к появлению членов с коммутаторами, сохраняют силу. Поскольку все операторы $\hat{\mathbf{x}}^{\bar{I}}$ стоят левее $\hat{\mathbf{p}}_I$, надо отдельно симметризовать группы множителей с операторами $\hat{\mathbf{x}}^{\bar{I}}$ и с операторами $\hat{\mathbf{p}}_I$. Это приводит к аналогичным членам со вторыми производными $\frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial\mathbf{p}_I\otimes\partial\mathbf{p}_I}$ и $\frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial\mathbf{x}^{\bar{I}}\otimes\partial\mathbf{x}^{\bar{I}}}$, включающими множитель $\frac{1}{2}$. Поскольку все опе-

раторы $\hat{\mathbf{x}}^{\bar{I}}$ необходимо протаскивать вправо через множители, содержащие $\hat{\mathbf{p}}_I\Psi$, член со смешанными производными $\dfrac{\partial^2\Psi}{\partial\mathbf{x}^I\partial\mathbf{p}_{\bar{I}}}$ не будет содержать множителя $\dfrac{1}{2}$, и у него будет другой знак в силу разных знаков у производных в определении операторов $\hat{\mathbf{x}}$ и $\hat{\mathbf{p}}$. Эти простые рассуждения приводят к формуле

$$\begin{aligned}
&\mathcal{H}\left(\mathbf{x}^I,\hat{\mathbf{x}}^{\bar{I}},\hat{\mathbf{p}}_I,\mathbf{p}_{\bar{I}}\right)\left[A(\mathbf{x})\exp\left(ik\Psi\left(\mathbf{x}^I,\mathbf{p}_{\bar{I}}\right)\right)\right]=\\
&=\exp\left(ik\Psi\left(\mathbf{x}^I,\mathbf{p}_{\bar{I}}\right)\right)\left\{\mathcal{H}\left(\mathbf{x}^I,-\frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{p}^{\bar{I}}},\frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{x}^I},\mathbf{p}_{\bar{I}}\right)+\right.\\
&+\frac{1}{ik}\left[-\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mathbf{x}^{\bar{I}}}\frac{\partial}{\mathbf{p}_{\bar{I}}}+\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mathbf{p}_I}\frac{\partial}{\mathbf{x}^I}-\frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial\mathbf{x}^{\bar{I}}\partial\mathbf{p}_{\bar{I}}}-\frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial\mathbf{x}^{\bar{I}}\partial\mathbf{p}_I}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\mathbf{x}^I\partial\mathbf{p}_{\bar{I}}}+\right.\\
&\left.\left.+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial\mathbf{x}^{\bar{I}}\otimes\partial\mathbf{x}^{\bar{I}}}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\mathbf{p}_{\bar{I}}\otimes\partial\mathbf{p}_{\bar{I}}}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial\mathbf{p}_I\otimes\partial\mathbf{p}_I}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\mathbf{x}^I\otimes\partial\mathbf{x}^I},\right]\right\}A\left(\mathbf{x}^I,\mathbf{p}_{\bar{I}}\right).
\end{aligned}\tag{4.3.53}$$

**Коммутация канонического оператора и оператора Гамильтона**

Канонический оператор Маслова является формой представления асимптотического решения задачи распространения волн. Этот результат мы выведем из формулы коммутации канонического оператора Маслова и оператора Гамильтона, к обсуждению которой переходим.

Мы рассматриваем фазовое пространство со структурной формой ω и оператор Гамильтона $\mathcal{H}$. С гамильтонианом связано векторное поле в фазовом пространстве:

$$\mathbf{V}(\mathcal{H})=\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mathbf{p}}\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}-\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}.\tag{4.3.54}$$

Интегральные кривые этого векторного поля являются классическими траекториями частицы с гамильтонианом $\mathcal{H}$, а само это векторное поле является оператором дифференцирования по времени вдоль траекторий. Если задано любое другое векторное поле **X**, то

$$\begin{aligned}
\omega\left(\mathbf{V}(\mathcal{H}),\mathbf{X}\right)&=d\mathbf{x}\left(\mathbf{V}(\mathcal{H})\right)d\mathbf{p}(\mathbf{X})-d\mathbf{p}\left(\mathbf{V}(\mathcal{H})\right)d\mathbf{x}(\mathbf{X})=\\
&=\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mathbf{p}}d\mathbf{p}(\mathbf{X})+\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mathbf{x}}d\mathbf{x}(\mathbf{X})=d\mathcal{H}(\mathbf{X})=\mathbf{X}\mathcal{H}.
\end{aligned}\tag{4.3.55}$$

Рассмотрим лагранжево многообразие *L* и касательное к нему векторное поле. Если *L* инвариантно относительно векторного поля $\mathbf{V}(\mathcal{H})$, то это поле

должно быть касательным к $L$. Поскольку $i^*\omega = 0$, должно быть $d\mathcal{H}(\mathbf{X}) = 0$, следовательно $L$ является многообразием постоянного уровня функции Гамильтона.

Верно и обратное утверждение. Пусть $L$ является многообразием постоянного уровня функции Гамильтона. Предположим, что $\mathbf{V}(\mathcal{H})$ не является касательным к $L$, но при этом $d\mathcal{H}(\mathbf{X}) = 0$ для любого $\mathbf{X}$, касательного к $L$. В этом случае структурная форма $\omega$ должна обращаться в 0 на $n + 1$-мерном подпространстве, порожденном векторами, касательными к $L$, и линейно-независимым от них вектором $\mathbf{V}(\mathcal{H})$. В базисе $(\partial/\partial\mathbf{x}, \partial/\partial\mathbf{p})$ структурная форма имеет матрицу

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{Vmatrix}, \tag{4.3.56}$$

где $E$ – единичная $n$-мерная матрица. Пусть $W$ – подпространство векторов, на котором $\omega$ обращается в 0. Тогда для любых векторов $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in W$:

$$(A\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 0. \tag{4.3.57}$$

Следовательно, подпространства $W$ и $AW$ ортогональны и значит они не пересекаются. Поскольку матрица $A$ невырождена, их размерности равны, а поскольку размерность фазового пространства равна $2n$, они не могут превышать $n$. Полученное противоречие доказывает, что вектор $\mathbf{V}(\mathcal{H})$ обязан быть касательным к $L$.

Рассмотрим лагранжево многообразие $L$, принадлежащее нулевому уровню функции Гамильтона $\mathcal{H}$:

$$i^*\mathcal{H} = \mathcal{H}\left(\mathbf{x}^I, \mathbf{x}^{\bar{I}}\left(\mathbf{x}^I, \mathbf{p}_{\bar{I}}\right), \mathbf{p}_{\bar{I}}, \mathbf{p}_I\left(\mathbf{x}^I, \mathbf{p}_{\bar{I}}\right)\right) = 0. \tag{4.3.58}$$

Отсюда следуют соотношения между частными производными гамильтониана:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mathbf{x}^I} &= -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mathbf{x}^{\bar{I}}}\frac{\partial\mathbf{x}^{\bar{I}}}{\partial\mathbf{x}^I} - \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mathbf{p}^I}\frac{\partial\mathbf{p}^I}{\partial\mathbf{x}^I}, \\ \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mathbf{p}^{\bar{I}}} &= -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mathbf{x}^{\bar{I}}}\frac{\partial\mathbf{x}^{\bar{I}}}{\partial\mathbf{p}^{\bar{I}}} - \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mathbf{p}^I}\frac{\partial\mathbf{p}^I}{\partial\mathbf{p}^{\bar{I}}}. \end{aligned} \tag{4.3.59}$$

Рассмотрим действие поля $\mathbf{V}(\mathcal{H})$ на ограничение функции $\psi$ на многообразие $L$.

$$i^*\left(\mathbf{V}\left(\mathcal{H}\right)\psi\right)=i^*\left(-\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mathbf{x}^I}\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{p}^I}-\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mathbf{x}^{\bar{I}}}\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{p}^{\bar{I}}}+\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mathbf{p}^I}\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{x}^I}+\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mathbf{p}^{\bar{I}}}\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{x}^{\bar{I}}}\right)=$$

$$=\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mathbf{x}^{\bar{I}}}\frac{\partial\mathbf{x}^{\bar{I}}}{\partial\mathbf{x}^I}+\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mathbf{p}^I}\frac{\partial\mathbf{p}^I}{\partial\mathbf{x}^I}\right)\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{p}^I}-\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mathbf{x}^{\bar{I}}}\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{p}^{\bar{I}}}+ \tag{4.3.60}$$

$$+\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mathbf{p}^I}\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{x}^I}-\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mathbf{x}^{\bar{I}}}\frac{\partial\mathbf{x}^{\bar{I}}}{\partial\mathbf{p}^{\bar{I}}}+\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mathbf{p}^I}\frac{\partial\mathbf{p}^I}{\partial\mathbf{p}^{\bar{I}}}\right)\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{x}^{\bar{I}}}.$$

Перегруппируем здесь члены, учтя соотношения (4.3.39)

$$i^*\left(\mathbf{V}\left(\mathcal{H}\right)\psi\right)=-\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mathbf{x}^{\bar{I}}}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{p}^{\bar{I}}}+\frac{\partial\mathbf{p}^I}{\partial\mathbf{p}^{\bar{I}}}\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{p}^I}+\frac{\partial\mathbf{x}^{\bar{I}}}{\partial\mathbf{p}^{\bar{I}}}\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{x}^{\bar{I}}}\right)+$$

$$+\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mathbf{p}^I}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{x}^I}+\frac{\partial\mathbf{x}^{\bar{I}}}{\partial\mathbf{x}^I}\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{x}^{\bar{I}}}+\frac{\partial\mathbf{p}^I}{\partial\mathbf{x}^I}\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{p}^I}\right)=\mathbf{V}\left(\mathcal{H}_I\right)i^*\psi. \tag{4.3.61}$$

где

$$\mathbf{V}\left(\mathcal{H}_I\right)=-\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mathbf{x}^{\bar{I}}}\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}^{\bar{I}}}+\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mathbf{p}^I}\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}^I}. \tag{4.3.62}$$

Иными словами, гамильтоново векторное поле на лагранжевом многообразии действует на ограничение функции $\psi$, рассматриваемое как функция координат $\left(\mathbf{x}^I,\mathbf{p}_{\bar{I}}\right)$.

Мера $\mu$ на лагранжевом многообразии $L$ выбирается согласованной с гамильтонианом $\mathcal{H}$. Это означает, что производная Ли вдоль векторного поля $\mathbf{V}\left(\mathcal{H}\right)$ равна нулю:

$$\mathcal{L}_{\mathbf{V}(\mathcal{H})}\mu=0. \tag{4.3.63}$$

Физический смысл этого условия заключается в следующем. Рассмотрим некоторую область лагранжева многообразия, которая переносится вдоль интегральных кривых векторного поля $\mathbf{V}\left(\mathcal{H}\right)$. При этом мера $\mu$ данной области не меняется. Это соответствует сохранению энергии поля при условии переноса энергии поля вдоль лучей. Поэтому, например, в области фокусировок, где геометрическая мера области уменьшается, плотность меры $\mu$, понимаемая как плотность энергии, возрастает.

Для вывода формулы коммутации гамильтониана с каноническим оператором воспользуемся формулой коммутации гамильтониана с преобразованием Фурье:

$$\mathcal{H}\left(\mathbf{x},\hat{\mathbf{p}}\right)\hat{F}^{k}_{\mathbf{p}_{\bar{I}}\to\mathbf{x}^{\bar{I}}}\psi_I=\hat{F}^{k}_{\mathbf{p}_{\bar{I}}\to\mathbf{x}^{\bar{I}}}\mathcal{H}\left(\mathbf{x}^I,\mathbf{x}^{\bar{I}},\hat{\mathbf{p}}_I,\mathbf{p}_{\bar{I}}\right)\psi_I=$$

$$=\hat{F}^{k}_{\mathbf{p}_{\bar{I}}\to\mathbf{x}^{\bar{I}}}\mathcal{H}\left(\mathbf{x}^I,\hat{\mathbf{x}}^{\bar{I}},\hat{\mathbf{p}}_I,\mathbf{p}_{\bar{I}}\right)\psi_I \quad . \tag{4.3.64}$$

Эта формула основана на известном свойстве преобразования Фурье: в частотном пространстве операторы дифференцирования соответствуют умножению на частоты, а операторы умножения на координаты соответствуют дифференцированию по частотам. Искомая формула следует из (4.3.64) и (4.3.53):

$$\mathcal{H}\left(\mathbf{x}^I,\hat{\mathbf{x}}^{\bar{I}},\hat{\mathbf{p}}_I,\mathbf{p}_{\bar{I}}\right)K_I\varphi=K_I\left\{\mathcal{H}\left(\mathbf{x}^I,-\frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{p}^{\bar{I}}},\frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{x}^I},\mathbf{p}_{\bar{I}}\right)+\frac{1}{ik}P^1_I\right\}, \tag{4.3.65}$$

где $P^1_I$ – оператор переноса 1-го порядка, имеющий вид

$$P^1_I=\frac{1}{\sqrt{\mu_I}}\left[-\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mathbf{x}^{\bar{I}}}\frac{\partial}{\mathbf{p}_{\bar{I}}}+\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mathbf{p}_I}\frac{\partial}{\mathbf{x}^I}-\frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial\mathbf{x}^{\bar{I}}\partial\mathbf{p}_{\bar{I}}}-\frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial\mathbf{x}^{\bar{I}}\partial\mathbf{p}_I}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\mathbf{x}^I\partial\mathbf{p}_{\bar{I}}}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial\mathbf{x}^{\bar{I}}\otimes\partial\mathbf{x}^{\bar{I}}}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\mathbf{p}_{\bar{I}}\otimes\partial\mathbf{p}_{\bar{I}}}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial\mathbf{p}_I\otimes\partial\mathbf{p}_I}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\mathbf{x}^I\otimes\partial\mathbf{x}^I}\right]\sqrt{\mu_I}. \tag{4.3.66}$$

Эту формулу мы преобразуем следующим образом:

$$P^1_I=\frac{1}{2}\mathbf{V}\left(\mathcal{H}_I\right)\ln\mu_I+\mathbf{V}\left(\mathcal{H}_I\right)-\frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial\mathbf{x}^{\bar{I}}\partial\mathbf{p}_{\bar{I}}}-\frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial\mathbf{x}^{\bar{I}}\otimes\partial\mathbf{p}_I}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\mathbf{x}^I\otimes\partial\mathbf{p}_{\bar{I}}}+$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial\mathbf{x}^{\bar{I}}\otimes\partial\mathbf{x}^{\bar{I}}}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\mathbf{p}_{\bar{I}}\otimes\partial\mathbf{p}_{\bar{I}}}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial\mathbf{p}_I\otimes\partial\mathbf{p}_I}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\mathbf{x}^I\otimes\partial\mathbf{x}^I}. \tag{4.3.67}$$

Вычислим $\mathbf{V}\left(\mathcal{H}_I\right)\ln\mu_I$, пользуясь (4.3.63) и (4.3.29). Поскольку мера $\mu$ равна внешнему произведению плотности и дифференциалов всех координат, от которых она зависит, ее внешняя производная равна 0. Следовательно,

$$d\left(i_{\mathbf{V}(\mathcal{H}_I)}\mu\right)=0. \tag{4.3.68}$$

Многократно применяя свойство (4.3.16) внутреннего произведения, можно записать

$$i_{\mathbf{V}(\mathcal{H}_I)}\mu=\sum_i\mu_I\left(\mathbf{x}^I,\mathbf{p}_{\bar{I}}\right)(-1)^{i-1}dx^{I_i}\left(\mathbf{V}\left(\mathcal{H}_I\right)\right)dx^{I_1}\wedge\ldots\wedge\widehat{dx^{I_i}}\wedge\ldots\wedge dx^{I_{|I|}}\wedge d^{|\bar{I}|}p_{\bar{I}}+$$
$$+\sum_j\mu_I\left(\mathbf{x}^I,\mathbf{p}_{\bar{I}}\right)(-1)^{|I|+j-1}dp_{\bar{I}_j}\left(\mathbf{V}\left(\mathcal{H}_I\right)\right)d^{|I|}x^I\wedge dp_{\bar{I}_1}\wedge\ldots\wedge\widehat{dp_{\bar{I}_j}}\wedge\ldots\wedge dp_{\bar{I}_{|\bar{I}|}}. \tag{4.3.69}$$

Вычисляя внешнюю производную этого выражения и упорядочивая дифференциалы $dx^i$ и $dp^j$ во всех членах, получаем

$$\mu_I\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^I}d\mathbf{x}^I\left(\mathbf{V}\left(\mathcal{H}_I\right)\right)+\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_{\bar{I}}}d\mathbf{p}_{\bar{I}}\left(\mathbf{V}\left(\mathcal{H}_I\right)\right)\right)+$$
$$+d\mathbf{x}^I\left(\mathbf{V}\left(\mathcal{H}_I\right)\right)\frac{\partial \mu_I}{\partial \mathbf{x}^I}+d\mathbf{p}_{\bar{I}}\left(\mathbf{V}\left(\mathcal{H}_I\right)\right)\frac{\partial \mu_I}{\partial \mathbf{p}_{\bar{I}}}=0 \tag{4.3.70}$$

Или, с учетом (4.3.62),

$$\left(\frac{\partial_I}{\partial \mathbf{x}^I}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}_I}-\frac{\partial_I}{\partial \mathbf{p}_{\bar{I}}}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{x}^{\bar{I}}}\right)+\mathbf{V}\left(\mathcal{H}_I\right)\ln\mu_I=0\,. \tag{4.3.71}$$

Первый член здесь является дивергенцией векторного поля $\mathbf{V}\left(\mathcal{H}_I\right)$, вычисляемой на многообразии *L*. Дифференциальные операторы понимаются следующим образом:

$$\frac{\partial_I}{\partial \mathbf{x}^I}=\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^I}+\frac{\partial \mathbf{x}^{\bar{I}}}{\partial \mathbf{x}^I}\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^{\bar{I}}}+\frac{\partial \mathbf{p}_I}{\partial \mathbf{x}^I}\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_I},$$
$$\frac{\partial_I}{\partial \mathbf{p}_{\bar{I}}}=\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_{\bar{I}}}+\frac{\partial \mathbf{x}^{\bar{I}}}{\partial \mathbf{p}_{\bar{I}}}\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^{\bar{I}}}+\frac{\partial \mathbf{p}_I}{\partial \mathbf{p}_{\bar{I}}}\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_I}. \tag{4.3.72}$$

В силу (4.3.40)

$$\mathbf{p}_I=\frac{\partial \Psi_I}{d\mathbf{x}^I},\quad \mathbf{x}^{\bar{I}}=-\frac{\partial \Psi_I}{\partial \mathbf{p}_{\bar{I}}}. \tag{4.3.73}$$

Поэтому дифференциальные операторы на многообразии можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial_I}{\partial \mathbf{x}^I}=\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^I}-\frac{\partial^2\Psi_I}{\partial \mathbf{x}^I\otimes\partial \mathbf{p}_{\bar{I}}}\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^{\bar{I}}}+\frac{\partial^2\Psi_I}{\partial \mathbf{x}^I\otimes\partial \mathbf{x}^I}\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_I},$$
$$\frac{\partial_I}{\partial \mathbf{p}_{\bar{I}}}=\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_{\bar{I}}}-\frac{\partial^2\Psi_I}{\partial \mathbf{p}_{\bar{I}}\otimes\partial \mathbf{p}_{\bar{I}}}\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^{\bar{I}}}+\frac{\partial^2\Psi_I}{\partial \mathbf{p}_{\bar{I}}\otimes\partial \mathbf{x}^I}\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_I}. \tag{4.3.74}$$

В результате соотношение (4.3.71) примет вид

$$\frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial \mathbf{x}^I\otimes\partial \mathbf{p}_I}-2\frac{\partial^2\Psi_I}{\partial \mathbf{x}^I\otimes\partial \mathbf{p}_{\bar{I}}}\frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial \mathbf{x}^{\bar{I}}\otimes\partial \mathbf{p}_I}+\frac{\partial^2\Psi_I}{\partial \mathbf{x}^I\otimes\partial \mathbf{x}^I}\frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}_I\otimes\partial \mathbf{p}_I}+$$
$$+\frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}_{\bar{I}}\otimes\partial \mathbf{x}^{\bar{I}}}+\frac{\partial^2\Psi_I}{\partial \mathbf{p}_{\bar{I}}\otimes\partial \mathbf{p}_{\bar{I}}}\frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial \mathbf{x}^{\bar{I}}\otimes\partial \mathbf{x}^{\bar{I}}}=-\mathbf{V}\left(\mathcal{H}_I\right)\ln\mu_I \tag{4.3.75}$$

Подстановка этого равенства в (4.3.67) приводит к тому, что все члены, содержащие вторые производные Ψ, взаимно сокращаются, а вторые производные гамильтониана собираются в след полной матрицы смешанных производных:

$$P_I^1 = \mathbf{V}\left(\mathcal{H}_I\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \mathbf{x}\,\partial \mathbf{p}}. \qquad (4.3.76)$$

Таким образом, анзац асимптотического решения волновой задачи в виде канонического оператора Маслова приводит к тому, что вариации амплитуды за счет кривизны фазового фронта, т.е. фокусировок и дефокусировок, полностью описываются плотностью меры $\mu_I$, переносимой гамильтоновым векторным полем.

Дополнительный амплитудный множитель $\varphi$ описывается уравнением переноса $P_I^1\varphi = 0$, не зависящим от кривизны волнового фронта. В простейшем случае, когда смешанные производные гамильтониана по координатам и импульсам равны 0, функция $\varphi$ переносится вдоль лучей без изменений. В общем случае второй член в операторе переноса можно формально представить в виде $\operatorname{div}\dot{\mathbf{x}}$, как это следует из уравнений гамильтоновой механики (4.1.22). Однако частные производные $\partial / \partial \mathbf{x}$ в этом члене вычисляются не на лагранжевом многообразии, а во всем фазовом пространстве, т.е. при фиксированном значении импульса. Это приводит к следующему пониманию этого члена. Рассмотрим луч с импульсом **p**, пришедший в точку **x**. Рассмотрим в окрестности этой точки виртуальную плоскую волну с таким импульсом и вычислим для этой волны виртуальное поле векторов $\dot{\mathbf{x}}$. Дивергенция этого поля и будет равна рассматриваемому члену. Таким образом, этот член может описывать эффекты, связанные с неоднородностью анизотропии среды.

Сформулируем в заключение рецепт построения асимптотического решения волновых задач методом канонического оператора Маслова. Рассмотрим уравнение

$$\mathcal{H}\left(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{p}}\right) u = 0. \qquad (4.3.77)$$

в 3-мерном пространстве с граничным условием $u_0 = A_0 \exp\left(ik\Psi_0\right)$ на некоторой поверхности *S*. Мы начинаем с определения направлений лучей на этой поверхности. Для этого мы пользуемся условием $\left|\nabla\Psi\right| = n$, следующим из уравнения эйконала (4.1.20), и начальным условием, определяющим проекцию $\nabla\Psi$ на поверхность *S*, равную $\nabla_{||}\Psi_0$. Предполагается, что условия излучения либо учтены в самом уравнении, либо наложены дополнительно. Это позволяет определить перпендикулярную поверхности компоненту $\nabla\Psi$, равную $\pm\sqrt{n^2 - \left|\nabla_{||}\Psi_0\right|^2}$, где знак определяется условиями излучения. Это задает начальные условия для уравнений лучей, определяемых гамильтоновой системой (4.1.22). Далее вычисляются лучи и определяется конфигурация лагранжева многообразия задачи. Для найденного лучевого многообразия определяются проекции и строится система карт с координатами ($\mathbf{x}^I$, $\mathbf{p}_I$), в которых проекция лагранжева многообразия однозначна. По лучам вычисляется мера $\mu_I$ из условия сохранения меры элемента лагранжева многообразия при его переносе вдоль лучей. Начальное условие для функции $\varphi$ совпадает с $A_0$. Изменение функции $\varphi$ вдоль лучей задается уравнением переноса $P_I^1\varphi = 0$.

В частности, для стандартных волновых уравнений эта функция переносится вдоль лучей без изменения.

Существенной частью этой схемы решения является предположение о том, что на поверхности $S$ в каждой точке имеется лишь один луч, направление которого определяется градиентом граничных значений эйконала $\Psi_0$. Это условие выполнено лишь для определенного типа начальных условий с достаточно гладкими функциями $A_0$ и $\Psi_0$. Вопрос о том, как в общем случае определить начальную структуру лучевого многообразия, в рамках аппарата канонического оператора Маслова не ставится. Между тем именно этот вопрос будет в дальнейшем для нас ключевым.

**Заключительные замечания**

Мы рассмотрели канонический оператор Маслова. Ряд разделов теории, изучающих геометрию лагранжевых многообразий и индекс Маслова, не вошли в наше рассмотрение, но с ними можно ознакомиться по цитированной литературе. Канонический оператор Маслова в свое время оказался первым шагом на пути построения более общих методов построения асимптотических решений волновых задач, к которым мы обратимся в следующих разделах. Важным достоинством метода канонического оператора является то, что он позволяет с легкостью получать решения в окрестности каустик. Недостатком этого метода является необходимость сшивания глобального решения из множества локальных решений, полученных в разных представлениях. Выше мы видели, что в вакууме в импульсном представлении отсутствует дифракция. Это означает, что асимптотическое решение в импульсном представлении будет точным. Пределы применимости геометрической оптики будут разными в разных представлениях. Это может затруднить сшивание глобального решения.

В данной книге нас интересует решение обратных задач зондирования атмосферы. Использование решения прямой задачи в виде канонического оператора неудобно для формулировки обратной задачи, поскольку сама структура лагранжева многообразия, определяющая структуру оператора, изначально неизвестна и сама должна быть определена. Использование в качестве координат фазового пространства лишь смешанных наборов по $n$ элементов из множества $(x^i, p_j)$ является слишком ограничительным. Требуется аппарат, позволяющий работать с более общими координатами в фазовом пространстве, записывать волновое уравнение в таких координатах, решать его и переводить решение в стандартное представление. Этим требованиям удовлетворяют интегральные операторы Фурье, которые часто называют также интегральными операторами Фурье–Маслова [7]. В последующих разделах мы займемся изучением канонических преобразований фазового пространства и их связи с интегральными операторами Фурье.

Ведущей идеей данной книги будет сведение волновой обратной задачи зондирования к геометрооптической. Для этого необходимо уметь восстанавливать лучевую структуру волнового поля. Эта задача является обратной по отношению к задаче, решаемой техникой канонического оператора Маслова, позволяющей строить асимптотическое решение волновой задачи, зная луче-

вое многообразие. Как будет показано ниже, задачу восстановления лучевой структуры волнового поля можно решать, пользуясь аппаратом интегральных операторов Фурье.

### Литература


1. *Уорнер Ф.* Основы теории гладких многообразий и групп Ли. М.: Мир, 1987. 304 с.
2. *Постников М.М.* Лекции по геометрии. Семестр III. Гладкие многообразия. М.: Наука, 1987. 480 с.
3. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия: методы и приложения. Т. 1. Геометрия поверхностей, групп преобразований и полей. М.: УРСС, 1998. 336 с.
4. *Федерер Г.* Геометрическая теория меры. М.: Наука, 1987. 760 с.
5. *Маслов В.П.* Теория возмущений и асимптотические методы. М.: Издательство МГУ, 1965. 549 с.
6. *Мищенко А.С., Стернин Б.Ю., Шаталов В.Е.* Лагранжевы многообразия и метод канонических оператора. М.: Наука, 1978. 354 с.
7. *Nazaikinskii V.E., Shatalov V.E., Sternin B.Yu.* Contact geometry and linear differential equations. Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1992. 216 p.


## 4.4. Интегральные операторы Фурье

### Преобразование Фурье

Для понимания основной идеи построения интегральных операторов Фурье сначала рассмотрим импульсное представление волнового поля, т.е. преобразования Фурье, которое, как мы видели, является основой канонического оператора Маслова [1]. Рассмотрим задачу в $n$-мерном пространстве с направлением распространения («временной» координатой) $x$ и вектором поперечных координат $\mathbf{y}$. Импульсное представление волнового поля имеет вид

$$\tilde{u}(x,\boldsymbol{\eta}) = F_{\mathbf{y}\to\boldsymbol{\eta}}u = \left(\frac{-ik}{2\pi}\right)^{(n-1)/2} \int u\left(x,\mathbf{y}\right)\exp\left(-ik\mathbf{y}\boldsymbol{\eta}\right)d\mathbf{y}, \qquad (4.4.1)$$

где $\boldsymbol{\eta}$ – ковектор импульса, двойственный вектору координат $\mathbf{y}$. Представим исходное и преобразованное поля в форме, используемой для построения геометрической оптики:

$$\begin{aligned} u\left(x,\mathbf{y}\right) &= A\left(x,\mathbf{y}\right)\exp\left(ik\Psi\left(x,\mathbf{y}\right)\right), \\ \tilde{u}\left(x,\boldsymbol{\eta}\right) &= A'\left(x,\boldsymbol{\eta}\right)\exp\left(ik\Psi'\left(x,\boldsymbol{\eta}\right)\right). \end{aligned} \qquad (4.4.2)$$

Для нахождения амплитуды и фазы преобразованного поля воспользуемся методом стационарной фазы [2]. Предположим, что проекция лучевого многообразия на ось $\boldsymbol{\eta}$ однозначна, т.е. в импульсном представлении имеет место однолучевое распространение. Обозначим через $\mathbf{y}_s(x, \boldsymbol{\eta})$ стационарную точку интеграла Фурье (4.4.1), определяемую условием

$$\frac{\partial}{\partial\mathbf{y}}\left(\Psi\left(x,\mathbf{y}\right)-\mathbf{y}\boldsymbol{\eta}\right)=0. \qquad (4.4.3)$$

Отсюда вытекают следующие соотношения:

$$\Psi'(x,\boldsymbol{\eta}) = \Psi\left(x,\mathbf{y}_S(x,\boldsymbol{\eta})\right) - \mathbf{y}_S(x,\boldsymbol{\eta})\,\boldsymbol{\eta}, \tag{4.4.4}$$

$$\left.\frac{\partial\Psi(x,\mathbf{y})}{\partial\mathbf{y}}\right|_{\mathbf{y}_S(x,\boldsymbol{\eta})} = \boldsymbol{\eta}, \tag{4.4.5}$$

$$\frac{\partial\Psi'(x,\boldsymbol{\eta})}{\partial\boldsymbol{\eta}} = \left(\frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{y}} - \boldsymbol{\eta}\right)\frac{\partial\mathbf{y}_S(x,\boldsymbol{\eta})}{\partial\boldsymbol{\eta}} - \mathbf{y}_S(x,\boldsymbol{\eta}) = -\mathbf{y}_S(x,\boldsymbol{\eta}), \tag{4.4.6}$$

$$A'(x,\boldsymbol{\eta}) = \frac{A\left(x,\mathbf{y}_S(x,\boldsymbol{\eta})\right)}{\sqrt{\det\left\|-\dfrac{\partial^2\Psi}{\partial\mathbf{y}\otimes\partial\mathbf{y}}\right\|}} = \frac{A\left(x,\mathbf{y}_S(x,\boldsymbol{\eta})\right)}{\sqrt{\det\left\|-\dfrac{\partial\boldsymbol{\eta}_S}{\partial\mathbf{y}}\right\|}} = A\left(x,\mathbf{y}_S(x,\boldsymbol{\eta})\right)\sqrt{\det\left\|-\frac{\partial\mathbf{y}_S}{\partial\boldsymbol{\eta}}\right\|}, \tag{4.4.7}$$

где $\boldsymbol{\eta}_s(x, \mathbf{y})$ – решение уравнения $\mathbf{y} = \mathbf{y}_S(x,\boldsymbol{\eta})$.

Уравнение (4.4.5) является следствием того, что в стационарной точке производная фазы подынтегрального выражения обращается в 0. Это уравнение показывает также, что стационарная точка $\mathbf{н}_s(x, \boldsymbol{\eta})$ принадлежит лучевому многообразию, поскольку $\boldsymbol{\eta}$ оказывается равным импульсу исходного поля $\dfrac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{y}}$.

Уравнение (4.4.6) показывает, что если мы используем импульс в качестве новой координаты $\mathbf{y}' = \boldsymbol{\eta}$ в импульсном представлении, то сопряженный импульс равен $\boldsymbol{\eta}' = -\mathbf{y}$. Можно также ввести новую функцию Гамильтона $H'(\mathbf{y}', \boldsymbol{\eta}') = H(-\boldsymbol{\eta}', \mathbf{y}')$ и переписать гамильтонову систему в новых координатах в той же самой канонической форме:

$$\frac{d\mathbf{y}'}{dx} = \frac{\partial H'}{\partial\boldsymbol{\eta}'}, \quad \frac{d\boldsymbol{\eta}'}{dx} = -\frac{\partial H'}{\partial\mathbf{y}'}. \tag{4.4.8}$$

Из уравнения (4.4.4) можно вывести дифференциальное уравнение для эйконала в импульсном представлении:

$$d\Psi' = d\Psi - \mathbf{y}\,d\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}\,d\mathbf{y} = -\mathbf{y}\,d\boldsymbol{\eta} - H\,dx = \boldsymbol{\eta}'\,d\mathbf{y}' - H'\,dx. \tag{4.4.9}$$

Отсюда следует, что мы можем записать уравнение Гамильтона–Якоби для $\Psi'$ в координатах $(\mathbf{y}', \boldsymbol{\eta}')$ с функцией Гамильтона $H'$.

Из уравнения (4.4.7) следует локальное сохранение энергии при переходе к импульсному представлению: $A'^2 = A^2 \det\left\|\dfrac{\partial\mathbf{y}}{\partial\mathbf{y}'}\right\|$, что обеспечивается выбором нормировочного множителя $(-ik / 2\pi)^{(n-1)/2}$ в преобразовании Фурье. Используя этот факт и то, что в геометрической оптике энергия переносится вдоль лучей, мы видим, что волновое уравнение (4.1.1) может быть записано в том же виде в новых координатах:

$$-\frac{1}{ik}\frac{\partial}{\partial x}\tilde{u} = H'\left(x,\mathbf{y}',\hat{\boldsymbol{\eta}}'\right)\tilde{u}. \tag{4.4.10}$$

Это простое рассмотрение иллюстрирует важнейшие свойства интегральных операторов Фурье, играющих, как и преобразование Фурье, двойственную роль: 1) они позволяют строить асимптотические решения граничной задачи для волновых уравнений и 2) они позволяют строить представления волновых полей.

**Общее определение интегральных операторов Фурье**

Интегральные операторы Фурье появляются, когда оператор Маслова используется для вычисления функции Грина, описывающей поле точечного источника. Асимптотическое решение в форме интегрального оператора Фурье основано на геометрооптической лучевой конфигурации, определяющей ядро оператора, переводящего геометрооптическое решение в более точное, асимптотическое решение.

Для заданного начального условия $u_0(\mathbf{y}) = u(0, \mathbf{y})$ мы будем искать решение $u(x, \mathbf{z})$, где удобно ввести другое обозначение $\mathbf{z}$ для вектора поперечных координат, отнесенного к расстоянию распространения $x$. Координаты $\mathbf{z}$ можно рассматривать как другой экземпляр координат $\mathbf{y}$ в другой плоскости, но их можно считать и другими координатами в том же фазовом пространстве.

Рассмотрим разложение начального условия по плоским волнам:

$$u_0(\mathbf{y}) = \left(\frac{ik}{2\pi}\right)^{(n-1)/2} \int \tilde{u}(0, \boldsymbol{\eta}) \exp(ik\mathbf{y}\boldsymbol{\eta})\, d\boldsymbol{\eta}. \qquad (4.4.11)$$

Для каждой плоской волны решение может быть записано в форме $[K\varphi](x, \mathbf{z}, \boldsymbol{\eta})$. Решение задачи будет тогда представлено в следующем виде:

$$u(x, \mathbf{z}) = \left(\frac{-ik}{2\pi}\right)^{(n-1)/2} \int [K\varphi](x, \mathbf{z}, \boldsymbol{\eta}) \tilde{u}(0, \boldsymbol{\eta})\, d\eta. \qquad (4.4.12)$$

Это определение интегрального оператора Фурье согласно [1]. Для наших целей удобнее пользоваться более простыми выражениями.

Если распространение каждой плоской волны может быть описано в координатном представлении, то соответствующий оператор можно записать в следующей форме [3–8]:

$$u(x, \mathbf{z}) = \hat{\Phi}_1 u_0 = \left(\frac{-ik}{2\pi}\right)^{(n-1)/2} \int a_1(x, \mathbf{z}, \boldsymbol{\eta}) \exp\left(ikS_1(x, \mathbf{z}, \boldsymbol{\eta})\right) \tilde{u}(0, \boldsymbol{\eta})\, d\boldsymbol{\eta}. \qquad (4.4.13)$$

Вместо плоских волн можно разложить начальное условие по точечным источникам:

$$u_0(\mathbf{y}) = \int u_0(\mathbf{y}') \delta(\mathbf{y} - \mathbf{y}')\, d\mathbf{y}'. \qquad (4.4.14)$$

Записывая затем геометрооптическое решение для сферической волны от каждого точечного источника, мы приходим к следующей форме оператора:

$$u(x, \mathbf{z}) = \hat{\Phi}_2 u_0 = \left(\frac{-ik}{2\pi}\right)^{(n-1)/2} \int a_2(x, \mathbf{z}, \mathbf{y}) \exp\left(ikS_2(x, \mathbf{z}, \mathbf{y})\right) u(0, \mathbf{y})\, d\mathbf{y}. \qquad (4.4.15)$$

Такая форма оператора была использована в [9].

Мы ввели операторы $\hat{\Phi}_1$ и $\hat{\Phi}_2$, которые будем в дальнейшем называть интегральными операторами Фурье 1-го и 2-го типа соответственно. Функции $a_{1,\,2}$ называются амплитудными функциями (или просто амплитудами, или символами), а функции $S_{1,\,2}$ – фазовыми функциями интегральных операторов Фурье. Частным случаем оператора второго типа является преобразование Фурье. Аналогично можно вести операторы 3-го и 4-го типа с фазовыми функциями $S_3(x, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{y})$ и $S_4(x, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$. Такие операторы переводят волновую функцию в импульсное представление. В силу симметрии между координатным и импульсным представлением все выкладки для операторов 3-го и 4-го типа полностью аналогичны выкладкам для операторов 1-го и 2-го типа, рассмотрением которых мы ограничимся.

Операторы 2-го типа были введены В.А. Фоком [9] при рассмотрении канонических преобразований квантовой механики. Первое издание книги Фока появилось еще в 1932 г. Операторы 1-го типа были введены в 1969 г в работе Ю.В. Егорова [10] в связи с задачей о каноническом преобразовании псевдодифференциального оператора. Как отмечает Маслов [11], Фок и Егоров изложили по сути один и тот же результат, но на разных языках, на физическом и на математическом. Как мы уже отмечали, в данной книге нам ближе именно физический язык. Поскольку термин «интегральные операторы Фурье» появился применительно к операторам (4.4.13), именно этот тип операторов мы называем первым, хотя исторически он второй. Результаты Фока и Егорова, получившие развитие в работах Хермандера [5, 6], будут для нас ключевыми.

Продолжим рассмотрение граничной задачи. В плоскости источника $x = 0$ вектор поперечных координат и сопряженный ему ковектор импульса (производная эйконала поля) обозначаются $(\mathbf{y}, \boldsymbol{\eta})$. При некотором $x$ координаты и импульсы будут обозначаться $(\mathbf{z}, \boldsymbol{\xi})$. Решения уравнения для геометрооптических лучей в виде функций от начальных условий запишем в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= \mathbf{z}(x, \mathbf{y}, \boldsymbol{\eta}), \\ \boldsymbol{\xi} &= \boldsymbol{\xi}(x, \mathbf{y}, \boldsymbol{\eta}). \end{aligned} \tag{4.4.16}$$

Для фазовых функций можно записать следующие уравнения:

$$\begin{aligned} S_1(x, \mathbf{z}, \boldsymbol{\eta}) &= \mathbf{y}(x, \mathbf{z}, \boldsymbol{\eta})\,\boldsymbol{\eta} + \Sigma_1(x, \mathbf{z}, \boldsymbol{\eta}), \\ S_2(x, \mathbf{z}, \mathbf{y}) &= \Sigma_2(x, \mathbf{z}, \mathbf{y}), \end{aligned} \tag{4.4.17}$$

где $\mathbf{y}(x, \mathbf{z}, \boldsymbol{\eta})$ – решение первого из уравнений (4.4.16) относительно $\mathbf{y}$, $\Sigma_{1,2}$ – фазовый путь вдоль луча между точками $(0, \mathbf{y})$ и $(x, \mathbf{z})$, $\mathbf{y}\boldsymbol{\eta}$ – фаза падающей плоской волны. Поскольку волновые фронты нормальны к лучам, можно записать дифференциальные уравнения при фиксированном $x$:

$$d\Sigma_{1,2} = \boldsymbol{\xi}\, d\mathbf{z} - \boldsymbol{\eta}\, d\mathbf{y}. \tag{4.4.18}$$

Для фазовых функций при фиксированном $x$ мы получаем тогда следующие дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned} dS_1 &= \boldsymbol{\xi}\, d\mathbf{z} + \mathbf{y}\, d\boldsymbol{\eta}, \\ dS_2 &= \boldsymbol{\xi}\, d\mathbf{z} - \boldsymbol{\eta}\, d\mathbf{y}. \end{aligned} \tag{4.4.19}$$

Вывод выражений для амплитудных функций основан на сохранении энергии в геометрической оптике и аналогичен приведенному выше рассмотрению преобразования Фурье. Для оператора 1-го типа (4.4.13) рассмотрим приближение стационарной фазы:

$$\hat{\Phi}_1 u_0 = \left. \frac{a_1(x,\mathbf{z},\boldsymbol{\eta})\, A'(0,\boldsymbol{\eta}) \exp\left[ ik\left( S_1(x,\mathbf{z},\boldsymbol{\eta}) + \Psi'(0,\boldsymbol{\eta}) \right) \right]}{\sqrt{\det\left\| -\frac{\partial^2 S_1(x,\mathbf{z},\boldsymbol{\eta})}{\partial \boldsymbol{\eta}^2} - \frac{\partial^2 \Psi'(0,\boldsymbol{\eta})}{\partial \boldsymbol{\eta}^2} \right\|}} \right|_{\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\eta}_s(x,\mathbf{z})}, \quad (4.4.20)$$

где $\boldsymbol{\eta}_s(x, \mathbf{z})$ – точка стационарной фазы, определяемая уравнением

$$\left. \frac{\partial S_1(x,\mathbf{z},\boldsymbol{\eta})}{\partial \boldsymbol{\eta}} + \frac{\partial \Psi'(0,\boldsymbol{\eta})}{\partial \boldsymbol{\eta}} \right|_{\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\eta}_s(x,\mathbf{z})} = 0. \quad (4.4.21)$$

Потребуем локального сохранения энергии в следующей форме:

$$\left| \hat{\Phi}_1 u(\mathbf{z}) \right|^2 = \left| u_0(\mathbf{y}) \right|^2 \det\left\| \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{z}} \right\|. \quad (4.4.22)$$

Учитывая отмеченное выше локальное сохранение энергии при преобразовании Фурье, можно записать

$$\left. \frac{\left| a_1(x,\mathbf{z},\boldsymbol{\eta})\, A'(0,\boldsymbol{\eta}) \right|^2}{\det\left\| -\frac{\partial^2 S_1(x,\mathbf{z},\boldsymbol{\eta})}{\partial \boldsymbol{\eta} \otimes \partial \boldsymbol{\eta}} - \frac{\partial^2 \Psi'(0,\boldsymbol{\eta})}{\partial \boldsymbol{\eta} \otimes \partial \boldsymbol{\eta}} \right\|} \right|_{\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\eta}_s(x,\mathbf{z})} = \left| A'(0, \boldsymbol{\eta}_s(x,\mathbf{z})) \right|^2 \det\left\| \frac{\partial \boldsymbol{\eta}_s}{\partial \mathbf{z}} \right\|. \quad (4.4.23)$$

Отсюда получаем следующее выражение для амплитуды:

$$\left| a_1(x,\mathbf{z},\boldsymbol{\eta}_s(x,\mathbf{z})) \right|^2 = \det\left\| \left( -\frac{\partial^2 S_1(x,\mathbf{z},\boldsymbol{\eta})}{\partial \boldsymbol{\eta} \otimes \partial \boldsymbol{\eta}} - \frac{\partial^2 \Psi'(0,\boldsymbol{\eta})}{\partial \boldsymbol{\eta} \otimes \partial \boldsymbol{\eta}} \right) \frac{\partial \boldsymbol{\eta}_s}{\partial \mathbf{z}} \right\|_{\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\eta}_s(x,\mathbf{z})}. \quad (4.4.24)$$

Дифференцируя по $\mathbf{z}$ уравнение для точки стационарной фазы (4.4.21), получаем следующее уравнение:

$$\left( -\frac{\partial^2 S_1(x,\mathbf{z},\boldsymbol{\eta})}{\partial \boldsymbol{\eta} \otimes \partial \boldsymbol{\eta}} - \frac{\partial^2 \Psi'(0,\boldsymbol{\eta})}{\partial \boldsymbol{\eta} \otimes \partial \boldsymbol{\eta}} \right)\Bigg|_{\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\eta}_s(x,\mathbf{z})} \frac{\partial \boldsymbol{\eta}_s(x,\mathbf{z},)}{\partial \mathbf{z}} = \left. \frac{\partial^2 S_1(x,\mathbf{z},\boldsymbol{\eta})}{\partial \boldsymbol{\eta} \otimes \partial \mathbf{z}} \right|_{\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\eta}_s(x,\mathbf{z})}. \quad (4.4.25)$$

Точка стационарной фазы $\boldsymbol{\eta}_s(x, \mathbf{z})$ зависит от функции $u$, поэтому эти формулы справедливы при любом $\boldsymbol{\eta}$. Это позволяет записать выражение для ампли-

тудной функции $a_1(x, \mathbf{z}, \boldsymbol{\eta})$. Поскольку тот же вывод может быть повторен для оператора 2-го типа (4.4.15) с заменой $\boldsymbol{\eta}$ на $\mathbf{y}$, запишем сразу выражения для амплитудных функций операторов обоих типов:

$$a_1(x,\mathbf{z},\boldsymbol{\eta}) = \sqrt{\det\left\| \frac{\partial^2 S_1(x,\mathbf{z},\boldsymbol{\eta})}{\partial \mathbf{z} \otimes \partial \boldsymbol{\eta}} \right\|},$$
$$a_2(x,\mathbf{z},\mathbf{y}) = \sqrt{\det\left\| \frac{\partial^2 S_1(x,\mathbf{z},\mathbf{y})}{\partial \mathbf{z} \otimes \partial \mathbf{y}} \right\|}. \qquad (4.4.26)$$

В литературе [3, 9] приводится одномерный аналог этих выражений. Вывод выражения для амплитудной функции оператора 1-го типа, приведенный в [3], основан на требовании $\hat{\Phi}_1^* = \hat{\Phi}_1^{-1}$, где $\hat{\Phi}_1^*$ – сопряженный оператор. Это требование эквивалентно сохранению энергии.

В общем случае энергия поля равна

$$E = \int \left| \hat{\Phi}_1 u(\mathbf{z}) \right|^2 \mu_{\mathbf{z}}(\mathbf{z})\, d\mathbf{z} = \int \left| u_0(\mathbf{y}) \right|^2 \mu_{\mathbf{y}}(\mathbf{y})\, d\mathbf{y}, \qquad (4.4.27)$$

где $\mu_{\mathbf{z}}(\mathbf{z})$ и $\mu_{\mathbf{y}}(\mathbf{y})$ – плотности меры в исходном и целевом пространствах. Выражения для амплитудных функций (4.4.26) получены в предположении, что $\mu_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}) = \mu_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}) = 1$. Соотношение (4.4.22) должно быть тогда переписано в следующем виде

$$\left| \hat{\Phi}_1 u(\mathbf{z}) \right|^2 = \left| u_0(\mathbf{y}) \right|^2 \mu_1(\mathbf{z},\mathbf{y}) \det\left\| \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{z}} \right\|, \qquad (4.4.28)$$

где $\mu_1(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \mu_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}) / \mu_{\mathbf{z}}(\mathbf{z})$ – взаимная плотность меры. Таким образом, мы приходим к более общим выражениям для амплитудных функций:

$$a_1(x,\mathbf{z},\boldsymbol{\eta}) = \sqrt{\mu_1(\mathbf{z},\boldsymbol{\eta}) \det\left\| \frac{\partial^2 S_1(x,\mathbf{z},\boldsymbol{\eta})}{\partial \mathbf{z} \otimes \partial \boldsymbol{\eta}} \right\|},$$
$$a_2(x,\mathbf{z},\mathbf{y}) = \sqrt{\mu_2(\mathbf{z},\mathbf{y}) \det\left\| \frac{\partial^2 S_2(x,\mathbf{z},\mathbf{y})}{\partial \mathbf{z} \otimes \partial \mathbf{y}} \right\|}. \qquad (4.4.29)$$

**Групповые свойства интегральных операторов Фурье**

Множество интегральных операторов Фурье включает единичный оператор 1-го типа с производящей функцией $S_1(\mathbf{z}, \boldsymbol{\eta}) = \mathbf{z}\boldsymbol{\eta}$, равный композиции прямого и обратного преобразований Фурье. Для каждого интегрального оператора Фурье существует обратный оператор, равный, как следует из условия сохранения энергии, сопряженному $\hat{\Phi}_1^{-1} = \hat{\Phi}_1^*$. Как будет показано ниже, композиция двух интегральных операторов Фурье также принадлежит к этому классу операторов. Таким образом, интегральные операторы Фурье образуют группу.

Рассмотрим композицию двух интегральных операторов Фурье 2-го типа и найдем закон композиции для фазовых и амплитудных функций. Этого рассмотрения будет достаточно, поскольку оператор 1-го типа по определению является композицией двух операторов 2-го типа, одним из которых является преобразование Фурье. Пусть имеются два оператора $\hat{\mathbf{\Phi}}_2^{(1)}$ и $\hat{\mathbf{\Phi}}_2^{(2)}$ с фазовыми функциями $S_2^{(1)}(\mathbf{v}, \mathbf{y})$ и $S_2^{(2)}(\mathbf{z}, \mathbf{v})$ и амплитудными функциями $a_2^{(1)}(\mathbf{v}, \mathbf{y})$ и $a_2^{(2)}(\mathbf{z}, \mathbf{v})$. Параметрическую зависимость от $x$ мы здесь опускаем. Рассмотрим оператор $\hat{\mathbf{\Phi}}_2 = \hat{\mathbf{\Phi}}_2^{(2)} \circ \hat{\mathbf{\Phi}}_2^{(1)}$. Ядро этого оператора равно

$$\begin{aligned} &a_2(\mathbf{z},\mathbf{y})\exp\left(ikS_2(\mathbf{z},\mathbf{y})\right) = \\ &= \int a_2^{(2)}(\mathbf{z},\mathbf{v})\, a_2^{(1)}(\mathbf{v},\mathbf{y})\exp\left(ik\left(S_2^{(2)}(\mathbf{z},\mathbf{v}) + S_2^{(1)}(\mathbf{v},\mathbf{y})\right)\right)d\mathbf{v}. \end{aligned} \tag{4.4.30}$$

Это выражение называется произведением Вольтерра ядер операторов $\hat{\mathbf{\Phi}}_2^{(1)}$ и $\hat{\mathbf{\Phi}}_2^{(2)}$. Обозначим через $\mathbf{v}_s(\mathbf{z}, \mathbf{y})$ точку стационарной фазы этого интеграла, определяемую уравнением:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\left(S_2^{(2)}(\mathbf{z},\mathbf{v}) + S_2^{(1)}(\mathbf{v},\mathbf{y})\right) = 0. \tag{4.4.31}$$

Отсюда следует выражение для фазовой функции композиции операторов:

$$S_2(\mathbf{z},\mathbf{y}) = S_2^{(2)}\left(\mathbf{z}, \mathbf{v}_s(\mathbf{z},\mathbf{y})\right) + S_2^{(1)}\left(\mathbf{v}_s(\mathbf{z},\mathbf{y}), \mathbf{y}\right). \tag{4.4.32}$$

Поскольку оба оператора $\hat{\mathbf{\Phi}}_2^{(1)}$ и $\hat{\mathbf{\Phi}}_2^{(2)}$ сохраняют энергию, это же верно и для их композиции $\hat{\mathbf{\Phi}}_2$. Следовательно, амплитудная функция $a_2(\mathbf{z}, \mathbf{y})$ должна определяться выражением (4.4.29).

Выражение для амплитудной функции несложно вывести и напрямую. Для взаимных мер имеет место соотношение

$$\mu_2(\mathbf{z},\mathbf{y}) = \mu_2^{(2)}(\mathbf{z},\mathbf{v})\,\mu_2^{(1)}(\mathbf{v},\mathbf{y}). \tag{4.4.33}$$

Дифференцируя соотношение (4.4.31) по $\mathbf{y}$ и по $\mathbf{z}$, получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial^2 S_2^{(2)}}{\partial \mathbf{v}\otimes\partial\mathbf{v}} + \frac{\partial^2 S_2^{(1)}}{\partial \mathbf{v}\otimes\partial\mathbf{v}}\right)\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial \mathbf{y}} = -\frac{\partial^2 S_2^{(1)}}{\partial \mathbf{v}\otimes\partial\mathbf{y}}, \\ &\left(\frac{\partial^2 S_2^{(2)}}{\partial \mathbf{v}\otimes\partial\mathbf{v}} + \frac{\partial^2 S_2^{(1)}}{\partial \mathbf{v}\otimes\partial\mathbf{v}}\right)\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial \mathbf{z}} = -\frac{\partial^2 S_2^{(2)}}{\partial \mathbf{z}\otimes\partial\mathbf{v}}, \end{aligned} \tag{4.4.34}$$

где подставляем $\mathbf{v} = \mathbf{v}_s(\mathbf{z}, \mathbf{y})$. Получим выражение для матрицы вторых производных фазовой функции (4.4.32):

$$\frac{\partial^2 S_2(\mathbf{z},\mathbf{y})}{\partial\mathbf{z}\otimes\partial\mathbf{y}}=\frac{\partial}{\partial\mathbf{z}}\left(\frac{\partial S_2^{(2)}}{\partial\mathbf{v}}\frac{\partial\mathbf{v}_s}{\partial\mathbf{y}}+\frac{\partial S_2^{(1)}}{\partial\mathbf{v}}\frac{\partial\mathbf{v}_s}{\partial\mathbf{y}}+\frac{\partial S_2^{(1)}}{\partial\mathbf{y}}\right)=$$

$$=\frac{\partial^2 S_2^{(2)}}{\partial\mathbf{z}\otimes\partial\mathbf{v}}\frac{\partial\mathbf{v}_s}{\partial\mathbf{y}}+\frac{\partial^2 S_2^{(2)}}{\partial\mathbf{v}\otimes\partial\mathbf{v}}\frac{\partial\mathbf{v}_s}{\partial\mathbf{z}}\frac{\partial\mathbf{v}_s}{\partial\mathbf{y}}+\frac{\partial S_2^{(2)}}{\partial\mathbf{v}}\frac{\partial^2\mathbf{v}_s}{\partial\mathbf{z}\otimes\partial\mathbf{y}}+ \tag{4.4.35}$$

$$+\frac{\partial^2 S_2^{(1)}}{\partial\mathbf{v}\otimes\partial\mathbf{v}}\frac{\partial\mathbf{v}_s}{\partial\mathbf{z}}\frac{\partial\mathbf{v}_s}{\partial\mathbf{y}}+\frac{\partial S_2^{(1)}}{\partial\mathbf{v}}\frac{\partial^2\mathbf{v}_s}{\partial\mathbf{z}\otimes\partial\mathbf{y}}+\frac{\partial S_2^{(1)}}{\partial\mathbf{y}\otimes\partial\mathbf{v}}\frac{\partial\mathbf{v}_s}{\partial\mathbf{z}}.$$

В силу соотношений (4.4.31) и (4.4.34) это выражение равно

$$\frac{\partial^2 S_2^{(2)}}{\partial\mathbf{z}\otimes\partial\mathbf{v}}\frac{\partial\mathbf{v}_s}{\partial\mathbf{y}}+\left(\frac{\partial^2 S_2^{(2)}}{\partial\mathbf{v}\otimes\partial\mathbf{v}}+\frac{\partial^2 S_2^{(1)}}{\partial\mathbf{v}\otimes\partial\mathbf{v}}\right)\frac{\partial\mathbf{v}_s}{\partial\mathbf{z}}\frac{\partial\mathbf{v}_s}{\partial\mathbf{y}}+\frac{\partial S_2^{(1)}}{\partial\mathbf{y}\otimes\partial\mathbf{v}}\frac{\partial\mathbf{v}_s}{\partial\mathbf{z}}= \tag{4.4.36}$$

$$=\frac{\partial^2 S_2^{(2)}}{\partial\mathbf{z}\otimes\partial\mathbf{v}}\frac{\partial\mathbf{v}_s}{\partial\mathbf{y}}=\frac{\partial S_2^{(1)}}{\partial\mathbf{y}\otimes\partial\mathbf{v}}\frac{\partial\mathbf{v}_s}{\partial\mathbf{z}}.$$

Приближенно вычисляя интеграл (4.4.30) методом стационарной фазы, получаем амплитудную функцию композиции операторов, выраженную через их амплитудные и фазовые функции:

$$a_2(\mathbf{z},\mathbf{y})=\sqrt{\frac{a_2^{(2)}(\mathbf{z},\mathbf{v}_s)\,a_2^{(1)}(\mathbf{v}_s,\mathbf{y})}{-\det\left\|\dfrac{\partial^2 S_2^{(2)}}{\partial\mathbf{v}\otimes\partial\mathbf{v}}+\dfrac{\partial^2 S_2^{(1)}}{\partial\mathbf{v}\otimes\partial\mathbf{v}}\right\|}}\,. \tag{4.4.37}$$

С подстановкой выражений для амплитудных функций получаем

$$a_2(\mathbf{z},\mathbf{y})=\sqrt{\mu_2^{(2)}(\mathbf{z},\mathbf{v}_s)\mu_2^{(1)}(\mathbf{v}_s,\mathbf{y})\frac{\det\left\|\dfrac{\partial^2 S_2^{(2)}}{\partial\mathbf{z}\otimes\partial\mathbf{v}}\right\|\det\left\|\dfrac{\partial S_2^{(1)}}{\partial\mathbf{v}\otimes\partial\mathbf{y}}\right\|}{-\det\left\|\dfrac{\partial^2 S_2^{(2)}}{\partial\mathbf{v}\otimes\partial\mathbf{v}}+\dfrac{\partial^2 S_2^{(1)}}{\partial\mathbf{v}\otimes\partial\mathbf{v}}\right\|}}\,. \tag{4.4.38}$$

С учетом соотношений (4.4.33), (4.4.34) и (4.4.36) мы видим, что это выражение равно

$$a_2(\mathbf{z},\mathbf{y})=\sqrt{\mu_2(\mathbf{z},\mathbf{y})\det\left\|\frac{\partial^2 S_2}{\partial\mathbf{z}\otimes\partial\mathbf{y}}\right\|}. \tag{4.4.39}$$

Аналогично записываются формулы для композиции любого количества операторов. Композиция операторов обладает свойством ассоциативности:

$$\hat{\mathbf{\Phi}}_2^{(3)}\circ\left(\hat{\mathbf{\Phi}}_2^{(2)}\circ\hat{\mathbf{\Phi}}_2^{(1)}\right)=\left(\hat{\mathbf{\Phi}}_2^{(3)}\circ\hat{\mathbf{\Phi}}_2^{(2)}\right)\circ\hat{\mathbf{\Phi}}_2^{(1)}. \tag{4.4.40}$$

Это свойство является точным для любых операторов, поскольку оно следует из определения композиции. Выражение для фазовой функции композиции любого количества операторов строится аналогично (4.4.32): оно представляет собой сумму всех фазовых функций с подстановкой стационарных значений всех промежуточных переменных. Как следует из закона композиции фазовых функций, композиция интегральных операторов Фурье, вообще говоря, некоммутативна.

### Литература


1. *Мищенко А.С., Стернин Б.Ю., Шаталов В.Е.* Лагранжевы многообразия и метод канонических оператора. М.: Наука, 1978. 354 с.
2. *Born M., Wolf E.* Principles of optics. New York: Pergamon Press, 1980. 808 p.
3. *Егоров Ю.В.* Лекции по уравнениям с частными производными. Дополнительные главы. М.: Изд-во МГУ, 1985. 168 с.
4. *Тейлор М.* Псевдодифференциальные операторы. М.: Мир, 1985. 472 с.
5. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4 т. Т. 3. М.: Мир, 1987. 696 с.
6. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4 т. Т. 4. М.: Мир, 1988. 448 с.
7. *Трев Ф.* Введение в теорию псевдодифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье: В 2 т. Т. 1. М.: Мир, 1984. 360 с.
8. *Трев Ф.* Введение в теорию псевдодифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье: В 2 т. Т. 2. М.: Мир, 1984. 400 с.
9. *Фок В.А.* Начала квантовой механики. М.: Наука, 1976. 376 с.
10. *Егоров Ю.В.* О канонических преобразованиях псевдодифференциальных операторов // УМН. 1969. Т. 24, вып. 5. С. 149–150.
11. *Маслов В.П.* Квантование термодинамики и ультравторичное квантование. М.: Ин-т компьютерных исследований, 2001. 384 с.


## 4.5. Канонические преобразования в геометрической оптике

Канонические преобразования будут играть в дальнейшем изложении ключевую роль. Мы начнем с изложения основ теории канонических преобразований в классической механике [1, 2], или, применительно к материалу монографии, в геометрической оптике.

Рассмотрим динамику системы с гамильтонианом $\mathcal{H}$ в фазовом пространстве с координатами $(\mathbf{x}, \mathbf{p})$, описываемую системой (4.1.22). Как мы видели в теории канонического оператора Маслова, выбор координат в фазовом пространстве важен при построении асимптотических решений волновых задач. Координаты должны выбираться так, чтобы лучевое многообразие имело однозначную проекцию. В теории канонического оператора Маслова новые координаты всегда выбираются из старых координат и импульсов. Удобно, однако, иметь более широкое множество возможных координат в фазовом пространстве. Рассмотрим некоторые новые координаты $(\mathbf{x}', \mathbf{p}')$ в фазовом пространстве. В общем случае гамильтонова система (4.1.22) в этих координатах не будет иметь канонического вида, поскольку форма этой системы неинвариантна по отношению к произвольным гладким заменам координат. Мы будем искать новые координаты таким образом, чтобы старые траектории в новых координатах оставались экстремалями преобразованного

действия (4.1.23). Поскольку действие зависит от гамильтониана $\mathcal{H}$, мы будем рассматривать преобразование не только координат и импульсов (**x**, **p**), то также и гамильтониана. Новое действие будет иметь вид

$$S' = \int_a^b \left(\mathbf{p}'\dot{\mathbf{x}}' - \mathcal{H}'\right) dt, \tag{4.5.1}$$

Важно учитывать, что вариации старого и нового действия рассматриваются с разными граничными условиями. Старое действие $S$ варьируется при условии $\delta\mathbf{x} = 0$, а новое действие $S'$ варьируется при условии $\delta\mathbf{x}' = 0$. Это граничное условие неинвариантно относительно общих замен координат. Чтобы удовлетворить условию сохранения экстремалей, мы предположим, что старое и новое действия различаются на полный дифференциал некоторой функции, т.е. связаны соотношением

$$\int_{t_a}^{t_b} \left(\mathbf{p}\dot{\mathbf{x}} - \mathcal{H}\right) dt = \int_{t_a}^{t_b} \left(\mathbf{p}'\dot{\mathbf{x}}' - \mathcal{H}'\right) dt - F\left(\mathbf{x}', \mathbf{p}', t\right)\Big|_{t_a}^{t_b}, \tag{4.5.2}$$

и найдем условия, которым должна удовлетворять функция $F(\mathbf{x}', \mathbf{p}', t)$. Эта функция не дает вклада в вариации действия, поскольку член $F\left(\mathbf{x}', \mathbf{p}', t\right)\Big|_{t_a}^{t_b}$ зависит только от граничных точек траектории. В дифференциальной форме это соотношение записывается следующим образом:

$$\mathbf{p}'d\mathbf{x}' - \mathbf{p}d\mathbf{x} - \left(\mathcal{H}' - \mathcal{H}\right) dt = dF\,. \tag{4.5.3}$$

Отсюда следует соотношение для граничных условий

$$\mathbf{p}'\delta\mathbf{x}'\Big|_{t_a}^{t_b} = \mathbf{p}\delta\mathbf{x}\Big|_{t_a}^{t_b} + \delta F\Big|_{t_a}^{t_b}\,. \tag{4.5.4}$$

В силу этого и формулы (4.1.24) для вариации действия любая экстремаль старого действия с граничным условием $\mathbf{p}\delta\mathbf{x}\Big|_{t_a}^{t_b} = 0$ будет экстремалью нового действия с граничным условием $\mathbf{p}'\delta\mathbf{x}'\Big|_{t_a}^{t_b} = 0$.

Преобразование координат (**x**, **p**) → (**x**′, **p**′) и гамильтониана $\mathcal{H}' = \mathcal{H}'\left(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathcal{H}\right)$, сохраняющее каноническую форму гамильтоновой системы, называется каноническим. Преобразование является каноническим, если существует такая функция $F$, что выполнено соотношение (4.5.3).

Каноническое преобразование сохраняет структурную форму фазового пространства. Чтобы это установить, применим к (4.5.3) операцию внешнего дифференцирования в любой фиксированный момент времени $t$:

$$d\mathbf{p}' \wedge d\mathbf{x}' - d\mathbf{p} \wedge d\mathbf{x} = ddF = 0. \tag{4.5.5}$$

Предположим, что старые и новые импульсы можно выразить как функции от новых и старых координат (**x**′, **x**). Тогда $F(\mathbf{x}', \mathbf{p}'(\mathbf{x}', \mathbf{x}), t) = S_2(\mathbf{x}', \mathbf{x}, t)$, а импульсы и гамильтониан определяются соотношениями

$$\mathbf{p} = -\frac{\partial S_2}{\partial \mathbf{x}}, \quad \mathbf{p}' = \frac{\partial S_2}{\partial \mathbf{x}'}, \quad \mathcal{H}' - \mathcal{H} = -\frac{\partial S_2}{\partial t}. \tag{4.5.6}$$

Функция $S_2$ называется производящей функцией канонического преобразования. Если она не зависит явно от времени $S_2 = S_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$, то новый гамильтониан равен старому с подстановкой старых координат и импульсов как функций новых. Сразу обратим внимание на аналогию с выражением для фазовой функции интегрального оператора Фурье (4.4.17), объясняющую выбор обозначения. Такую производящую функцию мы будем называть производящей функцией второго типа.

Поскольку $\mathbf{p}d\mathbf{x} = d(\mathbf{px}) - \mathbf{x}d\mathbf{p}$, соотношение (4.5.3) можно переписать следующим образом:

$$\mathbf{p}'d\mathbf{x}' + \mathbf{x}d\mathbf{p} - \left(\mathcal{H}' - \mathcal{H}\right)dt = d\left(F + \mathbf{px}\right). \tag{4.5.7}$$

Это приводит к производящей функции первого типа $S_1(\mathbf{x}', \mathbf{p}, t) = F + \mathbf{px}$ и соотношениям

$$\mathbf{x} = \frac{\partial S_1}{\partial \mathbf{p}}, \quad \mathbf{p}' = \frac{\partial S_1}{\partial \mathbf{x}'}, \quad \mathcal{H}' - \mathcal{H} = -\frac{\partial S_1}{\partial t}. \tag{4.5.8}$$

Аналогично вводятся производящие функции $S_3(\mathbf{p}', \mathbf{p})$ и $S_4(\mathbf{p}', \mathbf{x})$. Кроме того, в многомерном пространстве существуют производящие функции смешанного типа.

Простейшим и тривиальным примером канонического преобразования является тождественное преобразование $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$, $\mathbf{p}' = \mathbf{p}$. Для этого преобразования не существует производящей функции второго типа $S_2(\mathbf{x}', \mathbf{x})$, а его производящая функция первого типа равна $S_1(\mathbf{x}', \mathbf{p}) = \mathbf{px}'$.

Другим примером канонического преобразования является переход к импульсному представлению $\mathbf{x}' = \mathbf{p}$, $\mathbf{p}' = -\mathbf{x}$. Для этого преобразования не существует производящей функции первого типа, а его производящая функция второго типа равна $S_2(\mathbf{x}', \mathbf{x}) = -\mathbf{xx}'$.

Канонические преобразования сохраняют фазовый объем. Это следует из сохранения структурной формы $\omega = d\mathbf{p} \wedge d\mathbf{x}$, поскольку форму объема можно представить в виде

$$d^n\mathbf{x} \wedge d^n\mathbf{p} = \frac{(-1)^{n(n+1)/2}}{n!} \underbrace{\omega \wedge \ldots \wedge \omega}_{n}. \tag{4.5.9}$$

Обратное, вообще говоря, неверно: преобразование, сохраняющее фазовый объем, не обязано быть каноническим. В качестве примера приведем следующее преобразование:

$$\begin{aligned} x^{1'} &= 2x^1, \quad x^{2'} = x^2/2, \\ p_1' &= p_1, \qquad p_2' = p_2. \end{aligned} \tag{4.5.10}$$

Важнейшее свойство гамильтоновой динамики состоит в том, что сдвиг вдоль траекторий системы на фиксированный интервал времени является каноническим преобразованием. Чтобы убедиться в этом, достаточно показать, что гамильтонова динамика сохраняет структурную форму $\omega$, т.е. ее произ-

водная Ли вдоль векторного поля $\mathbf{V}(\mathcal{H})$ равна нулю. Воспользовавшись формулой (4.3.30) или (4.3.31), приходим к искомому результату:

$$\mathcal{L}_{\mathbf{V}(\mathcal{H})}\omega = d\dot{\mathbf{p}} \wedge d\mathbf{x} + d\mathbf{p} \wedge d\dot{\mathbf{x}} = -d\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{x}} \wedge d\mathbf{x} + d\mathbf{p} \wedge d\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}} =$$

$$= -\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \wedge dx^j - \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p_i \partial x^j} dp_i \wedge dx^j + \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial x^j \partial p_i} dp_i \wedge dx^j + \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p_i \partial p_j} dp_i \wedge dp_j = 0. \tag{4.5.11}$$

В последнем выражении первый и четвертый члены равны 0 в силу симметрии вторых производных и антисимметрии внешнего произведения. Второй и третий члены взаимно сокращаются в силу перестановочности частных производных.

Композиция двух канонических преобразований также является каноническим преобразованием. Преобразование, обратное каноническому, также каноническое. Тождественное преобразование является каноническим. Таким образом, канонические преобразования образуют группу. Установим закон композиции для производящих функций канонических преобразований. Рассмотрим композицию двух канонических преобразований $(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \to (\mathbf{x}', \mathbf{p}') \to (\mathbf{x}'', \mathbf{p}'')$. Производящая функция 2-го типа такой композиции должна определяться уравнением

$$\begin{aligned} dS_2(\mathbf{x}'', \mathbf{x}) &= \mathbf{p}''d\mathbf{x}'' - \mathbf{p}d\mathbf{x} = \mathbf{p}''d\mathbf{x}'' - \mathbf{p}'d\mathbf{x}' + \mathbf{p}'d\mathbf{x}' - \mathbf{p}d\mathbf{x} = \\ &= d\left(S_2^{(2)}(\mathbf{x}'', \mathbf{x}') + S_2^{(1)}(\mathbf{x}', \mathbf{x})\right), \end{aligned} \tag{4.5.12}$$

где промежуточная координата $\mathbf{x}'$ определяется из условия равенства промежуточного импульса $\mathbf{p}'$ для обоих преобразований:

$$\mathbf{p}' = -\frac{\partial S_2^{(2)}(\mathbf{x}'', \mathbf{x}')}{\partial \mathbf{x}'} = \frac{\partial S_2^{(1)}(\mathbf{x}', \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}'}. \tag{4.5.13}$$

Отсюда следует уравнение, определяющее промежуточную координату $\mathbf{x}'$ как функцию от $(\mathbf{x}'', \mathbf{x})$:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'}\left(S_2^{(2)}(\mathbf{x}'', \mathbf{x}') + S_2^{(1)}(\mathbf{x}', \mathbf{x})\right) = 0. \tag{4.5.14}$$

Таким образом, производящая функция композиции канонических преобразований равняется сумме производящих функций, где промежуточная координата определяется из уравнения стационарной точки. Композиция канонических преобразований, вообще говоря, некоммутативна.

## Литература


1. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1978. 472 с.
2. *Kleinert H.* Path integrals in quantum mechanics, statistics, polymer physics, and financial markets. Singapore: World Scientific, 2004. 1468 p.

## 4.6. Канонические преобразования в волновой оптике

**Производящие и фазовые функции**

Теперь рассмотрим связь между каноническими преобразованиями и интегральными операторами Фурье 1-го и 2-го типа. Мы будем пользоваться теми же обозначениями координат и импульсов, что и в разделе 4.4. Пусть динамика описывается гамильтоновой функцией $H(x, \mathbf{y}, \boldsymbol{\eta})$ и форма действия имеет вид

$$d\Psi = \boldsymbol{\eta}\, d\mathbf{y} - H\, dx. \tag{4.6.1}$$

В том же фазовом пространстве можно ввести другую координату $\mathbf{z} = \mathbf{z}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\eta})$ и импульс $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\eta})$ и определить новую функцию Гамильтона $H'(x, \mathbf{z}, \boldsymbol{\xi})$ и новую форму действия:

$$d\Psi' = \xi d\mathbf{z} - H'\, dx. \tag{4.6.2}$$

Для того чтобы гамильтонова динамика в новых координатах была эквивалентна динамике в старых координатах, необходимо, как мы видели в разделе 4.5, чтобы новая форма действия отличалась от старой на полный дифференциал [1]:

$$d\Psi - d\Psi' = dF. \tag{4.6.3}$$

В этом случае преобразование $(\mathbf{y}, \boldsymbol{\eta}) \to (\mathbf{z}, \boldsymbol{\xi})$ называется каноническим. В частности, можно записать две эквивалентные формы этого условия:

$$\begin{aligned} dS_1 &= \boldsymbol{\xi}\, d\mathbf{z} + \mathbf{y}\, d\boldsymbol{\eta} - (H' - H)\, dx, \\ dS_2 &= \boldsymbol{\xi}\, dz - \boldsymbol{\eta}\, d\mathbf{y} - (H' - H)\, dx, \end{aligned} \tag{4.6.4}$$

где мы учли, что $S_1 = S_2 + \mathbf{y}\boldsymbol{\eta}$. Эти условия совпадают с уравнениями для фазовых функций интегральных операторов Фурье (4.4.19). Мы видели также, что фазовая функция композиции двух интегральных операторов Фурье (4.4.32) равна производящей функции композиции канонических преобразований (4.5.12), причем в обоих случаях промежуточная переменная определяется из уравнения стационарной точки (4.4.31) и (4.5.14).

Причина этих совпадений состоит в том, что фазовые функции были получены в рамках геометрической оптики, а мы знаем, что динамика лучей описывается гамильтоновой системой и, следовательно, задает каноническое преобразование. Однако существенное отличие от предыдущего рассмотрения волновой задачи здесь состоит в том, что новые координаты и импульсы $(\mathbf{z}, \boldsymbol{\xi})$ не обязательно описывают распространение лучей и волн в пространстве. Они могут также описывать другое представление той же конфигурации лучей и того же волнового поля. Применительно к геометрической оптике идея такого представления уже разбиралась: новые координаты и импульсы в том же фазовом пространстве связаны со старым каноническим преобразованием. Можно также поставить вопрос о возможности аналогичной переформулировки волновой задачи с новым гамильтонианом. Этот вопрос был рассмотрен в [2–4], где было показано, что преобразование волновой функции в представление новых координат осуществляется при помощи интегральных операторов Фурье, фазовые функции которых равны производящим функциям соответствующих канонических преобразований. В литературе этот резуль-

тат приводится для одномерного случая, хотя он легко обобщается на произвольную размерность. В этом разделе мы проведем подробное рассмотрение связи канонических преобразований и интегральных операторов Фурье.

**Коммутация интегральных операторов Фурье и псевдодифференциальных операторов**

Начнем с вывода формул коммутации интегральных операторов Фурье (1-го и 2-го типа) и оператора Гамильтона, который будет пониматься как псевдодифференциальный оператор, определяемый на основе формулы коммутации оператора Гамильтона и преобразования Фурье (4.3.64) следующим образом [4–9]:

$$H\left(x,\mathbf{y},\hat{\boldsymbol{\eta}}\right)u=\left(\frac{ik}{2\pi}\right)^{(n-1)/2}\int H\left(x,\mathbf{y},\boldsymbol{\eta}\right)\exp\left(ik\mathbf{y}\boldsymbol{\eta}\right)\tilde{u}(\boldsymbol{\eta})\,d\boldsymbol{\eta}, \qquad (4.6.5)$$

где алгебраическая функция $H(x, \mathbf{y}, \boldsymbol{\eta})$ называется символом оператора. Для больших частот $\boldsymbol{\eta}$ должна быть справедлива оценка $H\left(x,\mathbf{y},\boldsymbol{\eta}\right)<C\left|\boldsymbol{\eta}\right|^{m}$, где $C$ – некоторая константа, а $m$ – порядок оператора.

Для псевдодифференциального оператора $P\left(\mathbf{y},\hat{\boldsymbol{\eta}}\right)$ будем искать его представление $Q\left(\mathbf{z},\hat{\boldsymbol{\xi}}\right)$ в новых канонических координатах, где $\hat{\boldsymbol{\xi}}=\frac{1}{ik}\frac{\partial}{\partial\mathbf{z}}$. Поскольку преобразование волновой функции в новое представление выполняется операторами $\hat{\boldsymbol{\Phi}}_{1,2}$, для операторов $P\left(\mathbf{y},\hat{\boldsymbol{\eta}}\right)$ и $Q\left(\mathbf{z},\hat{\boldsymbol{\xi}}\right)$ должна иметь место формула коммутации

$$\hat{\boldsymbol{\Phi}}_{1,2}P\left(\mathbf{y},\hat{\boldsymbol{\eta}}\right)=Q\left(\mathbf{z},\hat{\boldsymbol{\xi}}\right)\hat{\boldsymbol{\Phi}}_{1,2}. \qquad (4.6.6)$$

Поскольку $x$ входит в выражение для интегральных операторов как параметр, мы будем опускать зависимость от этой координаты.

Начнем с вывода вспомогательной асимптотической формулы [4], которой будем пользоваться в дальнейшем:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{k}{2\pi}\right)^{n-1}\iint f\left(\mathbf{y},\boldsymbol{\eta}\right)\exp\left(ik\mathbf{y}\boldsymbol{\eta}\right)d\mathbf{y}\,d\boldsymbol{\eta}=\\
&=\left(\frac{k}{2\pi}\right)^{n-1}\iint\left[f(0,0)+\sum_{\mathbf{r},\mathbf{s}}\frac{\partial_{\mathbf{y}}^{\mathbf{r}}\partial_{\boldsymbol{\eta}}^{\mathbf{s}}f(0,0)}{\mathbf{r}!\mathbf{s}!}\mathbf{y}^{\mathbf{r}}\boldsymbol{\eta}^{\mathbf{s}}\right]\exp\left(ik\mathbf{y}\boldsymbol{\eta}\right)d\mathbf{y}\,d\boldsymbol{\eta}=\\
&=f(0,0)+\sum_{\mathbf{r},\mathbf{s}}\frac{\partial_{\mathbf{y}}^{\mathbf{r}}\partial_{\boldsymbol{\eta}}^{\mathbf{s}}f(0,0)}{\mathbf{r}!\mathbf{s}!}\hat{\boldsymbol{\eta}}^{\mathbf{s}}\mathbf{y}^{\mathbf{r}}\Bigg|_{y=0}=\\
&=f(0,0)+\sum_{\mathbf{r}}\frac{\partial_{\mathbf{y}}^{\mathbf{r}}\partial_{\boldsymbol{\eta}}^{\mathbf{r}}f(0,0)}{(ik)^{|\mathbf{r}|}\,\mathbf{r}!}\simeq f(0,0).
\end{aligned} \qquad (4.6.7)$$

Здесь $\mathbf{r}=(r_1,...,r_{n-1})$ и $\mathbf{s}=(s_1,...,s_{n-1})$ – целочисленные мультииндексы. По определению, $\mathbf{r}!=\prod r_i!$, $\mathbf{y}^{\mathbf{r}}=\prod y_i^{r_i}$ и $|\mathbf{r}|=\sum r_i$. Эту формулу можно переписать в виде

$$\left(\frac{k}{2\pi}\right)^{n-1}\iint f(\mathbf{y},\boldsymbol{\eta})\exp\left[ik(\mathbf{y}-\mathbf{y}')(\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\eta}')\right]d\mathbf{y}\,d\boldsymbol{\eta}=f(\mathbf{y}',\boldsymbol{\eta}'). \quad (4.6.8)$$

Вычислим выражение $\hat{\Phi}_1 P(\mathbf{y},\hat{\boldsymbol{\eta}})u$, пользуясь определением псевдодифференциального оператора (4.6.5) и интегрального оператора Фурье (4.4.13):

$$\hat{\Phi}_1 P(\mathbf{y},\hat{\boldsymbol{\eta}})u=\left(\frac{k}{2\pi}\right)^{2(n-1)}\int d\boldsymbol{\eta}\,a_1(\mathbf{z},\boldsymbol{\eta})\exp\left(ikS_1(\mathbf{z},\boldsymbol{\eta})\right)\times \quad (4.6.9)$$

$$\times\int dy\,\exp(-ik\mathbf{y}\boldsymbol{\eta})\int d\boldsymbol{\eta}'\exp(ik\mathbf{y}\boldsymbol{\eta}')P(\mathbf{y},\boldsymbol{\eta}')\int d\mathbf{y}'\exp(-ik\mathbf{y}'\boldsymbol{\eta}')u(\mathbf{y}').$$

Формально меняя порядок интегрирования, получаем

$$=\left(\frac{k}{2\pi}\right)^{2(n-1)}\iint\iint d\boldsymbol{\eta}\,d\mathbf{y}\,d\boldsymbol{\eta}'\,d\mathbf{y}'\,a_1(\mathbf{z},\boldsymbol{\eta})\exp\left(ikS_1(\mathbf{z},\boldsymbol{\eta})\right)\times \quad (4.6.10)$$

$$\times\exp\left[ik\mathbf{y}(\boldsymbol{\eta}'-\boldsymbol{\eta})\right]P(\mathbf{y},\boldsymbol{\eta}')u(\mathbf{y}')\exp(-ik\mathbf{y}'\boldsymbol{\eta}').$$

Взяв линейное приближение для $S_1(\mathbf{z},\boldsymbol{\eta})$ по $\boldsymbol{\eta}$ в окрестности $\boldsymbol{\eta}'$, получаем

$$=\left(\frac{k}{2\pi}\right)^{2(n-1)}\iint\iint d\boldsymbol{\eta}\,d\mathbf{y}\,d\boldsymbol{\eta}'\,d\mathbf{y}'\,a_1(\mathbf{z},\boldsymbol{\eta})\exp\left(ikS_1(\mathbf{z},\boldsymbol{\eta}')\right)\times \quad (4.6.11)$$

$$\times\exp\left\{ik\left(\mathbf{y}-\frac{\partial S_1}{\partial\boldsymbol{\eta}}\right)(\boldsymbol{\eta}'-\boldsymbol{\eta})\right\}P(\mathbf{y},\boldsymbol{\eta}')u(\mathbf{y}')\exp(-ik\mathbf{y}'\boldsymbol{\eta}').$$

Пользуясь формулой (4.6.8), можно избавиться от интегрирования по **y** и **η**:

$$=\left(\frac{k}{2\pi}\right)^{n-1}\iint d\boldsymbol{\eta}'\,d\mathbf{y}'\,a_1(\mathbf{z},\boldsymbol{\eta}')\exp\left(ikS_1(\mathbf{z},\boldsymbol{\eta}')\right)\times$$

$$\times P\left(\frac{\partial S_1}{\partial\boldsymbol{\eta}'},\boldsymbol{\eta}'\right)u(\mathbf{y}')\exp(-ik\mathbf{y}'\boldsymbol{\eta}')= \quad (4.6.12)$$

$$=\left(\frac{ik}{2\pi}\right)^{(n-1)/2}\int a_1(\mathbf{z},\boldsymbol{\eta}')P\left(\frac{\partial S_1}{\partial\boldsymbol{\eta}},\boldsymbol{\eta}'\right)\exp\left(ikS_1(\mathbf{z},\boldsymbol{\eta}')\right)\tilde{u}(\boldsymbol{\eta}')\,d\boldsymbol{\eta}'.$$

Таким образом, оператор $\hat{\Phi}_1 P(\mathbf{y},\hat{\boldsymbol{\eta}})$ является интегральным оператором Фурье 1-го типа с символом (амплитудной функцией) $a_1(\mathbf{z},\boldsymbol{\eta})P\left(\frac{\partial S_1}{\partial\boldsymbol{\eta}},\boldsymbol{\eta}\right)$ и фазовой функцией $S_1(\mathbf{z},\boldsymbol{\eta})$.

Аналогично вычислим $Q\left(\mathbf{z},\hat{\boldsymbol{\xi}}\right)\hat{\Phi}_1 u$. Вычисление будет значительно проще, поскольку оператор $Q\left(\mathbf{z},\hat{\boldsymbol{\xi}}\right)$ действует по переменной **z**, и значит, достаточно вычислить его действие на $\exp(ikS_1(\mathbf{z},\boldsymbol{\eta}))$, пользуясь формулой коммутации гамильтониана с осциллирующей экспонентой (4.1.6) в главном порядке:

$$Q\left(\mathbf{z},\hat{\boldsymbol{\xi}}\right)\hat{\Phi}_1 u=\left(\frac{ik}{2\pi}\right)^{(n-1)/2}\int a_1(\mathbf{z},\boldsymbol{\eta})Q\left(\mathbf{z},\frac{\partial S_1}{\partial \mathbf{z}}\right)\exp(ikS_1(\mathbf{z},\boldsymbol{\eta}))\tilde{u}(\boldsymbol{\eta})\,d\boldsymbol{\eta}. \quad (4.6.13)$$

Это вычисление показывает, что оператор $Q\left(\mathbf{z},\hat{\boldsymbol{\xi}}\right)\hat{\Phi}_1$ также является оператором 1-го типа с символом $a_1(\mathbf{z},\boldsymbol{\eta})Q\left(\mathbf{z},\frac{\partial S_1}{\partial \mathbf{z}}\right)$ и фазовой функцией $S_1(\mathbf{z},\boldsymbol{\eta})$.

Приравнивая символы операторов $\hat{\Phi}_1 P\left(\mathbf{y},\hat{\boldsymbol{\eta}}\right)$ и $Q\left(\mathbf{z},\hat{\boldsymbol{\xi}}\right)\hat{\Phi}_1$ (их фазовые функции равны), мы получаем следующее равенство:

$$Q\left(\mathbf{z},\frac{\partial S_1}{\partial \mathbf{z}}\right)=P\left(\frac{\partial S_1}{\partial \boldsymbol{\eta}},\boldsymbol{\eta}\right). \quad (4.6.14)$$

Пользуясь уравнениями (4.5.8), мы заключаем, что

$$Q(\mathbf{z},\boldsymbol{\xi})=P\left(\mathbf{y}(\mathbf{z},\boldsymbol{\xi}),\boldsymbol{\eta}(\mathbf{z},\boldsymbol{\xi})\right). \quad (4.6.15)$$

Т.е. символ оператора в новом представлении равен старому символу с подстановкой старых координат $(\mathbf{y},\boldsymbol{\eta})$ как функций новых координат $(\mathbf{z},\boldsymbol{\xi})$.

Проведем аналогичное рассмотрение для операторов 2-го типа. Вычисление $\hat{\Phi}_2 P\left(\mathbf{y},\hat{\boldsymbol{\eta}}\right)u$ проводится аналогично:

$$\begin{aligned}\hat{\Phi}_2 P\left(\mathbf{y},\hat{\boldsymbol{\eta}}\right)u&=\left(\frac{ik}{2\pi}\right)^{(n-1)/2}\int a_2(\mathbf{z},\mathbf{y})\exp\left(ikS_2(\mathbf{z},\mathbf{y})\right)\times\\ &\times\left(\frac{k}{2\pi}\right)^{n-1}\iint P(\mathbf{y},\boldsymbol{\eta})\exp\left(ik(\mathbf{y}-\mathbf{y}')\boldsymbol{\eta}\right)u(\mathbf{y}')\,d\mathbf{y}'\,d\boldsymbol{\eta}\,d\mathbf{y}=\\ &=\left(\frac{ik}{2\pi}\right)^{(n-1)/2}\int\left(\frac{k}{2\pi}\right)^{n-1}\iint P(\mathbf{y},\boldsymbol{\eta})\exp\left[ik(\mathbf{y}-\mathbf{y}')\left(\boldsymbol{\eta}+\frac{\partial S_2}{\partial \mathbf{y}}\right)\right]d\mathbf{y}\,d\boldsymbol{\eta}\times\\ &\times a_2(\mathbf{z},\mathbf{y})\exp\left(ikS_2(\mathbf{z},\mathbf{y})\right)u(\mathbf{y}')\,d\mathbf{y}'=\\ &=\left(\frac{ik}{2\pi}\right)^{(n-1)/2}\int P\left(\mathbf{y}',-\frac{\partial S_2}{\partial \mathbf{y}'}\right)a_2(\mathbf{z},\mathbf{y}')\exp\left(ikS_2(\mathbf{z},\mathbf{y}')\right)u(\mathbf{y}')\,d\mathbf{y}'.\end{aligned} \quad (4.6.16)$$

Выражение $Q\left(\mathbf{z},\hat{\boldsymbol{\xi}}\right)\hat{\Phi}_2 u$ также может быть легко записано:

$$Q\left(\mathbf{z},\hat{\boldsymbol{\xi}}\right)\hat{\Phi}_2 u=\left(\frac{ik}{2\pi}\right)^{(n-1)/2}\int Q\left(\mathbf{z},\frac{\partial S_2}{\partial \mathbf{z}}\right)a_2(\mathbf{z},\mathbf{y})\exp\left(ikS_2(\mathbf{z},\mathbf{y})\right)u(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}. \quad (4.6.17)$$

Этим доказано, что $\hat{\Phi}_2 P\left(\mathbf{y},\hat{\boldsymbol{\eta}}\right)$ и $Q\left(\mathbf{z},\hat{\boldsymbol{\xi}}\right)\hat{\Phi}_2$ являются операторами 2-го типа с одинаковыми фазовыми функциями и символами $P\left(\mathbf{y},-\frac{\partial S_2}{\partial \mathbf{y}}\right)a_2\left(\mathbf{z},\mathbf{y}\right)$ и $Q\left(\mathbf{z},\frac{\partial S_2}{\partial \mathbf{z}}\right)a_2\left(\mathbf{z},\mathbf{y}\right)$ соответственно. Снова приравнивая символы, получаем равенство

$$Q\left(\mathbf{z},\frac{\partial S_2}{\partial \mathbf{z}}\right)=P\left(\mathbf{y},-\frac{\partial S_2}{\partial \mathbf{y}}\right). \tag{4.6.18}$$

Пользуясь уравнениями (4.5.6), мы видим, что и в этом случае

$$Q\left(\mathbf{z},\boldsymbol{\xi}\right)=P\left(\mathbf{y}\left(\mathbf{z},\boldsymbol{\xi}\right),\boldsymbol{\eta}\left(\mathbf{z},\boldsymbol{\xi}\right)\right). \tag{4.6.19}$$

**Теорема Егорова**

Переопределим псевдодифференциальные операторы, переходя в представление новой координаты $\mathbf{z}$ и импульса $\boldsymbol{\xi}$. Это преобразование перемешивает координаты и сопряженные дифференциальные операторы [9]. Волновая функция в этом представлении равна $\hat{\Phi}_{1,2}u$. Пользуясь волновым уравнением, найдем новый гамильтониан:

$$\begin{aligned}
&H'\left(x,\mathbf{z},\hat{\boldsymbol{\xi}}\right)\hat{\Phi}_{1,2}u=-\frac{1}{ik}\frac{\partial}{\partial x}\hat{\Phi}_{1,2}u=\\
&=-\frac{\partial S_{1,2}}{\partial x}\hat{\Phi}_{1,2}u+\hat{\Phi}_{1,2}\left(-\frac{1}{ik}\frac{\partial}{\partial x}u\right)=\\
&=-\frac{\partial S_{1,2}}{\partial x}\hat{\Phi}_{1,2}u+\hat{\Phi}_{1,2}H\left(x,\mathbf{y},\hat{\boldsymbol{\eta}}\right)u=\\
&=-\frac{\partial S_{1,2}}{\partial x}\hat{\Phi}_{1,2}u+H\left(x,\mathbf{y}\left(\mathbf{z},\hat{\boldsymbol{\xi}}\right),\boldsymbol{\eta}\left(\mathbf{z},\hat{\boldsymbol{\xi}}\right)\right)\hat{\Phi}_{1,2}u.
\end{aligned} \tag{4.6.20}$$

Таким образом, гамильтониан в волновой оптике преобразуется так же, как и функция Гамильтона в геометрической оптике, по формулам (4.5.6) и (4.5.8):

$$H'=-\frac{\partial S_{1,2}}{\partial x}+H. \tag{4.6.21}$$

Эти результаты можно резюмировать следующим образом. Мы рассматриваем волновое поле $u(x, \mathbf{y})$ и асимптотическое приближение для решения волновой задачи на основе геометрической оптики. Лучи в геометрической оптике задаются как решения канонической гамильтоновой системы. Решение задает связь между начальной координатой и импульсом луча ($\mathbf{y}$, $\boldsymbol{\eta}$) и координатой и импульсом ($\mathbf{z}$, $\boldsymbol{\xi}$) при некоторой координате $x$. Преобразование ($\mathbf{y}$, $\boldsymbol{\eta}$) → ($\mathbf{z}$, $\boldsymbol{\xi}$) является каноническим. Здесь ($\mathbf{y}$, $\boldsymbol{\eta}$) относятся к $x = 0$, а ($\mathbf{z}$, $\boldsymbol{\xi}$) – к текущему значению $x$. В этом случае асимптотическое решение волновой

задачи выражается интегральным оператором Фурье, связанным с данным каноническим преобразованием. Связь оператора с каноническим преобразованием означает, что фазовая функция оператора является производящей функцией преобразования.

Можно также рассматривать альтернативную запись канонической гамильтоновой системы в других канонических координатах. В этом случае (**y**, **η**) являются старыми каноническими координатами фазового пространства при любом текущем значении $x$, а (**z**, **ξ**) – новыми каноническими координатами. Если преобразование (**y**, **η**) → (**z**, **ξ**) является каноническим, то как геометрооптическую, так и волновую задачу можно преобразовать в представление новых координат с новой функцией Гамильтона. Преобразование волновой функции снова записывается при помощи интегрального оператора Фурье, ассоциированного с данным каноническим преобразованием.

Сформулированные выше утверждения составляют содержание теоремы Егорова [4–9], являющейся центральным результатом теории интегральных операторов Фурье. Теорема Егорова была изначально сформулирована для операторов 1-го типа [3, 4, 6, 7]. Однако она в равной мере относится и к операторам 2-го типа [2, 8, 9], соответствующим другому типу производящих функций. Эти операторы окажутся очень удобными для приложений к обработке радиозатменных данных [10].

**Заключительные замечания и примеры**

Техника интегральных операторов Фурье является обобщением техники канонических операторов Маслова. Интегральные операторы Фурье предлагалось называть операторами Фурье–Маслова [11]. Канонические операторы Маслова используют специальное каноническое преобразование ($z$ = η, $\xi = -y$; поворот фазовой плоскости на $\pi / 2$). Интегральные операторы Фурье связаны с широким классом канонических преобразований. Это дает существенное преимущество, поскольку может дать возможность записать глобальное решение волновой задачи в ситуации, где канонические операторы Маслова потребуют сшивать локальные решения. Из возможности строить глобальное решение вытекает и другое преимущество. Оно состоит в том, что интегральные операторы Фурье позволяют решать обратную задачу восстановления лучевой структуры волнового поля.

Класс операторов 1-го типа включает тождественное преобразование с производящей функцией $S_1$ (**z**, **η**) = **zη**. Этот оператор является композицией прямого и обратного преобразования Фурье. Класс операторов 2-го типа включает преобразование Фурье, которое связано с поворотом фазовой плоскости на угол $\pi / 2$ и соответствует производящей функции $S_2$ (**z**, **y**) = –**zy**.

Другой простой пример оператора первого типа – решение двумерного уравнения Гельмгольца в вакууме. Воспользуемся полученным ранее решением (3.4.4) с использованием аппарата пространственных спектров [12]:

$$\tilde{u}(x,\eta) = \exp\left(ikx\sqrt{1-\eta^2}\right)\tilde{u}_0(\eta). \qquad (4.6.22)$$

Это решение можно переписать в форме интегрального оператора Фурье:

$$u(x,z)=\sqrt{\frac{ik}{2\pi}}\int \exp\left(ik\left[x\sqrt{1-\eta^2}+z\eta\right]\right)\tilde{u}_0(\eta)d\eta, \qquad (4.6.23)$$

который связан с каноническим преобразованием

$$z=y+\frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}x, \qquad \xi=\eta,$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial z}=\xi=\eta, \qquad \frac{\partial S_1}{\partial \eta}=y=z-\frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}x, \qquad (4.6.24)$$

$$S_1(z,\eta)=z\eta+x\sqrt{1-\eta^2},$$

описывающим эволюцию прямых лучей с направляющими векторами $\left(\sqrt{1-\eta^2},\eta\right)$ в вакууме.

Повороты фазовой плоскости на углы $\alpha, 0<\alpha<\pi/2$ могут быть записаны в виде канонического преобразования с производящей функцией как 1-го, так и 2-го типа. Поэтому и соответствующий интегральный оператор может быть выбран как 1-го, так и 2-го типа. Такие операторы позволяют получить точное решение задачи о квантовом гармоническом осцилляторе. Их мы разберем в следующем разделе.

## Литература


1. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1978. 472 с.
2. *Фок В.А*. Начала квантовой механики. М.: Наука, 1976. 376 с.
3. *Егоров Ю.В.* О канонических преобразованиях псевдодифференциальных операторов // УМН. 1969. Т. 24, вып. 5. С. 149–150.
4. *Егоров Ю.В.* Лекции по уравнениям с частными производными. Дополнительные главы. М.: Изд-во МГУ, 1985. 168 с.
5. *Тейлор М*. Псевдодифференциальные операторы. М.: Мир, 1985. 472 с.
6. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4 т. Т. 3. М.: Мир, 1987. 696 с.
7. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4 т. Т. 4. М.: Мир, 1988. 448 с.
8. *Трев Ф.* Введение в теорию псевдодифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье: В 2 т. Т. 1. М.: Мир, 1984. 360 с.
9. *Трев Ф.* Введение в теорию псевдодифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье: В 2 т. Т. 2. М.: Мир, 1984. 400 с.
10. *Gorbunov M.E.* Radioholographic methods for processing radio occultation data in multipath regions / Danish Meteorological Institute. Scientific Report 01-02, http://web.dmi.dk/dmi/Sr01-02.pdf. Copenhagen, 2001. 38 p.
11. *Мищенко А.С., Стернин Б.Ю., Шаталов В.Е.* Лагранжевы многообразия и метод канонических оператора. М.: Наука, 1978. 354 с.
12. Зверев В.А. Радиооптика. М.: Сов. радио, 1975. 304 с.

## 4.7. Пример: гармонический осциллятор

**Динамика гармонического осциллятора**

Гармонический осциллятор представляет собой интересный пример использования техники интегральных операторов Фурье. Наряду с вакуумом гармонический осциллятор допускает точное аналитическое решение. Мы будем рассматривать одномерный гармонический осциллятор в безразмерных координатах, выбранных так, чтобы волновой вектор $k$, применительно к волновой оптике, или постоянная Планка $\hbar$, применительно к квантовой механике, были равны 1. Гамильтониан в этом случае имеет вид

$$H\left(x,\xi\right)=\frac{1}{2}\left(x^2+\xi^2\right), \tag{4.7.1}$$

где $x$ – координата, а $\xi$ – сопряженный с ней импульс. Классические уравнения динамики имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\dot{x}&=\frac{\partial H}{\partial \xi}=\xi,\\ \dot{\xi}&=-\frac{\partial H}{\partial x}=-x.\end{aligned} \tag{4.7.2}$$

Траектория каждой точки $\left(x,\xi\right)\to\left(y,\eta\right)$ в фазовом пространстве является кругом:

$$\begin{aligned}y&=x\cos\alpha+\xi\sin\alpha,\\ \eta&=-x\sin\alpha+\xi\cos\alpha,\end{aligned} \tag{4.7.3}$$

где угол поворота α равен времени. Обратное преобразование имеет вид

$$\begin{aligned}x&=y\cos\alpha-\eta\sin\alpha\\ \xi&=y\sin\alpha+\eta\cos\alpha\end{aligned} \tag{4.7.4}$$

Уравнение динамики (4.7.3) задает каноническое преобразование с производящей функцией второго типа $S_2\left(y,x,\alpha\right)$, определяемой следующим уравнением:

$$dS_2=\eta\,dy-\xi\,dx. \tag{4.7.5}$$

Выразим импульсы через координаты $(y, x)$:

$$\begin{aligned}\xi\left(y,x\right)&=\frac{y-x\cos\alpha}{\sin\alpha},\\ \eta\left(y,x\right)&=\frac{y\cos\alpha-x}{\sin\alpha}\end{aligned} \tag{4.7.6}$$

Интегрируя, получаем выражения для производящей функции:

$$\begin{aligned}S_2\left(y,x,\alpha\right)&=\int\eta\left(y,x\right)dy+f\left(x\right)=\frac{y^2\cos\alpha-2xy}{2\sin\alpha}+F(x),\\ S_2\left(y,x,\alpha\right)&=-\int\xi\left(y,x\right)dx+g\left(y\right)=\frac{x^2\cos\alpha-2xy}{2\sin\alpha}+G\left(y\right),\end{aligned} \tag{4.7.7}$$

где $F(x)$ и $G(y)$ – произвольные функции. Объединяя эти выражения, получаем формулу для производящей функции:

$$S_2(y,x,\alpha)=\frac{y^2\cos\alpha-2xy+x^2\cos\alpha}{2\sin\alpha}. \qquad (4.7.8)$$

**Интегральный оператор Фурье 2-го типа и его свойства**

Интегральный оператор Фурье 2-го типа, описывающий динамику волновой функции, можно записать в следующем виде [2]:

$$\begin{aligned}\psi_\alpha(y)&=\sqrt{\frac{-i}{2\pi}}\int\sqrt{\frac{\partial^2 S_2(y,x,\alpha)}{\partial y\,\partial x}}\exp\left(iS_2(y,x,\alpha)\right)\psi_0(x)\,dx=\\&=\int\frac{1}{\sqrt{2\pi i\sin\alpha}}\exp\left(i\frac{y^2\cos\alpha-2xy+x^2\cos\alpha}{2\sin\alpha}\right)\psi_0(x)\,dx\equiv\\&\equiv\int K_\alpha(y,x)\,\psi_0(x)\,dx\equiv\hat{\Phi}_\alpha\psi_0\end{aligned} \qquad (4.7.9)$$

Этот оператор обладает свойством сохранения энергии [2]:

$$\int\left|\psi_\alpha(y)\right|^2dy=\int\left|\psi_0(x)\right|^2dx. \qquad (4.7.10)$$

Если положить $\alpha=\pi/2$, то оператор переходит в преобразование Фурье:

$$\psi_{\pi/2}(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi i}}\int\exp(-ixy)\,\psi_0(x)\,dx. \qquad (4.7.11)$$

При $\alpha\to 0$ можно приближенно записать

$$\begin{aligned}&K_\alpha(y,x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi i\alpha}}\exp\left\{i\frac{(y-x)^2}{2\alpha}\right\},\\&\int K_\alpha(y,x)\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi i\alpha}}\sqrt{2\pi i\alpha}=1,\\&K_\alpha(y,x)\to\delta(y-x).\end{aligned} \qquad (4.7.12)$$

Хотя при $\alpha=0$ преобразование становится тождественным, не допускающим оператора 2-го типа, в пределе при $\alpha\to 0$ этот оператор переходит в тождественный. Таким образом, оператор $\hat{\Phi}_\alpha$ можно рассматривать как определение произвольной дробной степени $2\alpha/\pi$ от преобразования Фурье.

Рассмотрим композицию двух операторов $\hat{\Phi}_\alpha\circ\hat{\Phi}_\beta$. Ядро этого оператора равно произведению Вольтерра ядер операторов $\hat{\Phi}_\alpha$ и $\hat{\Phi}_\beta$ аналогично (4.4.30). Точное вычисление этого ядра, сводящееся к вычислению гауссовых интегралов и применению элементарных тригонометрических тождеств, приводит к следующему результату:

$$\int K_\alpha(y,z)\,K_\beta(z,x)\,dz = K_{\alpha+\beta}(y,x). \tag{4.7.13}$$

Иными словами, операторы $\hat{\Phi}_\alpha$ обладают групповым свойством:

$$\hat{\Phi}_\alpha \circ \hat{\Phi}_\beta = \hat{\Phi}_\beta \circ \hat{\Phi}_\alpha = \hat{\Phi}_{\alpha+\beta}. \tag{4.7.14}$$

Оператор $\hat{\Phi}_0$ мы определим как единичный оператор. Обратный оператор равен

$$\left(\hat{\Phi}_\alpha\right)^{-1} = \hat{\Phi}_{-\alpha}. \tag{4.7.15}$$

Как уже отмечалось, множество всех канонических преобразований в классической механике или геометрической оптике образуют группу. Интегральные операторы Фурье, отвечающие каноническим преобразованиям в квантовой механике или волновой оптике, также образуют группу, являющуюся представлением классической группы канонических преобразований. Этот результат был установлен в разделе 4.4 в асимптотическом приближении. В данном примере соответствие оказывается точным. Свойство (4.7.14) означает, что операторы, описывающие динамику гармонического осциллятора, образуют однопараметрическую подгруппу.

**Интегральный оператор Фурье 1-го типа**

Полученный выше интегральный оператор Фурье 2-го типа можно переписать как интегральный оператор Фурье 1-го типа. Будем пользоваться следующим определением прямого и обратного преобразования Фурье:

$$\begin{aligned}
\tilde{\psi}(\xi) &= \sqrt{\frac{-i}{2\pi}} \int \exp(-ix\xi)\,\psi(x)\,dx, \\
\psi(x) &= \sqrt{\frac{i}{2\pi}} \int \exp(ix\xi)\,\tilde{\psi}(\xi)\,d\xi.
\end{aligned} \tag{4.7.16}$$

Представляя волновую функцию через ее преобразование Фурье, перепишем оператор

$$\begin{aligned}
\hat{\Phi}_\alpha \psi_0(y) &= \sqrt{\frac{i}{2\pi}} \int K_\alpha(y,x) \int \exp(ix\xi)\,\tilde{\psi}_0(\xi)\,d\xi\,dx = \\
&= \int \sqrt{\frac{i}{2\pi}} \int \exp(ix\xi)\,K_\alpha(y,x)\,dx\,\tilde{\psi}_0(\xi)\,d\xi \equiv \\
&\equiv \int \tilde{K}_\alpha(y,\xi)\tilde{\psi}_0(\xi)\,d\xi.
\end{aligned} \tag{4.7.17}$$

Вычислим его ядро:

$$\tilde{K}_\alpha(y,\xi)=\sqrt{\frac{i}{2\pi}}\int\exp(ix\xi)\,K_\alpha(y,x)\,dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{\sin\alpha}}\int\exp\left(ix\xi+i\frac{y^2\cos\alpha-2xy+x^2\cos\alpha}{2\sin\alpha}\right)dx= \qquad (4.7.18)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{-2\pi i\cos\alpha}}\exp\left(-i\frac{\xi^2\sin\alpha-2\xi y+y^2\sin\alpha}{2\cos\alpha}\right).$$

К этому же результату можно прийти, вычисляя производящую функцию 1-го типа из уравнений динамики (4.7.3) и (4.7.4):

$$dS_1=\eta\,dy+x\,d\xi\,. \qquad (4.7.19)$$

Выразим η и $x$ через ($y$, ξ):

$$\eta(y,\xi)=\frac{\xi-y\sin\alpha}{\cos\alpha},\quad x(y,\xi)=\frac{y-\xi\sin\alpha}{\cos\alpha}. \qquad (4.7.20)$$

Интегрируя, получаем выражения для производящей функции:

$$S_1(y,\xi,\alpha)=\int\eta(y,\xi)\,dy=\frac{2\xi y-y^2\sin\alpha}{2\cos\alpha}+F(\xi),$$
$$S_1(y,\xi,\alpha)=\int x(y,\xi)\,d\xi=\frac{2\xi y-\xi^2\sin\alpha}{2\cos\alpha}+G(y). \qquad (4.7.21)$$

Объединяя эти выражения, получаем формулу для производящей функции:

$$S_1(y,\xi,\alpha)=-\frac{\xi^2\sin\alpha-2\xi y+y^2\sin\alpha}{2\cos\alpha}, \qquad (4.7.22)$$

совпадающую с производящей функцией, полученной в (4.7.18).

**Групповое свойство и точность представления**

Полученные выше результаты позволяют доказать, что решение волнового уравнения для гармонического осциллятора, записанное в форме интегрального оператора Фурье 1-го типа (4.7.9) или 2-го типа (4.7.17), является точным.

Определим инфинитезимальный генератор группы сдвига по времени:

$$\frac{\psi_{\alpha+\delta\alpha}-\psi_\alpha}{\delta\alpha}=\frac{\hat{\Phi}_{\alpha+\delta\alpha}-\hat{\Phi}_\alpha}{\delta\alpha}\psi_0=\Lambda_\alpha\psi_0=\frac{\hat{\Phi}_{\delta\alpha}-\hat{\Phi}_0}{\delta\alpha}\hat{\Phi}_\alpha\psi_0=$$
$$=\frac{\hat{\Phi}_{\delta\alpha}-\hat{\Phi}_0}{\delta\alpha}\psi_\alpha=\Lambda_0\psi_\alpha. \qquad (4.7.23)$$

Найдем $\Lambda_0$:

$$\Lambda_0\psi_\alpha=\int\frac{\partial}{\partial\alpha}\tilde{K}_\alpha(y,\xi)\Big|_{\alpha=0}\tilde{\psi}_\alpha(\xi)\,d\xi=$$
$$=\sqrt{\frac{i}{2\pi}}\int\exp(iy\xi)\left(-i\frac{\xi^2+y^2}{2}\right)\tilde{\psi}_\alpha(\xi)\,d\xi. \qquad (4.7.24)$$

Поскольку умножение спектра на $\xi$ ассоциировано с оператором $-i\partial_y$, мы получаем следующее выражение для генератора:

$$\Lambda_0\psi_\alpha = -\frac{i}{2}\left( y^2 + \left(-i\partial_y\right)^2 \right)\psi_\alpha, \tag{4.7.25}$$

что соответствует динамическому уравнению

$$i\frac{d\psi_\alpha}{d\alpha} = \frac{1}{2}\left( y^2 + \left(-i\partial_y\right)^2 \right)\psi_\alpha = H\left(y, -i\partial_y\right)\psi_\alpha. \tag{4.7.26}$$

Это уравнение является точным уравнением Шредингера для гармонического осциллятора.

Полученные в этом разделе формулы для гармонического осциллятора окажутся полезными в главе 7, посвященной нелинейным представлениям волновых полей.

## Литература


1. *Карасев М.В., Маслов В.П.* Нелинейные скобки Пуассона. Геометрия и квантование. М.: Наука, 1991. 368 с.
2. *Егоров Ю.В.* Лекции по уравнениям с частными производными. Дополнительные главы. М.: Изд-во МГУ, 1985. 168 с.

# 5. Моделирование радиозатменных экспериментов

## 5.1. Интегрирование уравнений геометрической оптики

**Вычисление лучей, фазы и амплитуды**

Рассмотрим методы численной реализации приближения геометрической оптики. Удобство геометрической оптики состоит в том, что для вычисления фазы в заданной точке при однолучевом распространении достаточно вычислить всего один луч, а для вычисления амплитуды необходимо вычислить малую или бесконечно малую лучевую трубку. Однако геометрическая оптика обладает и рядом неудобств. Они проявляются в задачах, связанных с появлением каустик и многолучевого распространения. Проблема состоит не только в том, что на каустиках нарушаются условия применимости геометрической оптики. При вычислении поля в заданной точке в многолучевой зоне необходимо найти все лучи, приходящие в эту точку, что может потребовать значительного объема вычислений, поскольку число лучей заранее неизвестно. Эту трудность можно обойти, вычисляя пучок лучей, излучаемых источником, достаточно широкий, чтобы покрыть заданную область, и достаточно плотный, чтобы можно было интерполировать амплитуду и фазу. В этом случае можно определять число лучей в каждой точке и суммировать поля разных лучей в многолучевых областях.

Напомним, что в геометрической оптике решение ищется в виде

$$u(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x})\exp\left(ik\Psi(\mathbf{x})\right), \tag{5.1.1}$$

где волновое поле $u(\mathbf{x})$ можно рассматривать как в области, так и в окрестности одной бесконечно малой лучевой трубки. Амплитуда $A(\mathbf{x})$ представляется в виде

$$A(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x})\sqrt{\mu_I(\mathbf{x})}. \tag{5.1.2}$$

Лучи и эйконал задаются гамильтоновой системой

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{x}}, \quad \dot{\Psi} = \mathbf{p}\dot{\mathbf{x}}, \tag{5.1.3}$$

которую можно интегрировать для одного отдельно взятого луча. Плотность меры $\mu_I(\mathbf{x})$ определяется уравнением сохранения меры относительно лучевой динамики:

$$\mathcal{L}_{\mathbf{V}(\mathcal{H})}\left(i^*\mu_I dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n\right) = 0, \tag{5.1.4}$$

что эквивалентно уравнению

$$\dot{\mu}_I dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n + \mu_I \sum_i dx^1 \wedge \ldots \wedge d\dot{x}^i \wedge \ldots \wedge dx^n = 0, \tag{5.1.5}$$

Дополнительный амплитудный множитель $\varphi(\mathbf{x})$ описывается уравнением переноса:

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \mathbf{x}\,\partial \mathbf{p}}\varphi. \tag{5.1.6}$$

Как мы видели в разделе 4.1, для скалярного волнового уравнения Гельмгольца гамильтониан и уравнения лучей имеют вид

$$\begin{gathered}\mathcal{H}(\mathbf{x},\mathbf{p}) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{p}^2 - n^2(\mathbf{x})\right), \\ \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{p}, \quad \dot{\mathbf{p}} = n\nabla n, \quad \dot{\Psi} = n^2,\end{gathered} \tag{5.1.7}$$

и соответствующий параметр лучевой траектории определяется соотношением $d\tau = ds / n$.

В определении меры $\mu_I(\mathbf{x})$ и амплитудного множителя $\varphi(\mathbf{x})$ присутствует произвол: функцию $\varphi(\mathbf{x})$ можно умножить на произвольный ненулевой постоянный множитель $\alpha$, а меру $\mu_I(\mathbf{x})$ умножить на $\alpha^{-2}$, и при этом амплитуда $A(\mathbf{x})$ не изменится. Можно договориться о каком-либо определении плотности меры, а начальные условия включать в множитель $\varphi(\mathbf{x})$.

Рассмотрим решение задачи, в которой заданы начальная точка и начальное направление луча. Для определения траектории луча и фазы необходимо численно интегрировать гамильтонову систему (5.1.3), например, методом Рунге–Кутты [1, 2] или методом дробных шагов [3]. Такое вычисление фазы не учитывает каустических добавок. Вычисляя только один луч, невозможно определить, касался ли он каустик. Для этого необходимо вычислить малую лучевую трубку. Это позволит также вычислить амплитуду.

Простейший способ вычисления лучевой трубки использует конечные разности. Достаточно задать четыре близкие начальные точки $\mathbf{x}_{0\text{–}3}(0)$ и соответствующие начальные импульсы $\mathbf{p}_{0\text{–}3}(0)$ и рассмотреть эволюцию элемента объема $\delta V(\tau)$, натянутого на векторы $\delta\mathbf{x}_i(\tau) = \mathbf{x}_i(\tau) - \mathbf{x}_0(\tau)$, $i = 1, 2, 3$, и равного $(\delta\mathbf{x}_1(\tau), [\delta\mathbf{x}_2(\tau), \delta\mathbf{x}_3(\tau)])$. Начальные точки должны выбираться так, чтобы элемент объема, натянутый на векторы $\delta\mathbf{x}_i(0)$, был ненулевым. Начальные импульсы должны соответствовать заданной исходной лучевой конфигурации падающего волнового поля. Это потребует интегрирования уравнений для четырех лучей. Достаточно, однако, вычислять лишь три луча, поскольку можно положить $\mathbf{x}_1(0) = \mathbf{x}_0(0 + \delta\tau)$ и $\mathbf{p}_1(0) = \mathbf{p}_0(0 + \delta\tau)$, где $\delta\tau$ – достаточно малый фиксированный шаг по параметру луча. В этом случае

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_1(\tau) &= \mathbf{x}_0(\tau + \delta\tau), \\ \mathbf{p}_1(\tau) &= \mathbf{p}_0(\tau + \delta\tau), \\ \delta\mathbf{x}_1(\tau) &= \dot{\mathbf{x}}\delta\tau = \frac{d\mathbf{x}}{ds}n(\mathbf{x})\,\delta\tau,\end{aligned} \tag{5.1.8}$$

где $ds$ – элемент длины луча, $d\mathbf{x} / ds$ – единичный вектор направления луча, и мы учли, что $d\tau = ds / n$. В этом случае элемент объема равен

$$\delta V(\tau) = \left(\frac{d\mathbf{x}(\tau)}{ds}, \left[\delta\mathbf{x}_2(\tau), \delta\mathbf{x}_3(\tau)\right]\right) n(\mathbf{x})\,\delta\tau = n\left(\mathbf{x}(\tau)\right)\delta\sigma(\tau)\,\delta\tau, \tag{5.1.9}$$

где $\delta\sigma$ – площадь перпендикулярного сечения лучевой трубки. В этом случае плотность меры задается в виде

$$\mu_I(\tau) = \sqrt{\frac{n(\mathbf{x}(0))\,\delta\sigma(0)}{n(\mathbf{x}(\tau))\,\delta\sigma(\tau)}},$$
$$\delta\sigma(\tau) = \left(\frac{d\mathbf{x}(\tau)}{ds}, \left[\delta\mathbf{x}_2(\tau), \delta\mathbf{x}_3(\tau)\right]\right). \tag{5.1.10}$$

В таком определении всегда $\mu_I(0) = 1$, и $\varphi(0)$ равно начальному условию для амплитуды поля. При интегрировании уравнений лучей необходимо следить за эволюцией лучевой трубки и определять ее перегибы, соответствующие каустикам. В таких точках к фазе добавляется каустический сдвиг.

Недостаток метода конечных разностей состоит в необходимости вычислять малые разности координат, которые определяются с численными погрешностями. Это может приводить к потере разрядов. Вместо вычисления конечных разностей можно интегрировать линеаризованную гамильтонову систему для вариаций $\delta\mathbf{x}_{2,3}$ и $\delta\mathbf{p}_{2,3}$:

$$\delta\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial\mathbf{p}\otimes\partial\mathbf{x}}\delta\mathbf{x} + \frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial\mathbf{p}\otimes\partial\mathbf{p}}\delta\mathbf{p},$$
$$\delta\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mathbf{x}\otimes\partial\mathbf{p}}\delta\mathbf{p} - \frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial\mathbf{x}\otimes\partial\mathbf{x}}\delta\mathbf{x}, \tag{5.1.11}$$

где все производные гамильтониана вычисляются на невозмущенной траектории $\mathbf{x}(\tau)$. Начальное условие задается в следующем виде:

$$\delta\mathbf{p}_{2,3}(0) = \frac{d\mathbf{p}}{d\mathbf{x}}\delta\mathbf{x}_{2,3}(0), \tag{5.1.12}$$

где $d\mathbf{p} / d\mathbf{x}$ вычисляется для заданной исходной лучевой конфигурации падающего поля. Недостаток этого метода состоит в том, что он требует вычисления вторых производных поля показателя преломления, а это может представлять вычислительные трудности в случае моделирования атмосферы на основе заданных сеточных полей метеопараметров. В любом случае первые производные поля показателя преломления необходимы для решения уравнений геометрической оптики, тогда как уравнение Гельмгольца включает только показатель преломления.

Приведенные определения даны для случая задания начальных условий на некоторой поверхности. Если имеется точечный источник в среде, то его мы окружим достаточно малой сферой, внутри которой среду можно считать однородной, и поле соответствует сферической волне. На этой сфере зададим начальные условия.

Приведенные уравнения относятся прежде всего к нейтральной атмосфере. Геометрооптическое описание распространения волн в анизотропной среде, какой является ионосфера, существенно сложнее [4–7]. Как мы видели, в ионосфере поле представляется в виде суммы мод, соответствующих обыкновенной и необыкновенной волне. Если в однородной анизотропной среде эти волны не взаимодействуют, то в неоднородной среде это уже не так. Если направление оси анизотропии неоднородно, то поляризация мод будет разной в разных точках пространства. Поэтому каждая мода, распространяясь, будет

постоянно расщепляться на новые локальные моды. Для распространения волн, излучаемых системами глобальной спутниковой навигации в дециметровом диапазоне, эффекты анизотропии слабы, и можно пользоваться стандартными геометрооптическими уравнениями.

**Методы возмущений в геометрической оптике**

Методы возмущений основаны на линеаризации геометрооптических уравнений по отношению к малым возмущениям поля показателя преломления. Пусть задана вариация функции Гамильтона $\delta\mathcal{H}$, понимаемая как вариация формы функции при фиксированных аргументах. Пусть имеются решения для лучей $\mathbf{x}_0(\tau)$, $\mathbf{p}_0(\tau)$ в невозмущенной среде с исходной функцией Гамильтона $\mathcal{H}$. Запишем уравнения для малых возмущений лучей $\delta\mathbf{x}(\tau)$, $\delta\mathbf{p}(\tau)$ в рамках первого порядка теории возмущений:

$$\begin{aligned}\delta\dot{\mathbf{x}} &= \frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial\mathbf{p}\otimes\partial\mathbf{x}}\delta\mathbf{x} + \frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial\mathbf{p}\otimes\partial\mathbf{p}}\delta\mathbf{p} + \frac{\partial\delta\mathcal{H}}{\partial\mathbf{p}},\\ \delta\dot{\mathbf{p}} &= -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mathbf{x}\otimes\partial\mathbf{p}}\delta\mathbf{p} - \frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial\mathbf{x}\otimes\partial\mathbf{x}}\delta\mathbf{x} - \frac{\partial\delta\mathcal{H}}{\partial\mathbf{x}},\end{aligned} \tag{5.1.13}$$

где все функции в правой части вычисляются вдоль невозмущенных лучей $\mathbf{x}_0(\tau)$, $\mathbf{p}_0(\tau)$. Эти уравнения представляют собой линейную неоднородную систему из шести дифференциальных уравнений первого порядка. Для этой системы можно формулировать как задачу с начальными условиями, так и задачу с закрепленными концами (нахождение луча между двумя заданными точками). Решение этой системы задает вариации траекторий в виде линейного оператора от вариации функции Гамильтона $\delta\mathcal{H}$.

Помимо теории возмущений для лучей можно строить теорию возмущений для эйконала. Рассмотрим вариацию действия в окрестности невозмущенных лучей:

$$\delta S = \delta\int_a^b \left(\mathbf{p}\dot{\mathbf{x}} - \mathcal{H}\right) d\tau = -\int_a^b \delta\mathcal{H}\, d\tau. \tag{5.1.14}$$

Здесь остается лишь член, связанный с вариацией формы функции Гамильтона. Остальные члены равны вариации невозмущенного действия в окрестности невозмущенного луча и должны давать в сумме нуль в силу вариационного принципа Ферма. Величина $\delta S$ равна вариации эйконала $\delta\Psi$. В частности, для гамильтониана (5.1.7) имеем простое выражение для возмущения эйконала:

$$\delta\Psi = \int n\,\delta n\, d\tau = \int \delta n\, ds, \tag{5.1.15}$$

где интеграл берется вдоль невозмущенного луча.

Рассмотрим вычисление вариации направления прихода луча в заданную точку при варьировании поля показателя преломления. Как показано в [8], применение теории возмущений для лучей и для эйконала приводит к тождественно равным ответам. Это связано с тем, что применение теории возмущений для эйконала неотделимо от лучевых представлений. Рассмотрим невозмущенный луч $\mathbf{x}_0(s)$, который здесь будет удобнее параметризовать дли-

ной дуги $s$. Существует бесконечно много различных способов параметризовать возмущенную траекторию. Мы будем представлять возмущение траектории в форме

$$\delta\mathbf{x}(s) = \mathbf{e}_1(s)\,\delta x_1 + \mathbf{e}_2(s)\,\delta x_2, \tag{5.1.16}$$

где $\mathbf{e}_{1,2}(s)$ – базисные векторы в плоскости, перпендикулярной направлению невозмущенного луча $\dot{\mathbf{x}}_0(s)$. Для вычисления возмущения направления прихода луча необходимо вычислить производную возмущения эйконала в конечной точке луча по направлениям $\mathbf{e}_{1,2}(s)$. Поскольку возмущение эйконала представляется интегралом (5.1.15) по невозмущенным лучам, для решения задачи необходимо рассмотреть веер невозмущенных лучей, исходящих из источника. Эти лучи мы будем рассматривать как возмущения исходного луча вследствие малой вариации начального направления. Параметр $s$ для возмущенных лучей уже не будет длиной дуги. Вычислим элемент длины дуги возмущенного луча

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}_0(s) + \delta\mathbf{x}(s) \tag{5.1.17}$$

в первом порядке теории возмущений:

$$\left|\dot{\mathbf{x}}\right| ds = \left(\left|\dot{\mathbf{x}}_0\right| + 2\dot{\mathbf{x}}_0\dot{\mathbf{e}}_1\delta x_1 + 2\dot{\mathbf{x}}_0\dot{\mathbf{e}}_2\delta x_2\right)^{1/2} ds = \left(1 + \dot{\mathbf{x}}_0\dot{\mathbf{e}}_1\delta x_1 + \dot{\mathbf{x}}_0\dot{\mathbf{e}}_2\delta x_2\right) ds. \tag{5.1.18}$$

Таким образом, возмущение эйконала будет равно

$$\delta\Psi = \int \sum_j \left(\nabla\delta n\mathbf{e}_j + \delta n\,\dot{\mathbf{x}}_0\dot{\mathbf{e}}_j\right)\delta x_j\, ds, \tag{5.1.19}$$

Производные возмущения эйконала вдоль волнового фронта в окрестности точки наблюдения будут вычисляться следующим образом:

$$\frac{\delta\Psi}{\delta X_{1,2}} = \int \sum_j \left(\nabla\delta n\mathbf{e}_j + \delta n\,\dot{\mathbf{x}}_0\dot{\mathbf{e}}_j\right)\frac{\delta x_j}{\delta X_{1,2}}\, ds, \tag{5.1.20}$$

где $X_{1,2}$ – координаты в плоскости, перпендикулярной лучу в точке наблюдения.

Дополнительное соотношение для векторов $\mathbf{e}_j$ и их производных $\dot{\mathbf{e}}_j$ следует из вариационного принципа. Вариация эйконала для невозмущенной траектории в невозмущенной среде равна

$$\delta\Psi = \int \sum_j \left(\nabla n\mathbf{e}_j + n\,\dot{\mathbf{x}}_0\dot{\mathbf{e}}_j\right)\delta x_j\, ds, \tag{5.1.21}$$

где $\delta x_j$ – произвольные вариации траектории. Поскольку вариация эйконала обязана быть равной нулю, получаем

$$\dot{\mathbf{x}}_0\dot{\mathbf{e}}_j = -\frac{\nabla n}{n}\mathbf{e}_j. \tag{5.1.22}$$

Поэтому

$$\frac{\delta\Psi}{\delta X_{1,2}} = \int \sum_j \left(\nabla\delta n - \delta n\frac{\nabla n}{n}\right)\mathbf{e}_j\frac{\delta x_j}{\delta X_{1,2}}\, ds, \tag{5.1.23}$$

**Системы координат. Двумерное приближение**

В произвольной системе координат определим импульс соотношением $p_i = g_{ij}\dot{x}^j$, где $(g_{ij})$ – метрический тензор. Поскольку при этом форма $\mathbf{p}\,d\mathbf{x}$ ин-

вариантна относительно замен координат, и каноническая форма гамильтоновой системы будет инвариантна, как мы видели в разделе 4.5. Тогда функция Гамильтона имеет вид

$$\mathcal{H}(\mathbf{x},\mathbf{p}) = \frac{1}{2}\left( p_i g^{ij} p_j - n^2(\mathbf{x}) \right), \tag{5.1.24}$$

где $(g_{ij})$ – обратный метрический тензор. Отсюда следуют уравнения лучей:

$$\begin{aligned} \dot{x}^i &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = g^{ij} p_j, \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^i} = n \frac{\partial n}{\partial x^i} - \frac{1}{2} p_k \frac{\partial g^{kj}}{\partial x^i} p_j. \end{aligned} \tag{5.1.25}$$

Система координат, в которой выполняется численное интегрирование уравнений, выбирается в соответствии с решаемой задачей. В случае моделирования радиозатменных экспериментов удобнее всего пользоваться 3-мерной декартовой системой координат. Эта система оказывается удобнее, чем, например, сферическая система координат. Декартовы координаты однородны, у них нет особых точек, что облегчает моделирование произвольной геометрии наблюдений. У сферической системы координат имеются особые точки на полюсах.

Горизонтальные градиенты показателя преломления нейтральной атмосферы существенно меньше вертикальных. Это позволяет приближенно считать лучи кривыми в вертикальной плоскости. Пользуясь полученной выше приближенной формулой для возмущения направления прихода луча, оценим боковое смещение луча по отношению к вертикальной плоскости, определяемой тремя точками: центром Земли, источником $T$ и приемником $R$. Будем снова обозначать расстояния от источника и приемника до лимба планеты как $D_{T,\,R}$ . Будем рассматривать только боковые смещения луча и применим теорию возмущений, считая, что невозмущенный показатель преломления $n = 1$. Примем следующую оценку бокового смещения луча:

$$\delta x = D_T \varepsilon_T = D_R \varepsilon_R, \tag{5.1.26}$$

где $\varepsilon_{T,\,R}$ – боковые возмущения углов выхода луча у источника и прихода у приемника. Считая невозмущенные лучи в плане прямыми, можно записать формулу через возмущение угла выхода $\varepsilon_T$:

$$\delta x = D_T \int \nabla \delta n \, \mathbf{e} \, \frac{D_T + D_R - x}{D_T + D_R} \, ds. \tag{5.1.27}$$

Поскольку основной вклад в интеграл дает узкая область вблизи перигея, величину $x$ можно заменить на $D_T$, что приведет к следующей формуле:

$$\delta x = \frac{D_T D_R}{D_T + D_R} \int \nabla \delta n \, \mathbf{e} \, ds = D \int \nabla_\perp \delta n \, ds. \tag{5.1.28}$$

Такая же формула получится и для вычисления через возмущение угла прихода. Оценим боковое смещение луча. Характерное значение индекса рефракции у поверхности Земли близко к 300 ppm, а температуру можно считать близкой 300 К. Если температура меняется на 1 К на расстоянии 50 км, это соответствует градиенту показателя преломления 1 ppm на 50 км или $2\times10^{-8}$

км$^{-1}$. Воспользуемся оценкой характерного масштаба взаимодействия луча и атмосферы, полученной в разделе 3.1: $L$ = 450 км и характерной для радиозатменных наблюдений величиной $D$ = 3000 км. Тогда получим: $\delta x \approx DL\nabla n$ = 0.06 км. Таким образом, характерные боковые смещения лучей не превышают десятков метров, что существенно меньше характерных горизонтальных масштабов метеополей. Это позволяет в численном моделировании пользоваться двумерным приближением, считая, что луч лежит в вертикальной плоскости.

В двумерном приближении существенно упрощается решение задачи нахождения луча между двумя точками. Луч характеризуется одной переменной (например, начальным направлением у источника γ). Поэтому задача сводится к решению одномерного уравнения вида $f(\gamma) = 0$, где $f$ – величина «промаха» луча мимо приемника. Такое уравнение можно эффективно решать методом дихотомии. Задаются исходные грубые оценки пределов, в которых лежит решение, т.е. исходное направление луча $\gamma_0^+$, при котором он заведомо пройдет выше приемника, и направление $\gamma_0^-$, при котором он заведомо пройдет ниже. Затем этот отрезок делится пополам и вычисляется луч в направлении $\left(\gamma_0^- + \gamma_0^+\right)/2$. Если луч прошел выше приемника, то для следующей итерации задаем $\gamma_1^+ = \left(\gamma_0^- + \gamma_0^+\right)/2, \quad \gamma_1^- = \gamma_0^-$. В противном случае $\gamma_1^+ = \gamma_0^-, \quad \gamma_1^- = \left(\gamma_0^- + \gamma_0^+\right)/2$. На каждом шаге интервал локализации решения сужается вдвое. Итерации продолжаются, пока не будет достигнута заданная точность. Для практических целей этот метод удобнее методов типа Ньютона–Рафсона, поскольку он прост в реализации и заведомо находит решение.

**Уравнения лучей в полярных координатах**

Введем в вертикальной плоскости полярные координаты $r$, θ. Метрический тензор в этих координатах имеет вид

$$g_{ij} = \mathrm{diag}\left(1, r^2\right), \qquad g^{ij} = \mathrm{diag}\left(1, r^{-2}\right). \tag{5.1.29}$$

Применяя уравнения (5.1.24) и (5.1.25), получаем соотношения для угловой компоненты импульса $p_\theta$, которую удобнее обозначить просто $p$:

$$p = r^2\dot{\theta} = nr\frac{rd\theta}{ds} = nr\sin\psi, \qquad \dot{p} = n\frac{\partial n}{\partial\theta}, \tag{5.1.30}$$

где ψ – угол между направляющим вектором луча $\dot{\mathbf{x}}$ и локальной вертикалью $\mathbf{x}$. Поскольку $\partial g^{kj}/\partial\theta = 0$, эта система уравнений замкнута, т.е. не содержит радиальной компоненты импульса $p_r = \dot{r}$. В уравнение для $\dot{p}_r$ войдет ненулевой член $-p^2(\partial g^{22}/\partial r)/2$.

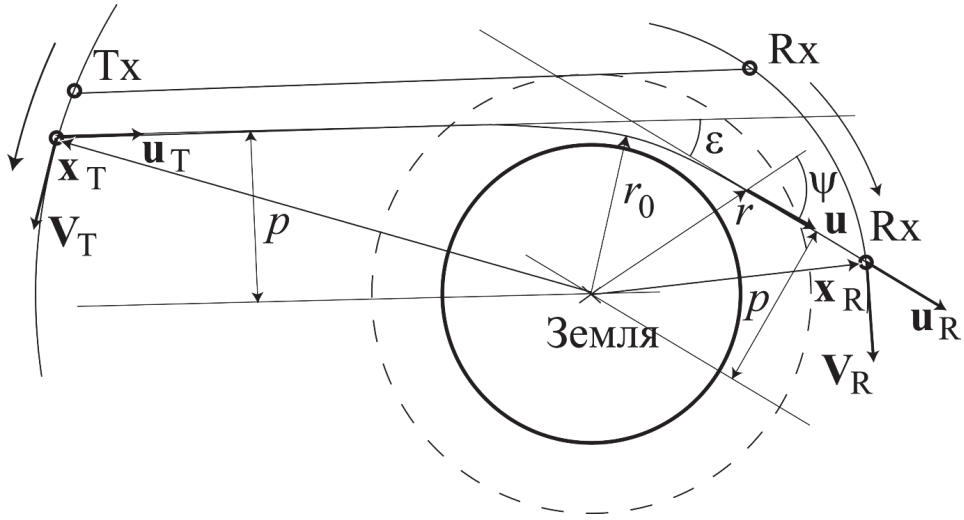



**Рис. 13.** Геометрия радиозатменного эксперимента

В сферически-слоистой среде $p$ – инвариант, равный прицельному расстоянию луча до и после его взаимодействия с атмосферой (рис. 13). Это утверждение называется законом Снеллиуса, или формулой Бугера для сферически-слоистой среды.

Пользуясь уравнениями (5.1.30) и соотношением $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$ получаем уравнение лучевых траекторий:

$$\frac{dr}{d\theta} = \pm \frac{r}{p} \sqrt{n^2 r^2 - p^2}. \tag{5.1.31}$$

Здесь и далее верхний знак относится к восходящей части лучевой траектории от точки перигея до приемника, а нижний – к нисходящей от источника до точки перигея. В сферически-слоистой среде это уравнение описывает луч с заданным прицельным параметром $p$. В общем случае это уравнение следует использовать вместе с динамическим уравнением (5.1.30).

**Угол рефракции**

В дальнейшем, в формулировках обратных задач зондирования атмосферы будем пользоваться зависимостью угла рефракции от прицельного параметра $\varepsilon(p)$. Здесь мы получим аналитическое выражение для угла рефракции, которое будет использоваться при решении обратных задач. Дифференциальное уравнение для угла рефракции выводится из (5.1.30) и (5.1.31). Получим формулу для угла рефракции в виде интеграла по радиусу от высоты точки перигея луча $r_0$. На восходящей части траектории

$$\begin{aligned} d\varepsilon &= d\left(\psi + \theta\right), \\ \psi &= \arcsin \frac{p}{nr}, \end{aligned} \tag{5.1.32}$$

На нисходящей части траектории, где интегрирование идет также от точки перигея,

$$d\varepsilon = -d\left(\psi + \theta\right), \qquad \psi = \pi - \arcsin\frac{p}{nr}. \tag{5.1.33}$$

Эти формулы можно объединить:

$$d\varepsilon = d\arcsin\frac{p}{nr} \pm \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^{-1} dr. \tag{5.1.34}$$

С учетом уравнения траектории луча (5.1.31) получаем

$$d\varepsilon = \frac{nr}{\sqrt{n^2r^2 - p^2}}\left(\frac{dp}{nr} - \frac{p}{nr^2}dr - \frac{p}{n^2r}\left(\frac{\partial n}{\partial r}dr + \frac{\partial n}{\partial \theta}d\theta\right)\right) + \frac{pdr}{r\sqrt{n^2r^2 - p^2}} = \\ = \frac{1}{\sqrt{n^2r^2 - p^2}}\left(dp - \frac{p}{n}\left(\frac{\partial n}{\partial r}dr + \frac{\partial n}{\partial \theta}d\theta\right)\right). \tag{5.1.35}$$

Теперь учтем динамическое уравнение для прицельного параметра (5.1.30):

$$dp = \frac{\partial n}{\partial \theta}\frac{ds}{d\theta}d\theta = \frac{\partial n}{\partial \theta}\sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2}\,d\theta = \frac{\partial n}{\partial \theta}\frac{nr^2}{p}d\theta, \\ d\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{n^2r^2 - p^2}}\left(\frac{\partial n}{\partial \theta}\frac{nr^2}{p}d\theta - \frac{p}{n}\left(\frac{\partial n}{\partial r}dr + \frac{\partial n}{\partial \theta}d\theta\right)\right). \tag{5.1.36}$$

И еще раз учитывая уравнение траектории луча (5.1.31), получим окончательно

$$d\varepsilon = \left(-\frac{p}{n}\frac{\partial n}{\partial r} \pm \frac{\partial n}{r\,\partial \theta}\frac{\sqrt{n^2r^2 - p^2}}{n}\right)\frac{dr}{\sqrt{n^2r^2 - p^2}}. \tag{5.1.37}$$

В произвольной среде эта формула должна использоваться вместе с уравнением (5.1.30), которое позволит определить зависимости $p_{\pm}(r)$ для двух ветвей траектории.

В произвольной точке луча введем локальные декартовы координаты ($dr$, $rd\theta$). В этом базисе направляющий вектор луча равен ($\cos\psi$, $\sin\psi$). Выражение в скобках в формуле (5.1.37) равно скалярному произведению градиента показателя преломления и вектора:

$$\left(-\frac{p}{n}, \pm\frac{\sqrt{n^2r^2 - p^2}}{n}\right) = r\left(-\frac{p}{rn}, \pm\sqrt{1 - \left(\frac{p}{rn}\right)^2}\right) = r\left(-\sin\psi, \cos\psi\right). \tag{5.1.38}$$

Таким образом, приращение угла рефракции выражается через проекцию градиента показателя преломления на нормаль к лучу.

Для сферически-слоистой среды, где прицельный параметр является инвариантом луча, получаем формулу

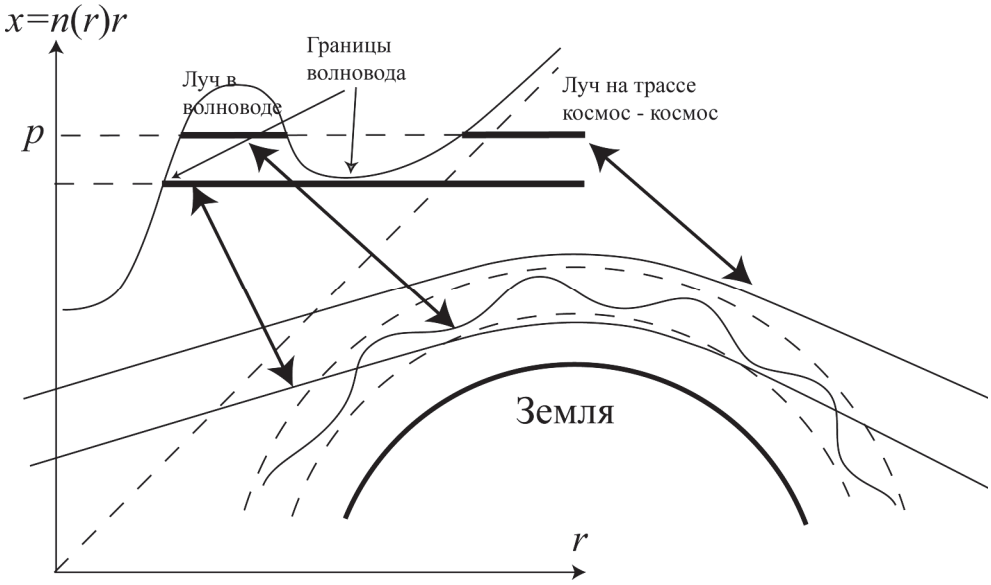



**Рис. 14.** Геометрия сверхрефракции и волноводного распространения в сферически-слоистой среде

$$\varepsilon(p) = -2\int_{r_0}^{\infty} \frac{pn_r' dr}{n\sqrt{n^2 r^2 - p^2}}, \tag{5.1.39}$$

где высота перигея луча $r_0$ определяется из уравнения $n(r_0)\, r_0 = p$.

Связь профиля показателя преломления $n(r)$ с профилем угла рефракции $\varepsilon(p)$ (5.1.39) носит нелинейный характер. Однако, если перейти к рефракционному радиусу $x$ при помощи нелинейной замены координат $x = n(r)r$, то эта связь становится линейной относительно $\ln n$:

$$\varepsilon(p) = -2\int_{p}^{\infty} \frac{d\ln n}{dx} \frac{pdx}{\sqrt{x^2 - p^2}}, \tag{5.1.40}$$

Все нелинейные эффекты описываются зависимостью $x(r)$.

**Сверхрефракция и волноводное распространение**

Рефракционный радиус позволяет описать явление волноводного распространения, проиллюстрированное на рис. 14. Рассмотрим случай немонотонной зависимости $x(r)$. Как следует из уравнения (5.1.30), на луче $x \geq p$. Для заданного прицельного параметра $p$ выделим на оси $r$ связные множества, удовлетворяющие условию $x(r) \geq p$. Если такое множество является лучом от минимального значения $r_0$ до бесконечности, то оно соответствует лучу на трассе космос–космос. Если это множество является конечным отрезком, то оно соответствует лучу, заключенному в волноводе. Луч, выпущенный горизонтально на верхней границе волновода, будет бесконечно скользить вдоль

этой границы. Эта ситуация называется критической рефракцией: радиус кривизны луча, выпущенного горизонтально, точно равен расстоянию до центра сферической симметрии среды. Если радиус кривизны луча, выпущенного горизонтально, меньше этого расстояния, то такая ситуация называется сверхрефракцией. Сверхрефракция реализуется внутри волновода. Нормальной рефракцией называется ситуация, когда радиус кривизны луча, выпущенного горизонтально, больше расстояния до центра сферической симметрии среды. В соответствии с рис. 14 можно записать следующие условия этих трех ситуаций:

$$\begin{aligned} &dx/dr > 0 \quad \text{нормальная рефракция,} \\ &dx/dr = 0 \quad \text{критическая рефракция,} \\ &dx/dr < 0 \quad \text{сверхрефракция.} \end{aligned} \tag{5.1.41}$$

К этим формулам можно прийти непосредственно, записав динамическое уравнение для радиальной компоненты импульса:

$$\dot{p}_r = \ddot{r} = n\frac{\partial n}{\partial r} + \frac{p^2}{r^3}. \tag{5.1.42}$$

В точке перигея $p = nr$, поэтому

$$\ddot{r} = n\frac{\partial n}{\partial r} + \frac{n^2}{r} = \frac{n}{r}\frac{dx}{dr}. \tag{5.1.43}$$

Приведем еще один способ вывода условий (5.1.41). Рассмотрим 2-мерное волновое уравнение в декартовых координатах ($X$, $Y$):

$$\Delta u + k^2 n^2 u = 0. \tag{5.1.44}$$

Считая двумерное пространство комплексной плоскостью $Z = X + iY$, выполним конформное преобразование $Z' = \ln(Z / r_E) + i\theta$, где $r_E$ – радиус Земли. Пользуясь законом преобразования оператора Лапласа [14], запишем это уравнение в новых координатах

$$\left|\frac{dZ'}{dZ}\right|^2 \Delta' u + k^2 n^2 u = \frac{1}{r^2}\Delta' u + k^2 n^2 u = 0, \tag{5.1.45}$$

которое можно переписать следующим образом:

$$\Delta' u + k^2 n^2 r^2 u = 0. \tag{5.1.46}$$

Поэтому координаты ($\ln(r / r_E)$, $\theta$) с точки зрения распространения волн и геометрической оптики можно рассматривать как декартовы, если заменить показатель преломления $n(r)$ на приведенный показатель преломления $n(r)r$, совпадающий с рефракционным радиусом $x(r)$. В этих координатах три условия (5.1.41) соответствуют типам распространения луча, выпущенного горизонтально: 1) луч искривляется вверх, 2) луч распространяется горизонтально, 3) луч искривляется вниз.

Вместо безразмерных координат ($\ln r$, $\theta$) рассмотрим координаты

$$r_E\left(\ln\left(r / r_E\right), \theta\right) \approx \left(r - r_E, r_E\theta\right). \tag{5.1.47}$$

Эти координаты реализуют приближение плоской Земли с приведенным показателем преломления $n(r)r / r_E$. Такие координаты часто используются в

задачах распространения радиоволн в тропосфере.

При радиозатменном зондировании точки перигея лучей на трассе космос–космос не могут оказаться внутри волновода, поскольку луч, выпущенный горизонтально внутри волновода, никогда не сможет покинуть волновод. У лучей, чьи точки перигея приближаются к верхней или нижней границе волновода, угол рефракции возрастает до бесконечности.

Разумеется, это рассмотрение носит формальный характер. В рамках теории дифракции ситуация будет иной. Например, невозможно рассматривать отдельные лучи. Узконаправленная волна, выпущенная на верхней границе волновода, будет рассеиваться, и плотность энергии на верхней границе волновода будет очень быстро убывать. Волновые моды, возбуждаемые внутри волновода, будут терять энергию, поскольку за счет эффектов дифракции она будет высвечиваться через границу волновода.

**Определение углов рефракции по измерениям фазы**

В радиозатменных экспериментах прямые измерения угла рефракции не проводятся, так как это сопряжено с техническими трудностями. Вместо этого измеряется доплеровская частота принимаемых радиосигналов. Если передатчик, например, на спутнике системы GPS излучает сигнал с частотой $\omega_T$, а приемник, установленный на низкоорбитальном спутнике, принимает сигнал с частотой $\omega_R$, то между ними имеется следующее соотношение:

$$\omega_R = \omega_T \left( 1 + \frac{\mathbf{V}_T \cdot \mathbf{u}_T - \mathbf{V}_R \cdot \mathbf{u}_R}{c} \right), \tag{5.1.48}$$

где $c$ – скорость света в вакууме, $\mathbf{V}_R$ и $\mathbf{V}_T$ – скорости низкоорбитального спутника и спутника системы GPS, $\mathbf{u}_R$ и $\mathbf{u}_T$ – направления луча у приемника и у передатчика. В [15] приводится более сложное соотношение для частоты $\omega_R$, вычисляемой в системе отсчета приемника, учитывающее релятивистские эффекты. Однако фактически приемник измеряет фазу как функцию времени, задаваемого в системе отсчета, связанной с Землей. Это позволяет вычислять доплеровский сдвиг частоты по классическим формулам.

Доплеровская частота, измеряемая в течение радиозахода, преобразуется в фазовую задержку (или набег оптического пути), определяемую следующим образом:

$$\Delta\Psi(t) = \frac{\lambda}{2\pi} \int_0^t \left( \omega_R^{(0)}(t') - \omega_R(t') \right) dt', \tag{5.1.49}$$

$$\omega_R^{(0)} = \omega_T \left( 1 + \frac{\mathbf{V}_T \cdot \mathbf{u}^{(0)} - \mathbf{V}_R \cdot \mathbf{u}^{(0)}}{c} \right), \tag{5.1.50}$$

где $\mathbf{u}^{(0)}$ – единичный вектор направления передатчик-приемник, $\omega_R^{(0)}(t)$ – вакуумная доплеровская частота, которая была бы измерена в отсутствие атмосферы. Таким образом, фазовая задержка $\Delta\Psi(t)$ целиком связана с эффектом атмосферы. Из фазовой задержки вычислим относительный доплеровский сдвиг частоты:

$$d = \frac{\omega_R - \omega_T}{\omega_T} = \frac{\omega_R^{(0)} - \dfrac{2\pi}{\lambda}\dfrac{d\Delta\Psi(t)}{dt}}{\omega_T} - 1 = d^{(0)} - \frac{1}{c}\frac{d\Delta\Psi(t)}{dt}, \qquad (5.1.51)$$

где $d^{(0)}$ – вакуумный относительный доплеровский сдвиг. Чтобы определить угол рефракции для сферически-слоистой атмосферы, можно пользоваться соотношениями (5.1.48) и (5.1.51), дополненными законом Снеллиуса в векторной форме:

$$\frac{\mathbf{V}_T \cdot \mathbf{u}_T - \mathbf{V}_R \cdot \mathbf{u}_R}{c} = d,$$
$$\mathbf{x}_R \times \mathbf{u}_R = \mathbf{x}_T \times \mathbf{u}_T, \qquad (5.1.52)$$

где $\mathbf{x}_R$ и $\mathbf{x}_T$ – координатные векторы спутников. Соотношений (5.1.52) вместе с условием, что $\mathbf{u}_R$ и $\mathbf{u}_T$ являются единичными векторами, достаточно для нахождения этих векторов по измеренной доплеровской частоте и баллистическим данным спутников. В этом случае угол рефракции ε определяется как угол между $\mathbf{u}_R$ и $\mathbf{u}_T$, а прицельный параметр $p$ равен $|\mathbf{x}_R \times \mathbf{u}_R|$, или $|\mathbf{x}_R \times \mathbf{u}_R|$, что эквивалентно.

Система GPS имеет две частоты (канал L1 – 1.57542 ГГц и канал L2 – 1.22763 ГГц), что позволяет существенно уменьшить вклад ионосферы в угол рефракции. Простейшая схема ионосферной коррекции основана на том, что в первом приближении ионосферное возмущение угла рефракции является линейным функционалом от ионосферного поля показателя преломления [15]. Тогда, как следует из результатов раздела 2.4, ионосферная компонента угла рефракции обратно пропорциональна квадрату частоты. Это позволяет записать нейтральный угол рефракции в виде линейной комбинации углов рефракции на частотах L1 и L2. Остаточная погрешность ионосферной коррекции, обусловленная мелкомасштабными ионосферными возмущениями и аппаратными шумами, является главным источником ошибок измерений на высотах более 10 км [16]. В нижней тропосфере эффект этих шумов оказывается пренебрежимо мал по сравнению с нейтрально-атмосферными вариациями углов рефракции.

Эта методика определения угла рефракции по измерениям доплеровской частоты имеет два ограничения.

Во-первых, поскольку реальная атмосфера не является сферически-слоистой, определение угла рефракции и прицельного параметра по этим формулам будет приводить к ошибкам [17, 18]. Следует также отметить, что в этом случае прицельный параметр не является инвариантом луча, как следует из (5.1.30). Например, если в атмосфере имеется возмущение типа атмосферного фронта с перепадом температуры 10 К и относительного влагосодержания 3 г/кг на расстоянии 100 км, то это примерно соответствует перепаду показателя преломления $\Delta n = 30\times10^{-6} = 30$ ppm. Тогда, исходя из динамического уравнения (5.1.30), вариация $p$ оценивается как $\Delta p \approx a\,\Delta n = 200$ м, где $a = 6371$ км – радиус Земли. Если нужно восстанавливать высоты изобарических поверхностей с точностью не хуже 10 м, то примерно с такой же точностью необходимо определять и прицельный параметр. Характерные вариации прицельно-

го параметра в средних широтах составляют около 10 м, тогда как в тропиках эта величина достигает 100–200 м. Это означает, что точность приближения сферической симметрии в нижней тропосфере недостаточна.

Ниже мы обсудим, каким образом можно обойти эту трудность в рамках подхода, основанного на 3- или 4-мерном прямом усвоении рефрактометрических данных в модели глобальной циркуляции атмосферы.

Второе ограничение связано с многолучевым распространением радиоволн. Формула (5.1.48) применима только для случая однолучевого распространения. В случае же интерференции нескольких лучей фаза принимаемого поля определяется фазами и амплитудами всех лучей, и доплеровская частота не может быть использована напрямую для определения угла рефракции и прицельного параметра из соотношений (5.1.52).

Многолучевое распространение является типовой ситуацией для нижней тропосферы. С другой стороны, данные по нижней тропосфере очень существенны для численного прогноза погоды. Это показывает важность разработки методов определения лучевой структуры волнового поля, измеренного в многолучевой зоне. В следующей главе мы рассмотрим различные подходы к этой задаче.

**Амплитуда радиозатменных сигналов**

Амплитуда измеряемого поля играет существенную роль в интерпретации радиозатменных данных. В частности, в предположении однолучевого распространения и отсутствия поглощения, по измерениям амплитуды можно определить угол рефракции и восстановить вертикальный профиль показателя преломления [9–12]. Пользуясь связью между амплитудой и углом рефракции, можно по фазовым и амплитудным измерениям определять интегральное поглощение. Измерения амплитуды также необходимы для интерпретации радиозатменных данных при помощи алгоритмов, основанных на волновой оптике. Ниже приведем вывод выражения для амплитуды радиозатменных сигналов в геометрооптическом приближении [10, 12, 13].

Пусть в некоторый момент времени задано взаимное положение источника и приемника, определяемое радиальными координатами спутников $r_T$, $r_R$ и их угловым разнесением $\theta$ (рис. 15). Амплитуда определяется из закона сохранения энергии. Будем параллельно рассматривать задачу в двух и трех измерениях (2-мерные формулы используются для сравнения с результатами моделирования волновой задачи методом фазовых экранов, которое также проводится в 2-мерном пространстве). Энергия, излучаемая передатчиком с всенаправленной антенной в бесконечно малом конусе, задается следующим выражением:

$$dE_T = \frac{P}{2\pi} d\psi_T \left\{ \frac{1}{2} \sin\psi_T d\phi \right\}_{3D}, \qquad (5.1.53)$$

где $P$ – полная мощность излучения, $\psi_T$ – угол между направлением луча и направлением Тх–О у передающего спутника, $\phi$ – угол вращения вокруг линии Тх–О. Множитель в фигурных скобках относится к 3-мерному случаю. В общем случае атмосферы с горизонтальными градиентами прицельный параметр меняется вдоль луча, и нужно использовать различные прицельные

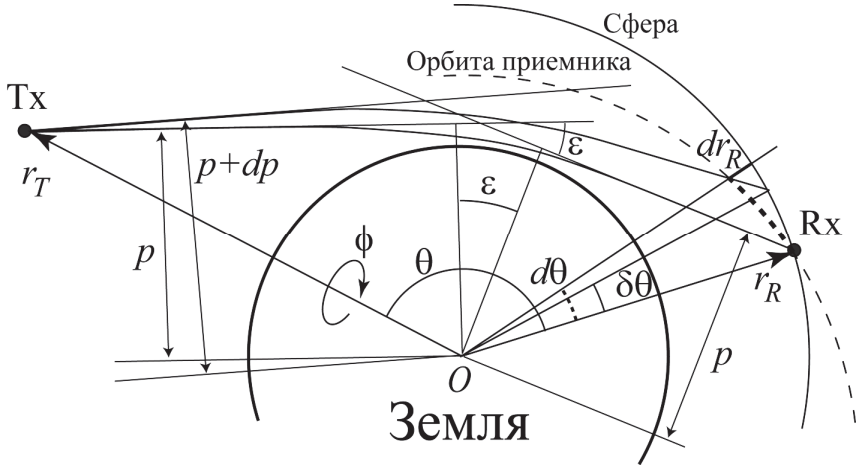



**Рис. 15.** Геометрия лучевой трубки к вычислению амплитуды радиозатменных сигналов

параметры: у передатчика $p_T$, у приемника $p_R$, и эффективный прицельный параметр $p$, определяемый из доплеровской частоты на основании уравнения (5.1.52). Прицельный параметр $p_T$ равен $r_T \sin\psi_T$. Отсюда получаем

$$dp_T = r_T \cos\psi_T d\psi_T = \sqrt{r_T^2 - p_T^2}\, d\psi_T. \tag{5.1.54}$$

Поэтому для распределения энергии по прицельным параметрам мы получаем выражение

$$dE_T = \frac{P}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{r_T^2 - p_T^2}} \left\{ \frac{1}{2} \frac{p_T}{r_T} d\phi \right\}_{3D} \frac{dp_T}{dp} dp. \tag{5.1.55}$$

Рассмотрим приемную апертуру в виде бесконечно малого элемента сферы с центром в центре Земли. Принимаемая энергия равна $A_0^2 \cos\psi_R dS$, где $A_0$ – рефракционная амплитуда (вычисляемая в предположении отсутствия поглощения), $\psi_R$ – угол между лучевой трубкой и нормалью к приемной апертуре, $dS$ – площадь апертуры:

$$\begin{aligned} dE_R &= A_0^2 \cos\psi_R r_R \left\{ \frac{1}{2} r_R \sin\theta d\phi \right\}_{3D} \delta\theta = \\ &= A_0^2 \sqrt{r_R^2 - p_R^2} \left\{ \frac{1}{2} r_R \sin\theta d\phi \right\}_{3D} \delta\theta. \end{aligned} \tag{5.1.56}$$

Символ δ означает частный дифференциал вдоль сферы, вычисляемый при фиксированных $r_R$, $r_T$. Приравнивая излученную и принятую энергию, получаем выражение для амплитуды

$$A_0^2 = \frac{P}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{r_R^2 - p_R^2}\sqrt{r_T^2 - p_T^2}} \left\{ \frac{p_T}{r_T r_R \sin\theta} \right\}_{3D} \left( \frac{\delta\theta}{dp_T} \right)^{-1}. \tag{5.1.57}$$

Для сферически-слоистой атмосферы $p_T \equiv p_R \equiv p$, и можно записать

$$A_0^2 = \frac{P}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{r_R^2 - p^2}\sqrt{r_T^2 - p^2}} \left\{ \frac{p}{r_T r_R \sin\theta} \right\}_{3D} \left( \frac{\delta\theta}{dp} \right)^{-1}. \qquad (5.1.58)$$

Для вычисления производной размера виртуальной апертуры по прицельному параметру $\delta\theta / dp$ воспользуемся следующим геометрическим соотношением:

$$\theta = \varepsilon(p) + \arccos\frac{p}{r_T} + \arccos\frac{p}{r_R}. \qquad (5.1.59)$$

Угловой размер апертуры $\delta\theta$ вычисляется как частная вариация при постоянных $r_G$ and $r_L$:

$$\delta\theta = \frac{\partial\theta}{\partial p} dp = \left( \frac{d\varepsilon(p)}{dp} - \frac{1}{\sqrt{r_T^2 - p^2}} - \frac{1}{\sqrt{r_R^2 - p^2}} \right) dp. \qquad (5.1.60)$$

Это приводит к известному выражению для амплитуды [10, 13]:

$$\begin{aligned} A_0^2 &= \frac{P}{2\pi} \left\{ \frac{p}{r_T r_R \sin\theta} \right\}_{3D} \frac{1}{D_T D_R \dfrac{d\varepsilon(p)}{dp} - D_R - D_T} = \\ &= \frac{P}{2\pi} \left\{ \frac{p}{r_T r_R \sin\theta} \right\}_{3D} \frac{1}{\left(D_R + D_T\right)\left( D\dfrac{d\varepsilon(p)}{dp} - 1 \right)}, \end{aligned} \qquad (5.1.61)$$

где $D_{T,R} = \sqrt{r_{T,R}^2 - p^2}$ и $D = \left( D_R^{-1} + D_T^{-1} \right)^{-1}$. При многолучевом распространении множитель $D\dfrac{d\varepsilon(p)}{dp} - 1$ может обращаться в 0 и становиться отрицательным. Это соответствует тому, что на каустиках геометрооптическая амплитуда бесконечна, а для лучей, касающихся каустик, мнимая амплитуда эквивалентна фазовой добавке $\pm\pi / 2$. Как мы видели в разделе 4.2, применение асимптотических методов позволяет избавиться от бесконечности в амплитуде.

**Определение углов рефракции по измерениям амплитуды**

Выражение (5.1.61) для амплитуды включает производную $\dfrac{d\varepsilon}{dp}$. Однако из амплитуды нельзя непосредственно определить эту производную, поскольку в эту формулу входит также прицельный параметр, который сам должен быть определен для заданных положений передатчика и приемника. Мы воспользуемся выражением (5.1.58) для амплитуды и геометрическим соотношением (5.1.59). Можно записать

$$\delta\theta = \frac{\partial\theta}{\partial p}dp = d\theta - \frac{\partial\theta}{\partial r_T}dr_T - \frac{\partial\theta}{\partial r_R}dr_R = d\theta\left(1 - \frac{dr_T}{d\theta}\frac{p}{r_T D_T} - \frac{dr_R}{d\theta}\frac{p}{r_R D_R}\right), \quad (5.1.62)$$

где $d\theta$, $dr_G$ и $dr_L$ – полные дифференциалы вдоль траектории спутников. Из выражения (5.1.58) получаем

$$\frac{dp}{\delta\theta} = D_T D_R \left\{\frac{r_T r_R \sin\theta}{p}\right\}_{3D} \frac{A_0^2}{P/2\pi}. \quad (5.1.63)$$

С учетом (5.1.62) получаем следующее дифференциальное уравнение [11]:

$$\frac{dp}{d\theta} = \left(1 - \frac{dr_T}{d\theta}\frac{p}{r_T D_T} - \frac{dr_R}{d\theta}\frac{p}{r_R D_R}\right) D_T D_R \left\{\frac{r_T r_R \sin\theta}{p}\right\}_{3D} \frac{A_0^2}{P/2\pi}. \quad (5.1.64)$$

Поскольку угловое разнесение спутников $\theta$ взаимно-однозначно связано с временем $t$, орбитальные данные спутников $r_L$ , $r_G$ и измеряемая амплитуда сигнала $A_0$ могут быть выражены как функции от $\theta$. Поэтому правая часть в (5.1.64) является известной функцией от $p$ и $\theta$, и это уравнение может быть численно проинтегрировано. Нормировочный множитель амплитуды $P / 2\pi$ может быть определен по измерениям амплитуды на высотах более 60 км, где влияние рефракции несущественно. Начальное условие для прицельного параметра также должно быть задано на достаточно большой высоте и может быть определено, например, по фазовым измерениям [11]. Пользуясь полученной зависимостью $p(\theta)$ и соотношением (5.1.59), можно определить углы рефракции $\varepsilon(p(\theta))$.

**Определение фазы и амплитуды по профилю угла рефракции**

В условиях однолучевого распространения профиль угла рефракции позволяет вычислить фазовую задержку $\Delta s(t)$ и амплитуду $A(t)$. Для вычисления фазовой задержки необходимо найти момент времени $t$, когда наблюдается луч с заданным прицельным параметром $p$ и углом рефракции $\varepsilon$. Для этого следует численно решить уравнение

$$\theta(t) = \varepsilon + \arccos\frac{p}{r_T(t)} + \arccos\frac{p}{r_R(t)}, \quad (5.1.65)$$

где $\theta(t)$ – угловое разнесение спутников, а $r_{T,R}(t)$ – расстояния от центра Земли (или локального центра кривизны сечения эллипсоида плоскостью радиозахода) до спутников. Далее по прицельному параметру $p$ и координатам спутников $\mathbf{x}_{T,R}(t)$ мы находим единичные векторы направлений луча $\mathbf{u}_{T,R}(t)$, из которых определяем доплеровский сдвиг, пользуясь формулой (5.1.52). Интегрируя доплеровский сдвиг по времени, определим фазовую задержку. Амплитуду мы определим по формуле (5.1.61).

Такая модель вычисления радиозатменного сигнала имеет ограниченное применение. Она удобна для применения совместно с гладкой климатологической моделью атмосферы, в которой не возникает многолучевого рас-

пространения. В этом случае, пользуясь геометрооптической моделью, удобно вычислять опорный сигнал, применяемый в радиоголографических методах, которые будем обсуждать ниже.

**Определение поглощения по измерениям амплитуды и фазы**

Небольшое поглощение (до 1 дБ) может быть замечено в радиозатменных данных на частотах GPS. Однако, как мы видели в разделе 2.3, на более высоких частотах (9–30 ГГц) поглощение становится существенным. Поглощение является функцией от метеопараметров и частоты, описываемой моделью распространения микроволн, и оно может быть использовано для формулировки обратной задачи восстановления метеопараметров. Поглощение можно определять, пользуясь измерениями амплитуды и фазы. Измерения поглощения в трех частотных каналах (например, 9.6, 17.25 и 22.6 ГГц) в принципе (т.е. при достаточно высокой точности измерения амплитуды) позволяют восстанавливать профили давления, температуры и влажности без априорной информации. Разрабатывался проект запуска системы низкоорбитальных спутников, оснащенных передатчиками и приемниками радиосигналов на указанных частотах [19].

Для описания поглощения вводится мнимая часть показателя преломления $N_I$. Интегральное поглощение вдоль луча равно $\tau = k\int N_I ds$. Измеряемая амплитуда при этом равна $A = A_0 \kappa \equiv A_0 \exp(-\tau)$. Здесь $\kappa$ – амплитуда, нормиро-

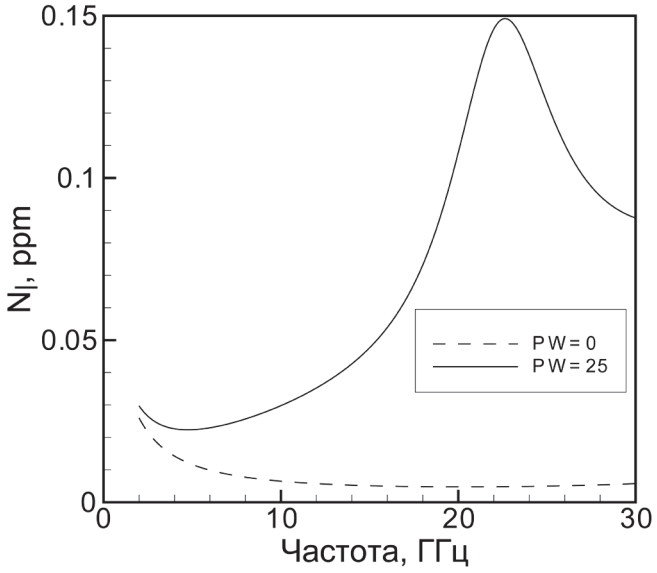



**Рис. 16.** Примеры зависимости мнимой части показателя преломления от частоты для давления 1000 гПа и температуры 300 К: 1 – пунктирная линия – для сухой атмосферы, 2 – сплошная линия – при парциальном давлении водяного пара 25 гПа

ванная на вычисленную выше рефракционную амплитуду без учета поглощения $A_0$. Пользуясь фазовыми измерениями, можно определить прицельные параметры и углы рефракции и, значит, найти $A_0$. Пользуясь измеренной амплитудой $A$, можно определить интегральное поглощение $\tau = -\ln\left(\frac{A}{A_0}\right) = -\ln\kappa$.

На рис. 16 показаны примеры зависимости мнимой части показателя преломления от частоты для сухой и влажной атмосферы. Водяной пар имеет линию поглощения с центром около 22.6 ГГц. Набор частот 9.6, 17.25 и 22.6 ГГц позволяет хорошо выделять влажную составляющую показателя преломления. Во влажной атмосфере (в тропиках) поглощение на 22.6 ГГц будет достаточно сильным, чтобы восстанавливать влажность до высот 15–20 км. При этом ниже 5 км сигнал на этой частоте практически пропадает, и в алгоритмах восстановления используются только два оставшихся канала.

Ошибка определения интегрального поглощения равна следующему выражению:

$$\frac{\delta\tau}{\tau} = \frac{\delta\kappa}{\tau\kappa} = \frac{\delta A}{A_0}\frac{\exp\tau}{\tau}. \tag{5.1.66}$$

Функция возрастает как при $\tau \to 0$, так и при $\tau \to \infty$. Это соответствует тому, что малое поглощение незаметно на фоне ошибок измерения амплитуды, а при большом поглощении сама амплитуда становится малой и падает точность ее определения.

Получим явное выражение для интегрального поглощения в сферически-слоистой среде. Элемент длины луча может быть записан в следующей форме:

$$\begin{aligned} ds &= \left(dr^2 + r^2 d\theta^2\right)^{1/2} = \left(1 + r^2\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2\right)^{1/2} dr = \\ &= \left(1 + \frac{p^2}{n^2 r^2 - p^2}\right)^{1/2} dr = \frac{nr}{\sqrt{n^2 r^2 - p^2}} dr = \frac{x}{\sqrt{x^2 - p^2}}\frac{dr}{dx}dx. \end{aligned} \tag{5.1.67}$$

Предполагаем, что в каждый момент времени наблюдается не более одного луча. Поэтому измеряемая амплитуда и интегральное поглощение будут функциями прицельного параметра. Интегральное поглощение можно записать в следующей форме:

$$\tau(p) = 2\int_p^\infty k n_I(x)\frac{x}{\sqrt{x^2 - p^2}}\frac{dr}{dx}dx. \tag{5.1.68}$$

**Приближение вертикальной геометрии и неподвижного источника**

На основе методов геометрической оптики мы введем важное приближение, которое существенно упрощает прямое моделирование радиозатменных экспериментов. Модель радиозатменных экспериментов должна описывать

эффекты многолучевого распространения. Простейший способ такого моделирования в рамках геометрической оптики заключается в том, что вычисляемой величиной является профиль угла рефракции ε(*p*). Метод моделирования основан на вычислении веера лучей в вертикальной плоскости с фиксированным источником и с использованием двумерного приближения. Чтобы результаты моделирования можно было сопоставлять с реальными наблюдениями, необходимо выбирать такую вертикальную геометрию максимально близкой к фактической геометрии наблюдений. Для этого мы вводим преобразование геометрии радиозахода к вертикальной со стационарным источником.

Введем локальную систему координат. Для этого оценим положение проекций точек перигея радиолучей на поверхность Земли. Поскольку углы рефракции в атмосфере Земли достаточно малы, это можно делать, пренебрегая рефракцией. В этом приближении точка радиозахода $\mathbf{r}_{\text{occ}} = (x_1, x_2, x_3)$ оценивается как проекция на поверхность Земли точки перигея самой нижней прямой, соединяющей спутник GPS и низкоорбитальный спутник во время радиозахода.

Обозначим через $\mathbf{r}_T(t_i)$ и $\mathbf{r}_R(t_i)$ координаты спутников в моменты времени $t_i$, $i = 1...N$ во время радиозахода. Азимутальный угол плоскости радиозахода θ оценим как угол между векторами $\left[\mathbf{r}_T(t_N), \mathbf{r}_R(t_N)\right]$ и $\left[\mathbf{a}_P, \mathbf{r}_{\text{occ}}\right]$, где $\mathbf{a}_p$ – полярная ось.

Теперь определим положение центра кривизны сечения стандартного эллипсоида плоскостью радиозахода. Пользуясь формулой Эйлера [20], нормальная секционная кривизна $k$ может быть записана в виде

$$k = k_m \cos^2\theta + k_p \sin^2\theta, \tag{5.1.69}$$

где $k_m$ – меридиональная кривизна, а $k_p$ – параллельная кривизна, которые могут быть вычислены следующим образом:

$$\begin{aligned} k_m &= \frac{R_p R_e^4}{\left(R_e^4 + \left(R_p^2 - R_e^2\right)\left(x_1^2 + x_2^2\right)\right)^{3/2}}, \\ k_p &= \frac{\cos\varphi}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \end{aligned} \tag{5.1.70}$$

где φ – геодезическая широта точки радиозахода. Для вычисления $k_p$ мы применили теорему Менье (Meusnier) [20]. Центр локальной кривизны может быть найден следующим образом:

$$\mathbf{r}_{\text{LC}} = \mathbf{r}_{\text{occ}} - \frac{\mathbf{v}\left(\mathbf{r}_{\text{occ}}\right)}{k}, \tag{5.1.71}$$

где $\mathbf{v}(\mathbf{r}_{\text{occ}}) = (\cos\varphi \sin\lambda, \cos\varphi \cos\lambda, \sin\varphi)$ – локальная вертикаль, λ – геодезическая долгота точки радиозахода.

Для заданных траекторий спутников $\mathbf{r}_T(t)$ и $\mathbf{r}_R(t)$ введем движущийся ортонормированный базис $\mathbf{a}^x(t)$, $\mathbf{a}^y(t)$, определяющий координаты $x$, $y$ в плоскостях $\mathbf{r}_T(t) - \mathbf{r}_{LC} - \mathbf{r}_R(t)$. Базисные векторы определяются требованием, чтобы

$y$-координата спутника GPS была всегда равна локальному радиусу кривизны $r_E = \dfrac{1}{k}$. Введем вспомогательный ортонормированный базис так, чтобы один из базисных векторов был направлен на источник:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_T(t) &= \frac{\mathbf{r}_T(t)}{\left|\mathbf{r}_T(t)\right|},\\ \mathbf{v}_R(t) &= \frac{\mathbf{r}_R(t) - \mathbf{v}_T(t)\left(\mathbf{v}_T(t)\cdot\mathbf{r}_R(t)\right)}{\left|\mathbf{r}_R(t) - \mathbf{v}_T(t)\left(\mathbf{v}_T(t)\cdot\mathbf{r}_R(t)\right)\right|},\end{aligned} \tag{5.1.72}$$

и, повернув его на угол

$$\alpha = \cos^{-1}\frac{r_E}{\left|\mathbf{r}_T(t)\right|}, \tag{5.1.73}$$

получим искомый базис:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}^x(t) &= -\sin\alpha\,\mathbf{v}_T(t) + \cos\alpha\,\mathbf{v}_R(t),\\ \mathbf{a}^y(t) &= \cos\alpha\,\mathbf{v}_T(t) + \sin\alpha\,\mathbf{v}_R(t).\end{aligned} \tag{5.1.74}$$

Вычислим координаты спутников во введенном движущемся базисе:

$$\begin{aligned}x_T(t) &= \mathbf{a}^x(t)\left(\mathbf{r}_T(t) - \mathbf{r}_{LC}\right),\\ y_T(t) &= \mathbf{a}^y(t)\left(\mathbf{r}_T(t) - \mathbf{r}_{LC}\right),\\ x_R(t) &= \mathbf{a}^x(t)\left(\mathbf{r}_R(t) - \mathbf{r}_{LC}\right),\\ y_R(t) &= \mathbf{a}^y(t)\left(\mathbf{r}_R(t) - \mathbf{r}_{LC}\right).\end{aligned} \tag{5.1.75}$$

Зафиксируем базисные векторы, взятые для самой нижней точки радиозахода, а координаты спутников отнесем к соответствующей фиксированной вертикальной плоскости. Такое преобразование координат означает, что мы считаем горизонталью касательную к поверхности Земли, проведенную со спутника GPS, и пренебрегаем вращением этой конфигурации по отношению к Земле во время радиозахода. Кроме того, относительное движение низкоорбитального спутника проецируется в фиксированную вертикальную плоскость.

После описанного преобразования координат $y_T(t)$ всегда равна $r_E$. Остающееся медленное движение спутника GPS совершается вдоль $x$-координаты. Чтобы полностью стационаризовать спутник GPS, применяем второе преобразование координат.

Вводя прицельные углы $\varepsilon_T$ и $\varepsilon_R$, определяемые как углы между лучом и прямой линией, соединяющей спутники, можем приближенно записать закон Снеллиуса:

$$\varepsilon_T x_T = \varepsilon_R x_R = p - p_0, \tag{5.1.76}$$

где $p$ – прицельное расстояние луча относительно локального центра кривизны, $p_0$ – прицельное расстояние прямой, соединяющей спутники (рис. 17), имеем соотношение для угла рефракции $\varepsilon = \varepsilon_T + \varepsilon_R$:

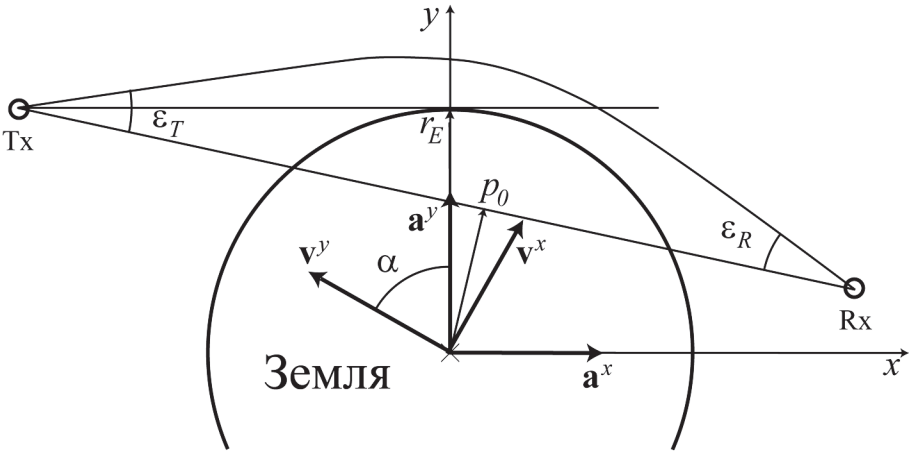



**Рис. 17.** Геометрия стационаризации спутника GPS

$$p - p_0 = \frac{x_T x_R}{x_T + x_R}\varepsilon. \tag{5.1.77}$$

Поэтому, если мы изменим координаты спутников таким образом, что $\frac{x_T x_R}{x_T + x_R} = \text{const}$, то угол рефракции и прицельный параметр не изменятся. Если зафиксировать положение спутника GPS в самой нижней точке радиозахода, то придем к следующему преобразованию координат:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{x_T(t)\,x_R(t)}{x_T(t) + x_R(t)}, \\ x'_T &= x_T(t_N), \\ x'_R(t) &= \frac{f(t)\,x'_T}{x'_T - f(t)}. \end{aligned} \tag{5.1.78}$$

Таким образом, преобразованные координаты спутников окончательно могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'_T &= x'_T \mathbf{a}^{\mathbf{x}}(t_N) + y'_T \mathbf{a}^{\mathbf{y}}(t_N), \\ \mathbf{x}'_R(t) &= x'_R(t)\,\mathbf{a}^{\mathbf{x}}(t_N) + y'_R(t)\,\mathbf{a}^{\mathbf{y}}(t_N). \end{aligned} \tag{5.1.79}$$

Геометрооптическое моделирование осуществляется следующим образом. Выполняется численное интегрирование уравнений лучей (5.1.3) с фиксированной начальной точкой и с разными направлениями. Интегрирование проводится до пересечения луча с траекторией приемника. Для каждого луча вычисляются угол рефракции и прицельный параметр на основе формул (5.1.52).

Описанное преобразование геометрии будет особенно полезным в дифракционном моделировании радиозатменных экспериментов.

**Моделирование поля показателя преломления в атмосфере**

В численном моделировании радиозатменных экспериментов нам потребуется модель трехмерного поля показателя и его производных. В частности, для решения дифракционной задачи на основе скалярного волнового уравнения требуется поле показателя преломления $n(\mathbf{x})$, а для решения геометрооптических уравнений лучей – также градиент показателя преломления $\nabla n(\mathbf{x})$. При разработке же линеаризованной геометрооптической модели, которая необходима для прямого вариационного усвоения радиозатменных данных, потребуется также матрица вторых производных $\nabla \otimes \nabla n(\mathbf{x})$ (гессиан). Понятие вариационного усвоения будет рассмотрено в разделе 5.3.

При моделировании будем пользоваться глобальными полями метеопараметров из анализов ECMWF. Поскольку метеопараметры в модели ECMWF представлены в виде сеточных полей на модельных сетках, необходимо разработать процедуру интерполяции этих данных в произвольную пространственную точку. Следует также отметить, что мы будем моделировать только нейтральную компоненту показателя преломления.

В моделях глобальной циркуляции ECHAM3, ECHAM4 и аналогичной им модели, используемой в ECMWF [21], используются поля температуры $T_{ijk}$, удельной влажности $q_{ijk}$ и давления на поверхности Земли $P_{s,\,jk}$, заданные на прямоугольной сетке широт и долгот $\{\varphi_j, \lambda_k\}$. Эти данные определяют сетку геопотенциальных уровней $\phi_{ijk}$ следующим образом.

Вводятся полуцелые модельные уровни, давление на которых определяется давлением на поверхности по следующим формулам:

$$P_{i+\frac{1}{2},jk} = A_{i+\frac{1}{2}} + B_{i+\frac{1}{2}} P_{s,jk}, \tag{5.1.80}$$

где $A_{i+\frac{1}{2}}$ и $B_{i+\frac{1}{2}}$ – стандартные наборы коэффициентов (вертикальные координаты). Нумерация уровней идет сверху вниз. Для этих уровней геопотенциальные высоты определяются из уравнения статики:

$$\begin{aligned} \phi_{i+\frac{1}{2},jk} - \phi_{i-\frac{1}{2},jk} &= -R_d T_{\mathrm{v},ijk} \ln\left( \frac{P_{i+\frac{1}{2},jk}}{P_{i-\frac{1}{2},jk}} \right), \\ \phi_{i_{\max}+\frac{1}{2},jk} &= \phi_{s,jk}, \end{aligned} \tag{5.1.81}$$

где $R_d$ – газовая постоянная для сухого воздуха, $\phi_{s,\,jk}$ – геопотенциал на поверхности Земли (орография), задающий начальные условия для уравнения статики, $T_{\mathrm{v},\,ijk}$ – виртуальные температуры на целых уровнях, определяемые как

$$T_{\mathrm{v},ijk} = T_{ijk}\left(1 + \left(\frac{R_d}{R_\mathrm{v}} - 1\right) q_{ijk}\right), \tag{5.1.82}$$

где $R_\mathrm{v}$ – газовая постоянная для водяного пара. Целые геопотенциальные уровни определяются соотношениями

$$P_{ijk} = \frac{1}{2}\left( P_{i-\frac{1}{2},jk} + P_{i+\frac{1}{2},jk} \right),$$
$$\phi_{ijk} = \phi_{i+\frac{1}{2},jk} + \alpha_{ijk} R_d T_{\nu,ijk}, \tag{5.1.83}$$

где коэффициенты $\alpha_{ijk}$ определяются следующим образом:

$$\alpha_{ijk} = \begin{cases} \ln 2, & i = 1 \\ 1 - \dfrac{P_{i-\frac{1}{2},jk}}{P_{i+\frac{1}{2},jk} - P_{i-\frac{1}{2},jk}} \ln\left( \dfrac{P_{i+\frac{1}{2},jk}}{P_{i-\frac{1}{2},jk}} \right), & i > 1 \end{cases} \tag{5.1.84}$$

Пользуясь формулой для парциального давления водяного пара

$$P_{w,ijk} = \frac{q_{ijk} P_{ijk}}{\dfrac{R_d}{R_\nu} + \left(1 - \dfrac{R_d}{R_\nu}\right) q_{ijk}}, \tag{5.1.85}$$

можно определить сеточное поле показателя преломления $n_{ijk}$:

$$n_{ijk} = 1 + c_1 \frac{P_{ijk}}{T_{ijk}} + c_2 \frac{P_{w,ijk}}{T_{ijk}^2}. \tag{5.1.86}$$

Данные анализов ECMWF даны до высоты около 28 км. Однако точное вычисление углов рефракции требует наличия полей показателя преломления до высоты около 100 км. Поэтому мы дополняем сетку геопотенциальных уровней и сеточное поле показателя преломления, пользуясь климатологической моделью MSIS-90 [22]. Для этого задаем логарифмическую сетку полуцелых уровней давления от 20 гПа (первый ненулевой уровень давления данных ECMWF) до $10^{-5}$ гПа с отношением соседних уровней $10^{1/3}$, вводя целые уровни и вычисляя температуры на них, мы определяем геопотенциальные высоты, пользуясь уравнением статики так же, как это делалось выше. Из сеточных полей температуры и давления MSIS определяем поле показателя преломления.

В переходной области ECHAM–ECMWF уравнение статики, вообще говоря, нарушается. Чтобы восстановить уравнение статики, домножаем показатель преломления MSIS на корректирующий коэффициент. Поскольку для сухой атмосферы показатель преломления пропорционален плотности, это эквивалентно умножению вертикального профиля давления MSIS на константу с сохранением вертикального профиля температуры.

Полученное сеточное поле геопотенциальных высот преобразуем в поле геометрических координат в системе центра Земли. При этом используем модель стандартного эллипсоида с полуосями $R_e$ = 6378.1363 км и $R_p$ = 6356.7516 км, соответствующую модель гравитационного поля и приближенные формулы для вычисления геометрических высот из геопотенциальных [23–25].

Так, гравитационное поле на геоцентрической широте φ на высоте $z$ над стандартным эллипсоидом вычисляется по приближенной формуле

$$g = g_s \frac{R_0^2}{\left(R_0 + z\right)^2}, \tag{5.1.87}$$

где $g_s$ – гравитационное поле на поверхности:

$$g_s = g_e \left(1 + f_2 \sin^2 \varphi - f_4 \frac{\sin^2(2\varphi)}{4}\right), \tag{5.1.88}$$

$R_0$ – эффективный радиус:

$$R_0 = \frac{g_s}{g_e} \frac{R_e}{\left(1 + f + m + \left(-3f + \frac{5}{2}m\right)\sin^2 \varphi\right)}, \tag{5.1.89}$$

$g_e$ – гравитационное поле на экваторе:

$$g_e = \frac{GM}{10^6 R_e^2 \left(1 - f + \frac{3}{2}m - \frac{15}{14}mf\right)}, \tag{5.1.90}$$

$f = \frac{R_e - R_p}{R_e}$ – сплюснутость стандартного эллипсоида,

$GM = 3.9860044 \times 10^{14} \frac{\text{м}^3}{\text{с}^2}$ – гравитационная постоянная Земли, $m = 0.00345$ – отношение центробежной силы к силе тяжести на экваторе, $f_2 = -f + \frac{5}{2}m - \frac{17}{14}fm + \frac{15}{14}m^2$, $f_4 = -\frac{f^2}{2} + \frac{5}{2}fm$.

Высота $z$ над стандартным эллипсоидом вычисляется из геопотенциальной высоты $\phi$ по приближенной формуле

$$z = \frac{R_0 \phi}{g_s R_0 - \phi}. \tag{5.1.91}$$

Для повышения точности использовалась также модель геоида EGM-96 [26, 27]. При этом отклонение геоида от стандартного эллипсоида включалось в определение геопотенциала на поверхности $\phi_{s,jk}$.

Таким образом, вычисляем сеточное поле показателя преломления $n_{ijk}$ и сетки геодезических координат: высоты $z_{ijk}$, широты $\varphi_j$ и долготы $\lambda_k$. Сетка высот зависит от широты и долготы. Для произвольной заданной пространственной точки $(z, \varphi, \lambda)$ используем следующую схему интерполяции.

Пусть заданная точка проектируется в ячейку $(\varphi_J ... \varphi_{J+1}, \lambda_K ... \lambda_{K+1})$ широтно-долготной прямоугольной сетки. Тогда для четырех углов этой ячейки сначала производится сплайн интерполяция функции $\ln(n - 1) \equiv \ln N$ по $x$-координате и вычисляются четыре интерполированных значения $\ln N_{jk}(z)$, производные $\frac{\partial \ln N_{jk}(z)}{\partial z}$ и $\frac{\partial^2 \ln N_{jk}(z)}{\partial z^2}$ для индексов $j = J...J+1$ и $k = K...K+1$, которые затем линейно интерполируются по широте и долготе. При

этом горизонтальной компонентой градиента показателя преломления мы пренебрегаем. Таким образом, у градиента и гессиана вычисляется лишь по одной ненулевой компоненте:

$$\frac{\partial n}{\partial z} = N\frac{\partial \ln N}{\partial z},$$
$$\frac{\partial^2 n}{\partial z^2} = N\left(\frac{\partial^2 \ln N}{\partial z^2} + \left(\frac{\partial \ln N}{\partial z}\right)^2\right). \qquad (5.1.92)$$

Возможность пренебрежения горизонтальной компонентой градиента основана на том, что для счета лучей более существенна вертикальная компонента. Наиболее значительный вклад в угол рефракции вносится отрезком луча в окрестности точки перигея, где луч почти горизонтален, и продольная компонента $\nabla n$, которая в любом случае существенно меньше вертикальной, почти не влияет на распространение луча. Поперечная компонента приводит к боковым возмущениям луча, которые составляют не более чем десятки метров при длине трассы распространения в тысячи километров и которыми поэтому можно также пренебречь.

Возможна, однако, и более сложная схема горизонтальной интерполяции, учитывающая горизонтальную компоненту градиента показателя преломления. Можно использовать 4×4 = 16 точек широтно-долготной сетки для индексов $j = J - 1...J + 2$, $k = K - 1...K + 2$ и строить полиномиальную интерполяцию по широтам и долготам.

Двумерная интерполяция на прямоугольной сетке может быть представлена как прямое произведение двух одномерных интерполяций по долготе и широте. В этом случае интерполированное значение функции может быть записано в виде

$$f(\varphi,\lambda) = \sum_{j,k} w_j^{\varphi}(\varphi) w_k^{\lambda}(\lambda) f_{jk}, \qquad (5.1.93)$$

где $f_{jk}$ – сеточные значения функции, $w_j^{\varphi}(\varphi)$ и $w_k^{\lambda}(\lambda)$ – весовые функции для одномерной интерполяции по широте и долготе. Производные интерполированной функции вычисляются по формуле:

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial\varphi^{\alpha}\partial\lambda^{\beta}} f(\varphi,\lambda) = \sum_{j,k} \frac{\partial^{\alpha}}{\partial\varphi^{\alpha}} w_j^{\varphi}(\varphi) \frac{\partial^{\beta}}{\partial\lambda^{\beta}} w_k^{\lambda}(\lambda) f_{jk}, \qquad (5.1.94)$$

при условии, что весовые функции обладают соответствующей гладкостью.

Опишем одномерную кусочно-полиномиальную интерполяцию с непрерывными первыми производными. Для заданного интервала индексов $j = J - 1...J + 2$ будем строить кубический полином в интервале $\varphi_J...\varphi_{J+1}$, с заданными значениями $f_j$, $f_{J+1}$ и производными $d_J$, $d_{J+1}$ на краях интервала. При этом производные в узлах сетки определим конечно-разностным отношением

$$d_j = \frac{1}{2}\left(\frac{f_{j+1} - f_j}{\varphi_{j+1} - \varphi_j} + \frac{f_j - f_{j-1}}{\varphi_j - \varphi_{j-1}}\right). \qquad (5.1.95)$$

В этом случае соответствующие четыре весовые функции будут выражаться формулами

$$w_1^{\varphi}=\frac{(\varphi-\varphi_2)(\varphi-\varphi_3)^2}{2(\varphi_1-\varphi_2)(\varphi_2-\varphi_3)^2},$$

$$w_2^{\varphi}=\frac{(\varphi-\varphi_3)}{(\varphi_2-\varphi_3)^3}\Big((3\varphi_2-\varphi_3-2\varphi)(\varphi-\varphi_3)+$$

$$+\frac{1}{2}(\varphi-\varphi_2)\left(\varphi-\varphi_2+\frac{(\varphi_1-2\varphi_2+\varphi_3)(\varphi-\varphi_3)}{\varphi_2-\varphi_3}\right)\Big), \qquad (5.1.96)$$

$$w_3^{\varphi}=\frac{(\varphi-\varphi_2)}{(\varphi_3-\varphi_2)^3}\Big((3\varphi_3-\varphi_2-2\varphi)(\varphi-\varphi_2)+$$

$$+\frac{1}{2}(\varphi-\varphi_3)\left(\varphi-\varphi_3+\frac{(\varphi_4-2\varphi_3+\varphi_2)(\varphi-\varphi_2)}{\varphi_3-\varphi_2}\right)\Big),$$

$$w_4^{\varphi}=\frac{(\varphi-\varphi_3)(\varphi-\varphi_2)^2}{2(\varphi_4-\varphi_3)(\varphi_3-\varphi_2)^2}.$$

Мы записали формулы для интервала индексов 1...4, интерполяционный полином строится между 2-м и 3-м узлами. На краях сетки широт (т.е. у полюсов) достаточно задать только одно значение производной и строить квадратичный полином. Так, у Южного полюса весовые функции вычисляются по формулам

$$w_2^{\varphi}=\frac{(\varphi_2-2\varphi_3+\varphi)(\varphi-\varphi_3)}{2(\varphi_2-\varphi_3)^2},$$

$$w_3^{\varphi}=\frac{(\varphi-\varphi_2)}{(\varphi_3-\varphi_2)^2}\left(2\varphi_3-\varphi_2-\varphi+\frac{(2\varphi_3-\varphi_2-\varphi_4)(\varphi-\varphi_3)}{2(\varphi_3-\varphi_4)}\right), \qquad (5.1.97)$$

$$w_4^{\varphi}=\frac{(\varphi-\varphi_2)(\varphi-\varphi_3)}{2(\varphi_3-\varphi_2)(\varphi_4-\varphi_3)}.$$

Аналогично у Северного полюса:

$$w_1^{\varphi}=\frac{(\varphi-\varphi_2)(\varphi-\varphi_3)}{2(\varphi_1-\varphi_2)(\varphi_2-\varphi_3)},$$

$$w_2^{\varphi}=\frac{(\varphi-\varphi_3)}{(\varphi_2-\varphi_3)^2}\left(2\varphi_2-\varphi_3-\varphi+\frac{(2\varphi_2-\varphi_1-\varphi_3)(\varphi-\varphi_2)}{2(\varphi_2-\varphi_1)}\right), \qquad (5.1.98)$$

$$w_3^{\varphi}=\frac{(\varphi-\varphi_2)(\varphi_3-2\varphi_2+\varphi)}{2(\varphi_3-\varphi_2)^2}.$$

Аналогично строятся формулы для интерполяции по долготе с тем лишь упрощением, что всегда используются формулы типа (5.1.96). Необходимо лишь в алгоритме предусмотреть корректную обработку нулевого меридиана, в окрестности которого могут использоваться, скажем, четыре долготы 358°,

359°, 0°, 1° для интерполяции между 359° и 0°.

Пользуясь этими интерполяционными полиномами с непрерывной первой производной для интерполяции $\frac{\partial^\alpha}{\partial z^\alpha}\ln N_{jk}(z)$, α = 0...2, можно вычислить $\frac{\partial^\alpha}{\partial z^\alpha}\frac{\partial^\beta}{\partial \varphi^\beta}\frac{\partial^\gamma}{\partial \lambda^\gamma} n(z,\varphi,\lambda)$, β = 0...1, γ = 0...1. Таким образом, мы вычисляем все 3 компоненты градиента, а у гессиана теперь пренебрегаем лишь элементами $\frac{\partial^2 n}{\partial \varphi^2}$ и $\frac{\partial^2 n}{\partial \lambda^2}$.

Поскольку в дальнейшем при счете лучей и волн будем пользоваться декартовыми координатами, градиент и гессиан должны быть преобразованы следующим образом:

$$\frac{\partial n}{\partial x_i} = \frac{\partial \tilde{x}_j}{\partial x_i}\frac{\partial n}{\partial \tilde{x}_j},$$
$$\frac{\partial^2 n}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 \tilde{x}_k}{\partial x_i \partial x_j}\frac{\partial n}{\partial \tilde{x}_k} + \frac{\partial \tilde{x}_k}{\partial x_i}\frac{\partial \tilde{x}_l}{\partial x_j}\frac{\partial^2 n}{\partial \tilde{x}_k \partial \tilde{x}_l}, \qquad (5.1.99)$$

где $\tilde{x}_j = (z,\varphi,\lambda)$ – геодезические координаты, $x_j$ – декартовы координаты.

Следует также отметить, что геодезические координаты имеют особенности на полюсах. Мы, однако, всюду пренебрегаем этим, поскольку вероятность того, что будет необходимо обрабатывать данные, измеренные в очень малой его окрестности полюса, крайне невысока, и такие данные можно всегда отбросить.

Возможны и более сложные схемы интерполяции, например двумерная сплайн-интерполяция по широте и долготе, обеспечивающая непрерывность первых и вторых производных. Существенным недостатком этой схемы является то, что для нее требуется большой объем вычислений и она в результате оказывается довольно медленной. Причина этого в том, что сплайн зависит от данных во всех точках сетки, тогда как предлагаемая схема интерполяции локальна.

Можно использовать 6 × 6 = 36 точек долготно-широтной сетки и строить интерполяционные полиномы пятой степени с непрерывными первыми и вторыми производными. Формулы для таких полиномов, конечно, оказываются довольно громоздкими, а объем вычислений возрастает примерно вдвое по сравнению с 16-точечной схемой. При этом даже точность простейшей линейной интерполяции по широте и долготе чаще всего оказывается достаточной для наших целей.

## Литература

1. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. М.: Бином, 2001. С. 363–375.

2. *Ильина В.А., Силаев П.К.* Численные методы для физиков-теоретиков. Т. 2. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. С. 16–30.

3. *Яненко Н.Н.* Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1967. 197 с.

4. *Кравцов Ю.А., Найда О.Н., Фуки А.А*. Волны в слабоанизотропных трехмернонеоднородных средах: квазиизотропное приближение геометрической оптики // Успехи Физических Наук. Февраль 1996 г. Т. 166, № 2. С. 141–167.

5. *Budden K.G.* Radio Waves in the Ionosphere, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1961.

6. *Гинзбург В.Л.* Электромагнитные волны в плазме. М.: Наука, 1967.

7. *Davis K.* Ionospheric Radio Waves, Wallham Mass: Blaisdell, 1969.

8. *Горбунов М.Е.* Методы возмущений в геометрической оптике // Изв. Вузов. Радиофизика. 1995. Т. 38(7). С. 660–667.

9. *Калашников И.Э., Матюгов С.С., Павельев А.Г., Яковлев О.И.* Анализ особенностей метода радиопросвечивания атмосферы Земли // Электромагнитные волны в атмосфере и космическом пространстве. М.: Наука, 1986. С. 208.

10. *Павельев А.Г., Кучерявенков А.И.* Теория рефракционного ослабления радиоволн в планетных атмосферах // Радиотехника и электроника. 1978. Т. 23, № 7. С. 1345–1351.

11. *Sokolovskiy S.V.* Inversions of Radio Occultation Amplitude Data // Radio Sci. 2000. Vol. 35, No. 1. P. 97–105.

12. *Яковлев О.И.* Космическая радиофизика. М.: Научная книга, 1998. 432 с.

13. *Eshleman R., Muhleman D.O., Nicholson P.D., Steffes P.G.* Comment on Absorbing Regions in the Atmosphere of Venus as Measured by Radio Occultation // Icarus. 1980. Vol. 44, No. 3. P. 793–803.

14. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексной переменной, 4-е изд., перераб. и доп. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1973. 749 с.

15. *Воробьев В.В., Красильникова Т.Г.* Оценка точности восстановления атмосферного показателя преломления по измерениям доплеровского сдвига частоты на частотах, используемых в системе NAVSTAR // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1993. Т. 29, № 5. С. 626–632.

16. *Воробьев В.В., Кан В.* Фоновые флуктуации при радиопросвечивании ионосферы в эксперименте GPS–Microlab-1 // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 1999. Т. XLII, № 6. С. 511–523.

17. *Ahmad B., Tyler G.L.* Systematic errors in atmospheric profiles obtained from Abelian inversion of radio occultation data: Effects of large-scale horizontal gradients // J. Geophys. Res. 1999. Vol. 104, No. D4. P. 3971–3992.

18. *Healy S.B.* Radio occultation bending angle errors caused by horizontal gradients: A simulation study // U. K. Meteorology Office. Forecasting Res. Technical Report No. 286. UK, Reading, 1999. 31 p.

19. *Kirchengast G., Schweitzer S., Ladstädter F.* (invited keynote) ACCURATE – Observing Greenhouse Gases, Isotopes, Wind, and Thermodynamic Variables by Combined MW Radio and IR Laser Occultation 3rd International Workshop on Occultations for Probing Atmosphere and Climate (OPAC-3), Graz, Austria, September 2007.

20. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике. М.: Наука, 1968. 608 с.

21. The ECHAM3 atmospheric general circulation model // Deutsches KlimaRechenZentrum, Modelbetreuungsgruppe. Technical Report No. 6. Hamburg, 1994. 195 p.

22. *Hedin E.* Extension of the MSIS thermosphere model into the middle and lower atmosphere. J. Geophys. Res. 1991. Vol. 96, No. A2. P. 1159–1172.

23. *Lambeck K.* Geophysical geodesy: the slow deformation of the Earth. Oxford: Clarendon press, 1988. 718 p.

24. NOAA: U. S. Standard Atmosphere. Washington D. C.: NOAA and NASA and USAF, 1976. 210 p.

25. *List R.J.* Acceleration of gravity, Smithsonian Meteorological Tables, edition 6. Washington D.C.: Smithsonian Institution, 1968. 220 p.

26. EGM96. The NASA GSFC and NIMA Joint Geopotential Model. /NASA. – http://cddisa.gsfc.nasa.gov/926/egm96/egm96.html.

27. *Tapley B.D., Watkins M.M., Ries J.C., Davis G.W., Eanes R.J., Poole S.R., Rim H.J., Schutz B.E., Shum C.K., Nerem R.S., Lerch F.J., Marshall J.A., Klosko S.M., Pavlis N.K., Williamson R.G.* The JGM-3 Gravity Model // J. Geophys. Res. 1996. Vol. 101, No. B12. P. 28029–28049.

## 5.2. Метод фазовых экранов

**Дифракционная модель радиозатменных экспериментов**

В предыдущем разделе мы подробно рассмотрели геометрооптическую модель радиозатменных экспериментов. В рамках этой модели наиболее удобной величиной является профиль угла рефракции $\varepsilon(p)$. В условиях однолучевого распространения профиль угла рефракции позволяет определить фазовую задержку и амплитуду, т.е. полностью смоделировать радиозатменный сигнал. Для того чтобы вычислять радиозатменные сигналы в реалистичных условиях, включающих многолучевое распространение, требуется дифракционная модель, позволяющая моделировать данные радиопросвечивания атмосферы Земли при заданных траекториях движения низкоорбитального спутника и спутника системы GPS и для заданных глобальных метеополей. Эта модель используется для создания искусственных экспериментальных данных, на которых можно тестировать различные алгоритмы обращения. При этом геометрооптическая модель обеспечивает эталонный профиль угла рефракции, с которым сравниваются результаты обработки искусственных данных. В этом разделе опишем дифракционную модель, основанную на методе фазовых экранов.

Мы используем следующие приближения:

1. Моделируется вертикальная геометрия радиозахода с неподвижным спутником GPS.
2. Решается двумерная задача дифракции.
3. Моделируется только нейтральная компонента показателя преломления.
4. Считается, что Земля идеально поглощает радиоволны, т.е. эффектами рассеяния и отражения мы пренебрегаем.

Приближение вертикальной геометрии радиозахода с неподвижным передатчиком очень существенно для создания быстрой модели. Это приближение позволяет использовать метод фазовых экранов для просчета всего радиозахода за один проход. Если же моделировать движущийся источник, то для каждой выборки радиозатменных данных необходимо моделировать распространение радиоволн заново. Поскольку в одном радиозаходе обычно записывается около 3000 значений амплитуды и фазы сигнала, понятно, что моделирование движущегося источника будет требовать существенно большего вычислительного времени. При этом окажется необходимым использовать другие приближения, как это, например, делалось в [1].

Применимость двумерной теории дифракции может быть обоснована тем, что для радиозатменного зондирования атмосферы Земли размер зоны Френеля в поперечном направлении оценивается как $\sqrt{L\lambda}$, что составляет около 1 км для расстояния наблюдения 3000 км. Эта величина существенно меньше, чем характерные масштабы метеополей, представленные в моделях глобальной циркуляции атмосферы. Поэтому зависимостью дифракционных эффектов от поперечной координаты можно пренебречь.

Мы пренебрегаем ионосферным показателем преломления, поскольку в первую очередь нас интересуют эффекты многолучевого распространения в нижней тропосфере, где влияние ионосферы очень мало. Однако описанная методика может использоваться и для моделирования ионосферного распространения радиоволн.

Пренебрежение эффектами отражения и рассеяния также позволяет существенно упростить моделирование. С другой стороны, сигналы GPS имеют круговую поляризацию, и ее направление меняется при отражении, поэтому приемная антенна будет существенно подавлять отраженный сигнал. Амплитуда же рассеянного сигнала, чья поляризация близка к вертикальной, будет также существенно ниже, чем амплитуда прямого сигнала, и его доплеровская частота будет попадать в полосу частот приемника лишь при очень скользящих углах. Предполагается, что даже при этих условиях применение дифракционной техники обработки сигналов должно позволить эффективно отфильтровать рассеянный сигнал.

Таким образом, описываемая модель адекватна поставленным целям.

Моделирование проводится для заданных баллистических данных спутников и заданных глобальных метеополей и состоит из следующих этапов:

1. Преобразование геометрии радиозахода в вертикальную с неподвижным источником радиоволн.
2. Определение области распространения радиоволн.
3. Моделирование распространения радиоволн методом фазовых экранов.

**Определение области распространения радиоволн**

Задача распространения радиоволн решается в вертикальной плоскости, определяемой базисными векторами $\mathbf{a}^x \equiv \mathbf{a}^x(t_N)$, $\mathbf{a}^y \equiv \mathbf{a}^y(t_N)$, определенными в разделе 5.1, где описано приближение вертикальной геометрии и неподвижного источника. Область, в которой решается задача, задается в виде прямоугольника (рис. 18). Задавая максимальную высоту луча $h_{\max}$ (в наших численных экспериментах 60 км), можно определить верхнюю границу области распространения волн $y_{\max} = r_E + h_{\max}$. Левая граница определяется как $x_{\min} = \sqrt{\left(r_E + H_{\text{atm}}\right)^2 - r_E^2}$, где $H_{\text{atm}} = 130$ км – условная высота атмосферы, т.е. высота, на которой показатель преломления пренебрежимо мал.

Для определения нижней границы области мы определяем границу геометрооптической тени. Для этого рассчитывается веер лучей, исходящих от спутника GPS в вертикальной плоскости радиозахода, и методом дихотомии ищется луч, максимально приближающийся к поверхности Земли. Лучи рассчитываются на основе уравнения геометрической оптики, которое численно интегрируется, пока луч не достигает высоты $H_{\text{atm}}$ или не коснется поверхности Земли. Координаты $x$, $y$ самой нижней точки, достигнутой лучом, достигшим верхней границы атмосферы, определяют правый нижний угол $x_{\max}$, $y_{\min}$ области распространения радиоволн. При этом из $y_{\min}$ вычитаем $\Delta y$ = 5 км, чтобы избежать краевых эффектов при обработке данных. Таким образом, в наших численных экспериментах мы моделируем радиозатменные измерения с заходом в теневую зону.

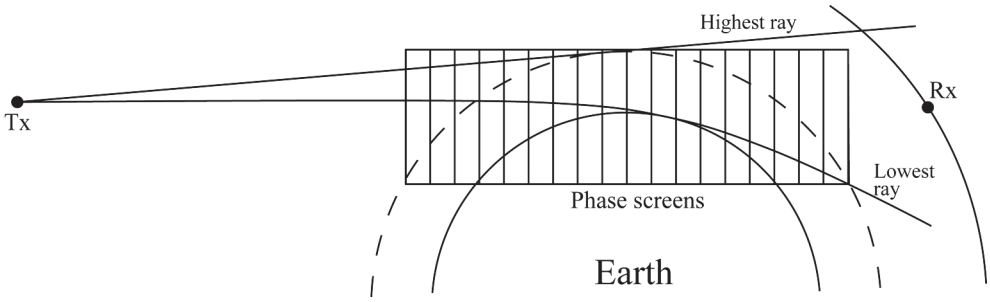



**Рис. 18.** Геометрия метода фазовых экранов

**Метод фазовых экранов**

Метод фазовых экранов, применяемый нами, является комбинацией методик, описанных в [2, 3]. Как мы видели в разделе 3.2, выделяя в уравнении Гельмгольца координату распространения волн $x$ и применяя операторную факторизацию, его можно приближенно переписать в виде (3.2.14)

$$\frac{1}{ik}\frac{\partial}{\partial x}u = \left( (n-1) + \sqrt{1+\frac{1}{k^2}\Delta_\perp} \right) u. \qquad (5.2.1)$$

Оператор в правой части является суммой точного вакуумного оператора $\hat{V}$ и приближенной добавки $\hat{M}$, связанной с рефрагирующей средой:

$$(n-1) + \sqrt{1+\frac{1}{k^2}\Delta_\perp} \equiv \hat{M} + \hat{V}. \qquad (5.2.2)$$

Задавая шаг интегрирования $\Delta x$, можно записать приближенно

$$u(x+\Delta x, y) = \exp\left[ i\Delta x\left(\hat{V}+\hat{M}\right)\right] u(x,y) \approx \exp\left[ i\Delta x\hat{V}\right]\exp\left[ i\Delta x\hat{M}\right] u(x,y). \qquad (5.2.3)$$

Действие оператора $\exp\left[ i\Delta x\hat{V}\right]$ сводится к умножению на $\exp\left[ ik\Delta x\sqrt{1-\eta^2}\right]$, если перейти к нормированному Фурье-образу (3.4.5) по переменной $y$. Этот оператор является точным решением задачи распространения волн в вакууме. Оператор $\exp\left[ i\Delta x\hat{M}\right] = \exp\left[ i\Delta x k N(x,y)\right]$ описывает влияние слоя среды толщиной $\Delta x$ в приближении фазового экрана. Ошибка представления операторной экспоненты от суммы некоммутирующих операторов в виде произведения двух экспонент (5.2.3) в главном члене пропорциональна коммутатору $\left[\Delta x\hat{V}, \Delta x\hat{M}\right]$ и имеет, таким образом, второй порядок малости по шагу интегрирования.

**Модель распространения радиоволн**

Модель распространения радиоволн в атмосфере использует метод фазовых экранов, численная реализация которого основана на быстром преобразовании Фурье.

Начальный фазовый экран помещается при $x = x_{\min}$. Поле в плоскости этого фазового экрана задается в виде сферической волны от спутника GPS. Количество точек в этом фазовом экране определяется кривизной сферической волны и оценивается следующим образом:

$$N_0^U = \min\left\{2^k : 2^k \geq \frac{y_{\max} - y_{\min}}{\lambda / 4} \max\left[\left|\frac{y_{\max}}{x_{\min} - x_T'}\right|, \left|\frac{y_{\min}}{x_{\min} - x_T'}\right|\right]\right\}. \quad (5.2.4)$$

Задавая сетку

$$y_i = y_{\min} + (i-1)\frac{y_{\max} - y_{\min}}{N_0^U}, \qquad \mathbf{x}_i^{(0)} = \mathbf{a}^x x_{\min} + \mathbf{a}^y y_i, \quad (5.2.5)$$

мы определяем комплексное поле $u_{1,2}^{(0)}(y_i)$ для частотных каналов L1 и L2 в начальном фазовом экране:

$$u_{1,2}^{(0)}(y_i) = A_0 \sqrt{x_{\min} - x_T'}\, \frac{\exp\left(ik_{1,2}\left|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_T'\right|\right)}{\sqrt{\left|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_T'\right|}}\, a(y), \quad (5.2.6)$$

где $A_0$ – нормировочный множитель, соответствующий вакуумной амплитуде поля (мы использовали $A_0 = 100$), $k_{1,2} = \dfrac{2\pi}{\lambda_{1,2}}$ – волновые числа для каналов L1 и L2, а функция $a(y)$ равна 1 в большей части фазового экрана и гладко убывает на краях:

$$a(y) = \begin{cases} \exp\left(-\left(\dfrac{y - (y_{\max} - \Delta y)}{\Delta y / 4}\right)^2\right), & y > (y_{\max} - \Delta y), \\ \exp\left(-\left(\dfrac{y - (y_{\min} + \Delta y)}{\Delta y / 4}\right)^2\right), & y < (y_{\min} + \Delta y), \\ 1, \quad y_{\min} + \Delta y \leq y \leq y_{\max} - \Delta y. \end{cases} \quad (5.2.7)$$

Волновое поле умножается на эту функцию для предотвращения обмена энергией между верхним и нижним краями фазового экрана, которые смыкаются при использовании быстрого преобразования Фурье.

Далее волновое поле распространяется от экрана к экрану, $l$-й фазовый экран помещается при $x^{(l)} = x_{\min} + l\Delta x$. Для современных глобальных полей метеопараметров характерное горизонтальное разрешение составляет около 50 км (0.5°). В этом случае оптимальная величина шага между экранами $\Delta x$ со-

ставляет около 25 км. Распространение с экрана на экран описывается следующим оператором:

$$u_{1,2}^{(l)}(y) = \hat{F}_{k_{1,2},\eta\to y}^{-1}\left\{\exp\left(ik_{1,2}\sqrt{1-\eta^2}\,\Delta x\right)\hat{F}_{k_{1,2},y\to\eta}\left[u_{1,2}^{(l-1)}(y)\right]\right\}\times$$
$$\times\exp\left(ik\,n\left(\mathbf{a}^x x^{(l)} + \mathbf{a}^y y\right)\Delta x\right)\chi_E\left(\mathbf{a}^x x^{(l)} + \mathbf{a}^y y\right)a(y), \quad (5.2.8)$$

где $\hat{F}_{k_{1,2},y\to\eta}$ и $\hat{F}_{k_{1,2},\eta\to y}^{-1}$ – прямое и обратное нормированное Фурье-преобразование (3.4.5) по переменной $y$. Функция $\chi_E(\mathbf{x})$ описывает поглощение волн и определена следующим образом:

$$\chi_E(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{над поверхностью Земли,} \\ 0.0001, & \text{под поверхностью Земли.} \end{cases} \quad (5.2.9)$$

«Символическая» ненулевая амплитуда поля внутри Земли оставлена, чтобы избежать численных ошибок при вычислении фазы комплексного поля.

На каждом экране вычисляем накопленную фазу $\varphi_{1,2}^{(l)}(y_i)$ комплексного поля $u_{1,2}^{(l)}(y_i)$. При этом, если $\max\limits_i\left|\varphi_{1,2}^{(l)}(y_i) - \varphi_{1,2}^{(l)}(y_{i-1})\right| > \dfrac{\pi}{2}$ и количество точек дискретизации меньше, чем $N_{\max}^U$, то разрешение удваивается, т.е. шаг сетки по $y$ уменьшается вдвое, и комплексное поле интерполируется на новую сетку. Максимальное количество точек $N_{\max}^U$ оценивается из максимального угла рефракции $\varepsilon_{\max}$, вычисляемого при определении области распространения волн:

$$N_{\max}^U = \min\left[2^k : 2^k \ge \frac{y_{\max} - y_{\min}}{\lambda/4}\varepsilon_{\max}\right]. \quad (5.2.10)$$

Поле, сосчитанное в плоскости последнего фазового экрана при $x = x_{\max}$, распространяется до траектории низкоорбитального спутника с использованием дифракционного интеграла (3.3.13):

$$u_{1,2}(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{k}{2\pi}}\int_{y_{\min}}^{y_{\max}} u_{1,2}^{(l)}(y)\cos\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})\frac{\exp\left(ik\left|\mathbf{x} - \left(\mathbf{a}^x x^{(l)} + \mathbf{a}^y y\right)\right| - i\dfrac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\left|\mathbf{x} - \left(\mathbf{a}^x x^{(l)} + \mathbf{a}^y y\right)\right|}}dy, \quad (5.2.11)$$

где $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ – угол между нормалью к последнему фазовому экрану и вектором $\mathbf{x} - (\mathbf{a}^x x^{(l)} + \mathbf{a}^y y)$.

Для того чтобы моделировать данные измерений по всей области распространения волн, вычисляем новую орбиту $\mathbf{x}''_R(t)$ низкоорбитального спутника, применяя полиномиальную регрессию к заданной траектории $\mathbf{x}'_R(t)$ и расширяя интервал времени, если необходимо, так, чтобы точки стационарной фазы дифракционного интеграла (5.2.11) полностью покрывали последний фазовый экран от $y_{\min}$ до $y_{\max}$.

Для вычисленного поля $u_{1,2}(\mathbf{x}''_R(t))$ определяем накопленную фазу $\varphi_{1,2}(t)$ и фазовую задержку:

$$\Delta s_{1,2}(t) = \frac{\varphi_{1,2}(t)}{k_{1,2}} - \left| \mathbf{x}'_T - \mathbf{x}''_R(t) \right|. \qquad (5.2.12)$$

Получаемые в результате данные имитируют натурные измерения и могут быть использованы для валидации алгоритмов обращения.

**Метод цилиндрических фазовых экранов**

Метод фазовых экранов, описанный выше, эффективен и легко реализуется. Его недостатком является то, что сферические волновые фронты падающей волны не совпадают по форме с плоскими фазовыми экранами. Это приводит к необходимости увеличения разрешения. В [4] был предложен метод цилиндрических фазовых экранов. Метод основан на волновом уравнении в координатах ($\ln(r / r_0)$, $\theta$) (5.1.46), где центр выбирается в точке источника волн, а $r_0$ – расстояние от источника до атмосферы (рис. 19).

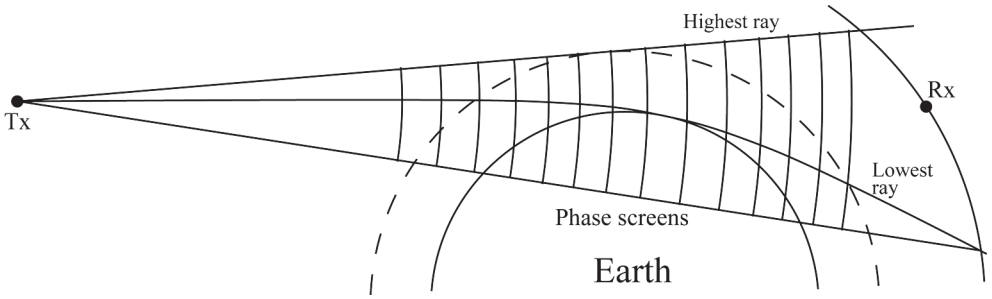



**Рис. 19.** Геометрия цилиндрических фазовых экранов

Вычисления с цилиндрическими фазовыми экранами следуют практически той же схеме, что описана выше. Требуется лишь преобразовывать координаты $\left(\ln(r / r_0), \theta\right)$ в $(x, y)$ для вычисления показателя преломления. Плотность энергии в этом случае равна $A^2 n^2 r^2$, поэтому сохранение энергии приводит к затуханию амплитуды как $r^{-1}$. Этот множитель следует явно учесть в пропагаторе, который в остальном аналогичен (5.2.8).

## Литература


1. *Mortensen M.D., Linfield R.P., Kursinski E.R.* Resolution approaching 100m for GPS occultations of the Earth's atmosphere // Radio Science. 1999. Vol. 36, No. 6. P. 1475–1484.
2. *Martin J.* Simulation of wave propagation in random media: theory and applications. – In book: Wave propagation in random media (scintillations) / Edited by Tatarskii V.I., Ishimaru A., Zavorotny V.U. // Bellingham, Washington, Bristol and Philadelphia: SPIE – The International Society for Optical Engineering and Institute of Physics Publishing. 1992. P. 463–486.
3. *Зверев В.А.* Радиооптика. М.: Сов. Радио, 1975. 304 с.
4. *Cao Y., Dvorak S.L., Ye X., Herman B.* A new cylindrical phase screen method for modeling electromagnetic wave propagation through an inhomogeneous 2-D atmosphere // Radio Sci. V. 42. RS4027. doi:10.1029/2006RS003550, 2007.

## 5.3. Асимптотическое прямое моделирование

**Каноническое преобразование 2-го типа к лучевым координатам**

Мы перейдем к рассмотрению асимптотических методов прямого моделирования. Эти методы основаны на аппарате интегральных операторов Фурье, рассмотренном в главе 4. Основными понятиями здесь будут лучевое многообразие и канонические преобразования между лучевыми и физическими координатами. Рассмотрение удобно начать с преобразования от физических координат к лучевым. Это позволит естественным образом определить импульс в лучевых координатах. Как мы видели в главе 4, если известны амплитудная и фазовая функции и плотность меры интегрального оператора Фурье, это позволяет немедленно получить выражение для обратного оператора, являющегося к нему сопряженным.

Рассмотрим комплексное поле $u(y) = A(y)\exp(ik\Psi(y))$, записанное вдоль траектории наблюдения и параметризованное некоторой координатой $y$. Координата может быть временем, длиной дуги траектории или угловым разнесением спутников θ [1]. Будем искать интегральный оператор Фурье 2-го типа, осуществляющий перевод поля в преставление прицельного параметра. Этот оператор имеет символ $a_2(p, y)$ и фазовую функцию $S_2(p, y)$. Как мы знаем, для фазовой функции справедливо уравнение

$$\frac{\partial S_2(p,y)}{\partial y} = -\eta(p,y), \tag{5.3.1}$$

где $\eta(p, y)$ равняется производной эйконала для геометрооптического луча с прицельным параметром $p$, наблюденного в точке траектории $y$. В частности, если $y$ совпадает со временем $t$, то $\eta = -\Delta\omega/k$, где $\Delta\omega$ – доплеровский сдвиг частоты (мы принимаем зависимость поля от времени в форме $A(y)\exp(ik\Psi(y) - i\omega t)$). Функция $\eta(p, y)$ вычисляется с использованием геометрической оптики. Это уравнение будет использовано для определения фазовой функции $S_2(p, y)$.

Обозначим $y_s(p)$ точку траектории, где наблюдается луч с заданным прицельным параметром $p$. Производная эйконала преобразованного поля $\hat{\Phi}_2 u(p)$, или новый импульс, на основании формул (4.6.4) вычисляется следующим образом:

$$\frac{\partial \Psi'(p)}{\partial p} = \left.\frac{\partial S_2(p,y)}{\partial p}\right|_{y=y_s(p)} = \xi\left(p, y_s(p)\right). \tag{5.3.2}$$

Это позволяет дать следующую интерпретацию интегрального оператора Фурье 2-го типа. Мы задаем некоторое значение прицельного параметра $p$ и интегрируем осциллирующее ядро $\exp(ikS_2(p, y) + ik\Psi(y))$. Поскольку $k\partial S_2 / \partial y$ равняется доплеровской частоте $-k\eta(p, y)$ для луча, принимаемого в заданной точке траектории $y$ и имеющего заданный прицельный параметр $p$, осциллирующее ядро $\exp(ikS_2(p, y))$ локализует геометрооптические лучи, которые

соответствуют точкам стационарной фазы. В точке стационарной фазы член $-k\int \eta\, dy$ в фазе сокращается членом $k\Psi$ в фазе волнового поля. Остающийся член $k\int \xi\, dp$ в фазе определяет производную $\xi$ фазы преобразованного волнового поля.

Для вывода фазовой функции мы воспользуемся уравнением (5.3.1). Получим формулу для производной оптического пути $\eta(p, y)$. Для этого рассмотрим сферически-симметричную атмосферу с вертикальным профилем показателя преломления $n(r)$. Пусть $r_G$ и $r_L$ – радиальные координаты спутника GPS и низкоорбитального спутника, $\theta$ – угловое разнесение спутников. Для луча с прицельным параметром $p$ и высотой перигея $r_0$ можем написать следующее выражение:

$$\begin{aligned}
\Psi = \eta(p,y) &= \int n\, ds = \int_{r_0}^{r_G} + \int_{r_0}^{r_L} \frac{n^2 r}{\sqrt{n^2 r^2 - p^2}}\, dr = \\
&= \int_{p}^{r_G} + \int_{p}^{r_L} \frac{x}{\sqrt{x^2 - p^2}} \left[ 1 - x\frac{n'_x}{n} \right] dx = \\
&= \sqrt{r_G^2 - p^2} + \sqrt{r_L^2 - p^2} - 2\int_{p}^{\infty} \frac{p^2}{\sqrt{x^2 - p^2}} \frac{n'_x}{n} - 2\int_{p}^{\infty} \sqrt{x^2 - p^2}\, \frac{n'_x}{n}\, dx = \\
&= \sqrt{r_G^2 - p^2} + \sqrt{r_L^2 - p^2} + p\varepsilon(p) + \int_{p}^{\infty} \varepsilon(p')\, dp'.
\end{aligned} \tag{5.3.3}$$

Для производной оптического пути получаем тогда соотношение

$$\dot{\Psi} = \frac{r_G \dot{r}_G - p\dot{p}}{\sqrt{r_G^2 - p^2}} + \frac{r_L \dot{r}_L - p\dot{p}}{\sqrt{r_L^2 - p^2}} + p\dot{\varepsilon}. \tag{5.3.4}$$

Для угла рефракции имеем соотношение

$$\varepsilon = \theta - \arccos\frac{p}{r_G} - \arccos\frac{p}{r_L}. \tag{5.3.5}$$

Полная производная угла рефракции равна

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\theta} - \frac{\dfrac{p\dot{r}_G}{r_G} - \dot{p}}{\sqrt{r_G^2 - p^2}} - \frac{\dfrac{p\dot{r}_L}{r_L} - \dot{p}}{\sqrt{r_L^2 - p^2}}. \tag{5.3.6}$$

Здесь и далее точка означает полную производную по параметру траектории. Подставляя это выражение в выражение для производной оптического пути, получим

$$\dot{\Psi} = \eta(p, y) =$$

$$= \frac{r_G \dot{r}_G - p\dot{p}}{\sqrt{r_G^2 - p^2}} + \frac{r_L \dot{r}_L - p\dot{p}}{\sqrt{r_L^2 - p^2}} + p\left( \dot{\theta} - \frac{\frac{p\dot{r}_G}{r_G} - \dot{p}}{\sqrt{r_G^2 - p^2}} - \frac{\frac{p\dot{r}_L}{r_L} - \dot{p}}{\sqrt{r_L^2 - p^2}} \right) =$$

$$= \frac{r_G \dot{r}_G}{\sqrt{r_G^2 - p^2}} + \frac{r_L \dot{r}_L}{\sqrt{r_L^2 - p^2}} + p\left( \dot{\theta} - \frac{\frac{p\dot{r}_G}{r_G}}{\sqrt{r_G^2 - p^2}} - \frac{\frac{p\dot{r}_L}{r_L}}{\sqrt{r_L^2 - p^2}} \right) = \qquad (5.3.7)$$

$$= p\dot{\theta} + \frac{\dot{r}_G}{\sqrt{r_G^2 - p^2}}\left( r_G - \frac{p^2}{r_G} \right) + \frac{\dot{r}_L}{\sqrt{r_L^2 - p^2}}\left( r_L - \frac{p^2}{r_L} \right) =$$

$$= p\dot{\theta} + \frac{\dot{r}_G}{r_G}\sqrt{r_G^2 - p^2} + \frac{\dot{r}_L}{r_L}\sqrt{r_L^2 - p^2}.$$

Здесь и далее $r_G$, $r_L$ и $\theta$ являются функциями параметра траектории $y$. Выражение для фазовой функции [2, 3] может быть найдено путем интегрирования $\eta(p, y)$ по $y$ для фиксированного значения $p$:

$$S_2(p, y) = -\int \left( p\dot{\theta} + \frac{\dot{r}_G}{r_G}\sqrt{r_G^2 - p^2} + \frac{\dot{r}_L}{r_L}\sqrt{r_L^2 - p^2} \right) dy =$$

$$= -\int \left( p\, d\theta + \frac{dr_G}{r_G}\sqrt{r_G^2 - p^2} + \frac{dr_L}{r_L}\sqrt{r_L^2 - p^2} \right) = \qquad (5.3.8)$$

$$= -p\theta - \sqrt{r_G^2 - p^2} + p\arccos\frac{p}{r_G} - \sqrt{r_L^2 - p^2} + p\arccos\frac{p}{r_L}.$$

Это выражение определено с точностью до произвольной функции $f(p)$, которую нам удобнее всего взять равной 0. Производная эйконала преобразованного поля оказывается тогда равной углу рефракции с отрицательным знаком:

$$\xi(p, y) = -\theta + \arccos\frac{p}{r_G} + \arccos\frac{p}{r_L} = -\varepsilon(p, y). \qquad (5.3.9)$$

Таким образом, угол рефракции естественным образом оказывается равным импульсу, сопряженному прицельному параметру, как координате в лучевом пространстве.

Для круговой геометрии ($r_G = \text{const}$, $r_L = \text{const}$, $\dot{\theta} = \text{const}$) фазовая функция равна $S_2(p, y) = -p\theta + F(p)$, и оператор сводится к преобразованию Фурье. В методе глобального спектра фазовая функция $S_2(p, y)$ равна $-p\theta$. Производная фазы преобразованного поля равна $-\theta$, и угол рефракции можно найти как функцию от $\theta$ и $p$, используя уравнение (5.3.9) ($\varepsilon = \theta + F'(p)$).

Из приведенного выше рассмотрения осциллирующего ядра $\exp(ikS_2(p, y))$ можно вывести следующее соотношение:

$$S_2\left(p, y_s(p)\right) = -\Psi(p) + \int_p^{\infty} \varepsilon(p')\, dp'. \qquad (5.3.10)$$

Это соотношение можно также получить непосредственно из формул (5.3.3) и (5.3.9).

Для вывода амплитудной функции $a_2$ ($p$, $y$) воспользуемся сохранением энергии. Введем плотность меры $\mu(p, y)$. Выражение для амплитуды с использованием введенной меры можно переписать следующим образом:

$$a_2(p,y) = \sqrt{\mu \left| \frac{\partial^2 S_2(p,y)}{\partial p\, \partial y} \right|} = \left| \mu \left( \dot{\theta} - \frac{\dot{r}_G}{r_G} \frac{p}{\sqrt{r_G^2 - p^2}} - \frac{\dot{r}_L}{r_L} \frac{p}{\sqrt{r_L^2 - p^2}} \right) \right|^{1/2}. \qquad (5.3.11)$$

Пользуясь рассмотрением амплитуды радиозатменных сигналов, данным в разделе 5.2, определим меру так, чтобы было выполнено равенство

$$\frac{P}{2\pi} dp = A_0^2\, \mu\, dy. \qquad (5.3.12)$$

Отсюда получаем выражение для меры (в предположении сферической симметрии):

$$\mu = \sqrt{r_L^2 - p^2}\, \sqrt{r_G^2 - p^2} \left\{ \frac{r_L r_G}{p} \sin\theta \right\}_{3D} \frac{\delta\theta}{dy}. \qquad (5.3.13)$$

Пользуясь формулами и определениями раздела 5.2, для размера виртуальной приемной апертуры $\delta\theta$ можно записать выражение

$$\delta\theta = d\theta - \left( \frac{\partial\theta}{\partial r_G} \right)_p dr_G - \left( \frac{\partial\theta}{\partial r_L} \right)_p dr_L = d\theta - \frac{dr_G}{r_G} \frac{p}{\sqrt{r_G^2 - p^2}} - \frac{dr_L}{r_L} \frac{p}{\sqrt{r_L^2 - p^2}}. \qquad (5.3.14)$$

Для амплитудной функции мы получаем отсюда следующее выражение:

$$a_2(p,y) = \left( \sqrt{r_L^2 - p^2}\, \sqrt{r_G^2 - p^2} \left\{ \frac{r_L r_G}{p} \sin\theta \right\}_{3D} \right)^{1/2} \times \left( \dot{\theta} - \frac{\dot{r}_G}{r_G} \frac{p}{\sqrt{r_G^2 - p^2}} - \frac{\dot{r}_L}{r_L} \frac{p}{\sqrt{r_L^2 - p^2}} \right). \qquad (5.3.15)$$

**Линеаризованное каноническое преобразование**

Интегральный оператор Фурье с ядром (5.3.8), нелинейным по своим аргументам, в общем случае не сводится к преобразованию Фурье и не допускает быстрой реализации. Мы введем прием, позволяющий приближенно сводить такие интегральные операторы к композиции нелинейной замены координат и преобразования Фурье. Этот прием основан на линеаризации канонического преобразования [3].

Рассмотрим измеренное волновое поле $u(t) = A(t)\exp(ik\Psi(t))$ и соответствующий импульс $\sigma = d\Psi / dt$. Импульс связан с доплеровской частотой

$\Delta\omega = -\dfrac{\sigma}{k}$. Мы используем интегральный оператор Фурье, ассоциированный с каноническим преобразованием из представления ($t$, $\sigma$) в представление ($p$, $\xi$). Прицельный параметр может быть выражен как функция времени $t$ (поскольку оно определяет положения и скорости спутников) и нормированной доплеровской частоты $\sigma$: $p = p(t, \sigma)$. Вместо точного прицельного параметра введем его приближенное значение $\tilde{p}$:

$$\begin{gathered}\tilde{p}(t,\sigma) = p_0(t) + \frac{\partial p_0}{\partial \sigma}\left(\sigma - \sigma_0(t)\right) = f(t) + \frac{\partial p_0}{\partial \sigma}\sigma, \\ f(t) = p_0(t) - \left.\frac{\partial p_0}{\partial \sigma}\right|_{\sigma=\sigma_0(t)} \sigma_0(t),\end{gathered} \tag{5.3.16}$$

где $\sigma_0(t) = -\dfrac{\Delta\omega_0(t)}{k}$, $\Delta\omega_0(t)$ – некоторая гладкая модель доплеровской частоты, $p_0(t) = p(\sigma_0(t), t)$. Модель $\sigma_0(t)$ может быть получена дифференцированием с сильным сглаживанием измеренного эйконала.

Определим координату $Y = Y(t)$, параметризующую траекторию, и соответствующий импульс следующим образом:

$$\begin{gathered}dY = \left(\frac{\partial p_0}{\partial \sigma}\right)^{-1} dt = \frac{\partial \sigma}{\partial p_0} dt, \\ \eta = \frac{\partial p_0}{\partial \sigma}\sigma.\end{gathered} \tag{5.3.17}$$

Мы используем обозначение $Y$ для проведения отличия от координаты общего вида $y$. Для краткости будем использовать обозначение $u(Y)$ вместо $u(t(Y))$.

Для перехода в представление приближенного прицельного параметра можно записать линейное каноническое преобразование:

$$\begin{gathered}\tilde{p} = f(Y) + \eta, \\ \xi = -Y,\end{gathered} \tag{5.3.18}$$

где мы пользуемся обозначением $f(Y)$ вместо $f(t(Y))$. Производящая функция определяется дифференциальным уравнением

$$dS_2 = \xi\, d\tilde{p} - \eta\, dY = -Y\, d\tilde{p} - \left(\tilde{p} - f(Y)\right) dY, \tag{5.3.19}$$

из которого легко выводится

$$S_2(\tilde{p}, Y) = -\tilde{p}Y + \int_0^Y f(Y')\, dY'. \tag{5.3.20}$$

Пользуясь формулой (5.3.3) (считая, что $y = t$ и $\Psi = \sigma(p,t)$), можно определить $\partial\sigma / \partial p$. Для функции $f(t)$ можно тогда записать следующее выражение:

$$f(t) = p_0 - \left( \dot{\theta} - \frac{\dot{r}_G}{r_G} \frac{p_0}{\sqrt{r_G^2 - p_0^2}} - \frac{\dot{r}_L}{r_L} \frac{p_0}{\sqrt{r_L^2 - p_0^2}} \right)^{-1} \sigma_0. \qquad (5.3.21)$$

Для $dY$ имеем выражение

$$dY = d\theta - \frac{dr_G}{r_G} \frac{p_0}{\sqrt{r_G^2 - p_0^2}} - \frac{dr_L}{r_L} \frac{p_0}{\sqrt{r_L^2 - p_0^2}} \approx \delta\theta. \qquad (5.3.22)$$

Мы можем приближенно записать $\delta\theta / dY \approx 1$. Поскольку $\left| \partial^2 S_2 / \partial\tilde{p}\partial Y \right| = 1$, амплитудная функция равна $\sqrt{\mu}$ :

$$a_2(\tilde{p}, Y) = \left( \sqrt{r_L^2 - \tilde{p}^2} \sqrt{r_G^2 - \tilde{p}^2} \left\{ \frac{r_L r_G \sin\theta}{\tilde{p}} \right\}_{3D} \right)^{1/2}. \qquad (5.3.23)$$

Амплитудная функция $a_2(\tilde{p}, Y)$ в интегральном операторе Фурье может быть заменена на $a_2(\tilde{p}, Y_s(\tilde{p}))$и вынесена из-под интеграла. Полученный оператор будет композицией умножения на опорный сигнал $\exp\left(ik\int f(Y)\,dY\right)$, преобразования Фурье и умножения на амплитудную функцию:

$$\hat{\Phi}_2 u(\tilde{p}) = \sqrt{\frac{-ik}{2\pi}}\, a_2\left(\tilde{p}, Y_s(\tilde{p})\right) \int \exp(-ik\tilde{p}Y) \exp\left( ik \int_0^Y f(Y')\,dY' \right) u(Y)\,dY. \qquad (5.3.24)$$

Функция $Y_s(\tilde{p})$ равна $-\xi$, где импульс $\xi$ вычисляется как производная эйконала преобразованного поля. Для вычисления эйконала можно сначала положить $a_2 \equiv 1$, затем вычислить $a_2\left(\tilde{p}, Y_s(\tilde{p})\right)$ и умножить преобразованную волновую функцию на эту величину. Угол рефракции определяется как функция от $p$ и $Y_s(p)$, с использованием соотношения (5.3.5), где орбитальные данные $r_G$, $r_L$ и $\theta$ являются функциями от времени $t$, которое можно выразить как функцию от $Y$.

Рассмотрим простейший случай круговой геометрии радиозахода. В этом случае $Y = \theta$ и $\sigma = p\dot{\theta}$ линейно зависит от $p$. Следовательно, $f(Y) \equiv 0$ и $\tilde{p} = p$.

Оператор (5.3.24) преобразует волновое поле в представление приближенного прицельного параметра $\tilde{p}$. Используя уравнение (5.3.16), можно найти точное значение $\sigma$:

$$\sigma = \frac{\tilde{p} - f\left(Y_s(\tilde{p})\right)}{\dfrac{\partial p_0}{\partial\sigma}}. \qquad (5.3.25)$$

Тогда точное значение прицельного параметра $p(\sigma, t)$ может быть найдено как функция $p(\tilde{p})$.

**Прямое моделирование с использованием оператора 2-го типа**

Применим полученные выше формулы для прямого моделирования. Оператор, реализующий прямое моделирование, имеет фазовую функцию

$S_2^*(y, p) = -S_2(p, y)$ и амплитудную функцию $a_2^* = \left(\mu^{-1}\partial^2 S_2 / \partial\tilde{p}\,\partial y\right)^{1/2}$. Эту формулу легко вывести в предположении, что μ – медленно меняющаяся функция. В этом случае значение амплитуды в точке стационарной фазы можно вынести из-под интеграла, и тогда μ и $\mu^{-1}$ в композиции прямого и обратного оператора взаимно сократятся.

Если воспользоваться представлением приближенного прицельного параметра $\tilde{p}$, то прямая модель становится особенно эффективной. Для заданного 3-мерного поля показателя преломления мы сначала проводим геометрооптическое моделирование и, пользуясь итеративным алгоритмом, находим точку траектории $Y_s(\tilde{p})$, где наблюдался луч с прицельным параметром $p(\tilde{p})$. Волновая функция в $\tilde{p}$-представлении равна

$$w(\tilde{p}) = A'(\tilde{p})\exp\left(-ik\int Y_s(\tilde{p})\,d\tilde{p}\right), \tag{5.3.26}$$

где амплитуда $A'(\tilde{p})$ равна нормировочной константе в световой зоне и 0 в тени. Эта функция затем преобразуется в $Y$-представление обратным интегральным оператором $\hat{\mathbf{\Phi}}_2^{-1} = \hat{\mathbf{\Phi}}_2^*$:

$$u(Y) = \sqrt{\frac{ik}{2\pi}}\exp\left(-ik\int_0^Y f(Y')\,dY'\right)\int \exp\left(ik\tilde{p}Y\right)a_2^*\left(Y_s(\tilde{p}),\tilde{p}\right)w(\tilde{p})\,d\tilde{p},$$

$$a_2^*(Y,\tilde{p}) = \left(\frac{1}{\sqrt{r_L^2 - p_L^2}\sqrt{r_G^2 - p_G^2}}\left\{\frac{p_G}{r_L r_G \sin\theta}\right\}_{3D}\frac{dp_G}{d\tilde{p}}\right)^{1/2}, \tag{5.3.27}$$

где $p_L$ и $p_G$ – функции от $\tilde{p}$, вычисленные для данной атмосферы и траекторий спутников. Для моделирования поглощения амплитуда $A'(\tilde{p})$ должна быть также умножена на $\kappa(\tilde{p}) = \exp\left(-\int kn''\,ds\right)$, где интеграл берется вдоль луча с прицельным параметром $p(\tilde{p})$.

Этот метод прямого моделирования имеет следующие ограничения применимости: 1) приближенный прицельный параметр $\tilde{p}$ должен быть однозначной координатой лучевого многообразия; 2) дифракция внутри атмосферы должна быть пренебрежимо мала.

Важным достоинством этого метода является возможность моделировать движущиеся источник и приемник, что важно для радиозаходов с использованием передатчиков на низкоорбитальных спутниках.

**Распространение волн в вакууме**

Применим введенный выше метод линеаризации канонического преобразования для пересчета поля с последнего фазового экрана на орбиту приемника. Это позволит избавиться от многократных вычислений дифракционных интегралов на последнем этапе метода фазовых экранов. Рассмотрим задачу вычисления волнового поля $u(t)$ на некоторой кривой $(X(t), Y(t))$ с заданным граничным условием $u_0(y)$ вдоль вертикальной оси $y$ при $x = 0$. Получим вы-

ражение для интегрального оператора Фурье, описывающего распространение с вертикальной оси на кривую [4].

Рассмотрим разложения волнового поля по плоским волнам:

$$\tilde{u}_0(\eta) = \sqrt{\frac{-ik}{2\pi}} \int u_0(y) \exp(-iky\eta)\, d\eta. \qquad (5.3.28)$$

Каждая плоская волна с пространственной частотой $\eta$ имеет следующий вид:

$$U(x, y, \eta) = \sqrt{\frac{ik}{2\pi}} \tilde{u}_0(\eta) \exp\left(ikx\sqrt{1-\eta^2} + iky\eta\right). \qquad (5.3.29)$$

Сечение этой плоской волны вдоль кривой $\left(X(t), Y(t)\right)$ задается формулой

$$U(t, \eta) \equiv U\left(X(t), Y(t), \eta\right) = \sqrt{\frac{ik}{2\pi}} \tilde{u}_0(\eta) \exp\left(ikX(t)\sqrt{1-\eta^2} + ikY(t)\eta\right). \qquad (5.3.30)$$

Поле $u(t)$ равно сумме всех плоских волн:

$$u(t) = \sqrt{\frac{ik}{2\pi}} \int \exp\left(ikX(t)\sqrt{1-\eta^2} + ikY(t)\eta\right) \tilde{u}_0(\eta)\, d\eta. \qquad (5.3.31)$$

Эта формула представляет общую форму точного интегрального оператора Фурье, описывающего распространение с вертикальной оси на кривую. Для того чтобы свести это преобразование к комбинации преобразования Фурье, умножения на опорный сигнал и обратного преобразования Фурье, необходимо ввести некоторое приближение.

Запишем поле в импульсном представлении в форме $\tilde{u}_0(\eta) = A'(\eta) \exp\left(ik\Psi'(\eta)\right)$. Стационарная точка $\eta_s(t)$ интеграла (5.3.31) определяется уравнением

$$\left( -X(t) \frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} + Y(t) + \frac{\partial \Psi'}{\partial \eta} \right)\Bigg|_{\eta=\eta_s(t)} = 0. \qquad (5.3.32)$$

Поскольку производная фазы поля в импульсном представлении равна $-y_0(\eta)$, можно записать следующее уравнение с очевидным геометрическим смыслом:

$$Y(t) - y_0\left(\eta_s(t)\right) = X(t) \frac{\eta_s(t)}{\sqrt{1-\eta_s^2(t)}}. \qquad (5.3.33)$$

Рассмотрим каноническое преобразование от координаты и импульса ($y$, $\eta$) к новым координате и импульсу ($t$, $\sigma$). Производящая функция этого преобразования равна фазовой функции оператора (5.3.31):

$$S(t, \eta) = X(t)\sqrt{1-\eta^2} + Y(t)\eta. \qquad (5.3.34)$$

Эта функция удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$dS = \sigma\, dt + y\, d\eta. \qquad (5.3.35)$$

Отсюда получаем выражения, имеющие очевидный геометрический смысл:

$$\sigma = \frac{\partial S}{\partial t} = \dot{X}(t)\sqrt{1-\eta^2} + \dot{Y}(t)\eta,$$
$$y = \frac{\partial S}{\partial \eta} = Y(t) - X(t)\frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}. \tag{5.3.36}$$

Для амплитудной функции имеем выражение

$$a(t,\eta) = \sqrt{\mu \frac{\partial^2 S}{\partial t\, \partial \eta}} = \left( \dot{Y}(t) - \dot{X}(t)\frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} \right)^{1/2} \mu^{1/2}. \tag{5.3.37}$$

Поскольку $a(t,\eta) = 1$, получаем выражение для плотности меры:

$$\mu(t,\eta) = \left( \dot{Y}(t) - \dot{X}(t)\frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} \right)^{-1}. \tag{5.3.38}$$

Плотность меры согласована с условием локального сохранения энергии:

$$\left|\tilde{u}_0(\eta)\right|^2 d\eta = \left|u(t)\right|^2 \mu(t,\eta)^{-1}\, dt. \tag{5.3.39}$$

Рассмотрим линеаризованное каноническое преобразование:

$$\begin{aligned} t = t(y,\eta) &= t\left(y_0(\eta),\eta\right) + \frac{\partial t_0}{\partial y}\left(y - y_0(\eta)\right) = \\ &= t_0(\eta) - \frac{\partial t_0}{\partial y} y_0(\eta) + \frac{\partial t_0}{\partial y} y = \\ &= f(\eta) + z. \end{aligned} \tag{5.3.40}$$

Вместо координаты и импульса ($y$, $\eta$) введем координату и импульс ($z$, $\xi$), так чтобы было выполнено условие $-z\, d\xi = -y\, d\eta$:

$$z = \frac{\partial t_0}{\partial y} y,$$
$$d\xi = \left( \frac{\partial t_0}{\partial y} \right)^{-1} d\eta. \tag{5.3.41}$$

Для производящей функции запишем уравнение

$$dS = \sigma dt + z d\xi = \sigma dt + \left(t - f(\xi)\right) d\xi. \tag{5.3.42}$$

Доопределим линеаризацию канонического преобразования:

$$\begin{aligned} \sigma = \sigma(t,\eta) &= \sigma\left(t,\eta_0(t)\right) + \frac{\partial \sigma_0}{\partial \eta}\left(\eta - \eta_0(t)\right) = \\ &= \sigma_0(t) - \xi_0(t) + \xi = g(t) + \xi. \end{aligned} \tag{5.3.43}$$

Здесь мы воспользовались тем, что в силу каноничности преобразования $dS$ является полным дифференциалом и, следовательно,

$$\left( \frac{\partial \sigma}{\partial \eta} \right)_t = \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)_\eta. \tag{5.3.44}$$

Между моделями $\sigma_0(t)$ и $\eta_0(t)$ существует следующее соотношение:

$$\begin{aligned}\sigma_0(t) &= \dot{X}(t)\sqrt{1-\eta_0^2(t)} + \dot{Y}(t)\eta_0(t),\\ \eta_0(t) &= \frac{\dot{Y}(t)\sigma_0(t) - \operatorname{sign}\left(\dot{Y}(t)\right)\dot{X}(t)\sqrt{\dot{X}^2(t)+\dot{Y}^2(t)-\sigma_0^2(t)}}{\dot{X}^2(t)+\dot{Y}^2(t)}.\end{aligned} \tag{5.3.45}$$

Поэтому для производящей функции получаем дифференциальное уравнение, которое несложно решить:

$$\begin{aligned}dS &= \left(g(t)+\xi\right)dt + \left(t - f(\xi)\right)d\xi,\\ S(t,\xi) &= \int g(t)\,dt - \int f(\xi)\,d\xi + t\xi.\end{aligned} \tag{5.3.46}$$

Для этой модели необходима сглаженная модель лучевой структуры $y_0(\eta)$ или $t_0(\eta)$. Найдем геометрическую производную $\dfrac{\partial t_0}{\partial y}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial t_0}{\partial y} &= \left.\frac{\partial t(y,\eta)}{\partial y}\right|_{y=y_0(\eta)} = \left.\left(\frac{\partial y(t,\eta)}{\partial t}\right)^{-1}\right|_{t=t_0(\eta)} = \left.\left(\frac{\partial^2 S(t,\eta)}{\partial\eta\,\partial t}\right)^{-1}\right|_{t=t_0(\eta)} =\\ &= \left.\left(\dot{Y}(t) - \dot{X}(t)\frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}\right)^{-1}\right|_{t=t_0(\eta)}.\end{aligned} \tag{5.3.47}$$

Для вспомогательной функции $f(\eta)$ получаем тогда выражение

$$f(\eta) = t_0(\eta) - \frac{\partial t_0}{\partial y}y_0(\eta) = t_0(\eta) - \frac{Y\left(t_0(\eta)\right)\sqrt{1-\eta^2} - X\left(t_0(\eta)\right)\eta}{\dot{Y}\left(t_0(\eta)\right)\sqrt{1-\eta^2} - \dot{X}\left(t_0(\eta)\right)\eta}. \tag{5.3.48}$$

Импульс $\xi$ имеет следующий вид:

$$\xi(\eta) = \int_0^{\eta}\left(\dot{Y}\left(t_0(\eta')\right) - \dot{X}\left(t_0(\eta')\right)\frac{\eta'}{\sqrt{1-\eta'^2}}\right)d\eta'. \tag{5.3.49}$$

Вспомогательная функция $g(t)$ имеет вид

$$\begin{aligned}g(t) &= \sigma_0(t) - \xi_0(t) =\\ &= \dot{X}(t)\sqrt{1-\eta_0^2(t)} + \dot{Y}(t)\eta_0(t) - \xi\left(\eta_0(t)\right).\end{aligned} \tag{5.3.50}$$

Вместо меры $\mu(t,\eta)$ введем меру $\nu(t,\xi)$. Определяя $\tilde{u}_0(\xi) = \tilde{u}_0\left(\eta(\xi)\right)$ и пользуясь определением меры

$$\left|\tilde{u}_0(\xi)\right|^2 d\xi = \left|u(t)\right|^2 \nu(t,\xi)^{-1}\,dt, \tag{5.3.51}$$

получаем

$$\left|\tilde{u}_0(\xi)\right|^2 d\xi \frac{d\eta}{d\xi} = \left|u(t)\right|^2 \nu(t,\xi)^{-1} \frac{d\eta}{d\xi} dt = \left|u(t)\right|^2 \mu(t,\eta)^{-1} dt. \qquad (5.3.52)$$

Отсюда получаем выражение для меры:

$$\begin{aligned} \nu(t,\xi)^{-1} &= \mu(t,\eta)^{-1} \frac{d\xi}{d\eta} = \\ &= \left(\dot{Y}(t) - \dot{X}(t)\frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}\right)\left(\dot{Y}(t_0(\eta)) - \dot{X}(t_0(\eta))\frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}\right) \approx \\ &\approx \left(\dot{Y}(t_0(\eta)) - \dot{X}(t_0(\eta))\frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}\right)^2. \end{aligned} \qquad (5.3.53)$$

Интегральный оператор Фурье будет записан в следующем виде:

$$\begin{aligned} u(t) &= \sqrt{\frac{ik}{2\pi}} \exp\left(ik\int g(t)\,dt\right) \int \sqrt{\nu^{-1}(t_0(\xi),\xi)} \exp(ikt\xi) \exp\left(-ik\int f(\xi)\,d\xi\right) \tilde{u}_0(\eta(\xi)) d\xi = \\ &= \sqrt{\frac{ik}{2\pi}} \exp\left(ik\int g(t)\,dt\right) \int \exp(ikt\xi) \frac{\exp\left(-ik\int f(\xi)\,d\xi\right)\tilde{u}_0(\eta(\xi))}{\dot{Y}(t_0(\xi)) - \dot{X}(t_0(\xi))\dfrac{\eta(\xi)}{\sqrt{1-\eta(\xi)^2}}} d\xi. \end{aligned} \qquad (5.3.54)$$

Этот интегральный оператор является композицией нелинейного преобразования координат, умножения на вспомогательную функцию и однократного преобразования Фурье, допускающего быструю реализацию. Применение этого оператора позволяет существенно ускорить прямое моделирование, особенно для частот 9–30 ГГц.

## Литература


1. *Jensen A.S., Lohmann M.S., Benzon H.-H., Nielsen A.S.* Full spectrum inversion of radio occultation signals // Radio Science. 2003. Vol. 38, No. 3. doi: 10.1029/2002RS002763.
2. *Jensen A.S., Lohmann M.S., Nielsen A.S., Benzon H.-H.* Geometrical optics phase matching of radio occultation signals // Radio Science. 2004. Vol. 39, No. 3. doi: 10.1029/2003RS002899.
3. *Gorbunov M.E., Lauritsen K.B.* Analysis of Wave Fields by Fourier Integral Operators and its Application for Radio Occultations // Radio Science. 2004. Vol. 39, No 4. RS4010, doi: 10.1029/2003RS002971.
4. *Gorbunov M.E., Lauritsen K.B.* Linearized Zverev Transform and its Application for Modeling Radio Occultations // Radio Science. 2007. Vol. 42, No 3. RS3022, doi: 10. 1029/2006RS003585.

# 6. Обратная задача радиопросвечивания атмосферы

## 6.1. Радиозатменное зондирование атмосфер планет и Земли

В этом разделе мы приведем краткий обзор развития радиозатменного метода, начиная от зондирования атмосфер планет и заканчивая экспериментами по зондированию атмосферы Земли. Приведенный список литературы не претендует на полноту, а призван отразить ключевые моменты в развитии и применениях метода.

Принцип радиозатменного зондирования планетных атмосфер был выдвинут еще в 1960-е годы [1]. К 1967 г. относятся первые работы по радиозатменному зондированию ионосферы и атмосферы Венеры [2] и атмосферы Марса [3]. Теоретическое рассмотрение задачи восстановления вертикального профиля показателя преломления в сферически-слоистой атмосфере из измерений доплеровского сдвига частоты было дано в работах 1968 г. [4, 5].

Радиозатменные исследования планетных атмосфер продолжались в 1970-е годы [6–14]. В этих экспериментах передатчик располагался на искусственных спутниках исследуемых планет, а приемник – на Земле. В 1970 г. была выдвинута идея использования линий связи между искусственными спутниками планет [15]. Вопросы связи между амплитудой и фазой радиозатменных сигналов рассмотрены в [16]. При исследовании колец Сатурна был впервые применен дифракционный метод обратного распространения [17, 18].

Первая попытка определения параметров атмосферы Земли радиозатменным методом относится к 1976 г. [19]. В дальнейшем радиозатменное зондирование атмосферы Земли стало предметом ряда как теоретических, так и экспериментальных работ. В этих работах использовались линии связи в дециметровом диапазоне между двумя искусственными спутниками Земли. Важное отличие атмосферы Земли от планетных атмосфер заключается в том, что к точности восстановления ее параметров предъявляются гораздо более жесткие требования. Кроме того, об атмосфере Земли итак имеется большой объем информации, поставляемой как спутниковыми, так и наземными системами контактного и дистанционного, активного и пассивного, лимбового и надирного зондирования. Чтобы радиозатменный метод мог успешно конкурировать с прочими методами зондирования, необходима была высокая стабильность частоты передатчика. Идея использования для этой цели спутников системы глобального позиционирования GPS была впервые выдвинута А.С. Гурвичем и Т.Г. Красильниковой в 1987 г. [30] и независимо от них (поскольку английский перевод работы [30] вышел лишь в 1990 г.) в 1988 г. группой исследователей из Jet Propulsion Laboratory (JPL) [31]. Численное моделирование зондирования атмосферы Земли при помощи спутников GPS и систем низкоорбитальных спутников было приведено в работах [32, 33].

В 1995 г. в США проведен первый пробный (proof-of-concept) эксперимент GPS/MET (GPS Meteorology) по радиозатменному зондированию атмосферы Земли при помощи сигналов системы GPS, принимавшихся на спутнике Microlab-1. Эксперимент показал в целом очень хорошие результаты [34–36]. Анализ данных этого эксперимента выявил эффекты многолучевого распространения, которые существенно затрудняли интерпретацию данных наблюдений в тропосфере. Для учета этих эффектов был предложен и применен метод обратного распространения [37–39]. В дальнейшем данные эксперимента GPS/MET использовались также для анализа ионосферы [40–43]. Объем данных, полученных в результате эксперимента GPS/MET, был относительно невелик, поскольку основные измерения были проведены в течение нескольких недель, когда отключалось искусственное зашумление сигнала.

Успех эксперимента GPS/MET позволил продолжить эксперименты по радиозатменному зондированию атмосферы Земли. Следующий эксперимент стартовал в 2000 г., когда на борту спутника CHAMP (Challenging Minisatellite Payload) был установлен приемник сигналов GPS. В этом эксперименте зондирование выполнялось уже на регулярной основе. Анализ данных эксперимента CHAMP привел к дальнейшему развитию методов обработки радиозатменных данных [44–50], в частности, автором данной монографии был разработан метод канонических преобразований [47]. В дальнейшем этот подход получил развитие [51–54], в результате которого были сформулированы принципы восстановления лучевой структуры волнового поля, позволяющие фактически сводить дифракционную обратную задачу к геометрооптической.

Существенным недостатком приемников, использованных в экспериментах GSP/MET и CHAMP, являлась реализованная в них система фазовой автоподстройки. Эта система неустойчиво работала в условиях сильных флуктуаций фазы и амплитуды сигнала, характерных для измерений в нижних 4 км в тропиках. Это приводило к отрицательным систематическим ошибкам измерения фазы. В силу того что эта ошибка падала с высотой, она приводила также к отрицательной ошибке определения угла рефракции и, следовательно, индекса рефракции.

Эксперимент COSMIC (Constellation Observing System for Meteorology, Ionosphere, and Climate) с улучшенной моделью приемника, работающего в режиме открытой петли, и включающий систему из 6 низкоорбитальных спутников, обсуждался начиная с 2000 г. [55–58]. Сам эксперимент стартовал в 2006 г. [59–61]. Система COSMIC поставляла ежедневно до 3000 глобально распределенных зондирований атмосферы. Значительный объем данных измерений позволил выполнить большое количество различных исследований как нейтральной атмосферы, так и ионосферы [62–85]. Реализация режима открытой петли позволила существенно сократить систематическую ошибку восстановления индекса рефракции в тропосфере, но тем не менее не устранила ее [69, 85, 86]. В приведенных работах анализировались различные механизмы возникновения отрицательной ошибки, связанные как со сверхрефракцией, так и с флуктуациями индекса рефракции. В настоящее время ресурс системы COSMIC почти исчерпан. Разрабатывается план запуска системы COSMIC-2, включающей 12 спутников [87].

В оставшейся части монографии мы разберем методы интерпретации радиозатменных данных.

## Литература


1. *Fjeldbo G., Eshleman V.R.* The Bistatic radar-occultation method for the study of planetary atmospheres // J. Geophys. Res. 1965. V. 70(13). P. 3217–3225. doi:10.1029/JZ070i013p03217
2. Mariner Stanford Group, 1967: Venus: Ionosphere and Atmosphere as Measured by Dual-Frequency Radio Occultation of Mariner V. // Science. V. 158(3809). P. 1678–1683. doi:10.1126/science.158.3809.1678
3. *Kliore A., Tito D.A.* Radio occultation investigations of the atmosphere of Mars // J. Spacecraft Rockets. 1967. V. 4(5). P. 578–582. doi:10.2514-3.28912
4. *Phinney R.A., Anderson D.L.* On the radio occultation method for studying planetary atmospheres // J. Geophys. Res. 1968. V. 73(5). P. 1819–1827. doi:10.1029/JA073i005p01819
5. *Fjeldbo G., Eshleman V.R.* The atmosphere of Mars analyzed by integral inversion of the Mariner IV occultation data // Planet. Space Sci. 1968. V. 16(8). P. 1035–1059. doi:10.1016/0032-0633(68)90020-2.
6. *Kliore A., Fjeldbo G., Seidel B*. First results of the Mariner-6 radio occultation measurement of the lower atmosphere of Mars // Radio Sci. 1970. V. 5(2). P. 373–379. doi:10.1029/RS005i002p00373
7. *Hogan J.S., Stewart R.W., Rasool S.I.* Radio occultation measurements of the Mars atmosphere with Mariners 6 and 7 // Radio Sci. 1972. V. 7(5). P. 525–537. doi:10.1029/RS007i005p00525
8. *Kliore A.J., Cain D.L., Fjeldbo G., Seidel B.L., Sykes. M.J., Rasool S.I.* The atmosphere of Mars from mariner 9 radio occultation measurements // Icarus. 1972. V. 17(2). P. 484–516. doi:10.1016/0019-1035(72)90014-0
9. *Fjeldbo G., Seiden B., Sweetnam D.* The Mariner 10 radio occultation measurements of the ionosphere of Venus // J. Atmos. Sci. 1975. V. 32(6). P. 1232–1236. doi:10.1175/1520-0469
10. *Fjeldbo G., Kliore A., Seidel B., Sweetnam D., Cain D.* The Pioneer 10 radio occultation measurements of the ionosphere of Jupiter // Astronomy and Astrophysics. 1975. V. 39(1). P. 91–96.
11. *Kolosov M.A.* et al. Radio occultation measurements of Venus atmosphere by means of satellites Venera-9 and Venera-10 // Radiotekhnika I Elektronika. 1976. V. 21(8). P. 1585–1594.
12. *Aleksandrov Y.N.* et al. Preliminary results of the two-frequency radio occultation of the nocturnal ionosphere of Venus using the Venera 9 and 10 satellites // Doklady Akademi Nauk SSSR. 1976. V. 229(1). P. 55–58.
13. *Kolosov M.A., Yakovlev O.I., Efimov A.I., Pavelyev A.G., Matyugov S.S.* Radio occultation of the Venusian atmosphere and bistatic radiolocation of the surface of Venus using the Venera-9 and Venera-10 satellites // Radio Sci. 1979. V. 14(1). P. 163–173. doi:10.1029/RS014i001p00163
14. *Kliore A.J.* et al. Vertical structure of the ionosphere and upper neutral atmosphere of Saturn from the Pioneer radio occultation // Science. 1980. V. 207(4429). P. 446-449. doi:10.1126/science.207.4429.446
15. *Goff R.W., Grossi M.D., Harrington J.V., Langworthy B.M.* Orbiter-to-orbiter radio occultation measurements of planetary atmospheres and ionospheres // AIAA Journal. 1970. V. 8(7). P. 1335–1342. doi:10.2514/3.5894
16. *Timofeeva T.S., Efimov A.I., Iakovlev O.I.* Influence of refraction on amplitude fluctuations of radio waves in the radio occultation of the Venusian atmosphere // Radiotekhnika I Elektronika. 1980. V. 25. P. 449–458.
17. *Marouf E.A., Tyler G.L., Eshleman V.R.* Theory of radio occultation by Saturn's rings // Icarus. 1982. V. 49(2). P. 161–193. doi:10.1016/0019-1035(82)90070-7
18. *Marouf E.A., Tyler G.L., Rosen P.A.* Profiling Saturn's rings by radio occultation // Icarus. 1986. V. 68(1). P. 120–166. doi:10.1016/0019-1035(86)90078-3
19. *Rangaswamy S.* Recovery of atmospheric parameters from the Apollo/Soyuz-ATS-F radio occultation data // Geophys. Res. Lett. 1976. V. 3(8). P. 483–486. doi:10.1029/GL003i008p00483
20. *Калашников И.Э., Яковлев О.И.* О возможности исследования атмосферы Земли методом радиопросвечивания // Космические исследования. 1978. Т. 16, № 6. С. 943–948.
21. *Калашников М.Э., Яковлев О.И.* Об определении параметров атмосферы Земли методом радиопросвечивания // Труды Пятого всесоюзного совещания по радиометеорологии. М.: Гидрометиздат, 1981. С. 184.

22. *Калашников И.Э., Матюгов С.С., Павельев А.Г., Яковлев О.И.* Анализ особенностей метода радиопросвечивания атмосферы Земли // Электромагнитные волны в атмосфере и космическом пространстве. М.: Наука, 1986. С. 208.

23. *Елисеев С.Д., Яковлев О.И.* Радиопросвечивание атмосферы Земли в диапазоне миллиметровых радиоволн // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 32, № 1. С. 3–10.

24. *Яковлев О.И., Гришмановский В.А., Елисеев С.Д., Кучерявенков А.И., Матюгов С.С.* Радиопросвечивание атмосферы Земли с помощью двух спутников // Доклады АН. 1990. Т. 315, № 1. С. 101–103.

25. *Яковлев О.И., Вилков И.А., Гришмановский В.А., Елисеев С.Д., Кучерявенков А.И., Ломаева В.В., Матюгов С.С., Молотов Е.П.* Рефракционное ослабление при радиопросвечивании атмосферы Земли на трассе спутник–спутник // Радиотехника и электроника. 1992. Т. 37, № 1. С. 42–48.

26. *Вилков И.А., Матюгов С.С., Яковлев О.И.* Флуктуации амплитуды при радиопросвечивании атмосферы Земли на трассе спутник–спутник // Радиотехника и электроника. 1993. Т. 38, № 5. С. 795–803.

*27. Yakovlev O.I., Matyugov S.S., Vilkov L.A*. Attenuation and scintillation of radio waves Earth atmosphere in radio occultation experiments on the satellite-to-satellite link // Radio Science. 1995. V. 30, № 3. P. 591–602.

28. *Яковлев О.И., Вилков И.А., Захаров А.И., Кучерявенкова И.Л., Кучеряевнков А.И., Матюгов С.С.* Изменение частоты, запаздывание и рефракция радиоволн в затменных экспериментах на трассе спутник–спутник // Радиотехника и электроника. 1995. Т. 40, № 9. С. 1337–1345.

29. *Яковлев О.И., Матюгов С.С., Вилков И.А., Захаров А.И., Кучерявенкова И.Л.* Флуктуации фазы и частоты радиоволн в затменных экспериментах на трассе спутник–спутник // Радиотехника и электроника. 1996. Т. 41, № 9. С. 1088–1093.

30. *Гурвич А.С., Красильникова Т.Г.* Навигационные спутники для радиозондирования атмосферы Земли // Исследования Земли из космоса. 1987. Т. 7, № 6. С. 1124–1131.

31. *Melbourne W.G., Yunck T.P., Young L.E., Hager B.H., Lindal G.F., Liu C. H., Born G.H.* GPS geoscience instrument for EOS and Space Station // JPL Proposal to NASA AO OSSA-1-88. JPL. 1988.

32. *Gorbunov M.E., Sokolovskiy S.V*. Remote sensing of refractivity from space for global observations of atmospheric parameters. Max-Planck-Institut für Meteorologie, 1993. Report No. 119.

33. *Gorbunov M.E., Sokolovskiy S.V., Bengtsson L.* Space refractive tomography of the atmosphere: Modeling of direct and inverse problems. Hamberg, Germany: Max-Planck-Institut für Meteorologie, 1996. Report No. 210.

34. *Ware R., Exner M., Feng D., Gorbunov M., Hardy K., Herman B., Kuo Y.-H., Meehan T., Melbourne W., Rocken C., Schreiner W., Sokolovskiy S., Solheim F., Zou X., Anthes R., Businger S., Trenberth K.* GPS sounding of the atmosphere from Low Earth Orbit: Preliminary results // Bulletin of the American Meteorological Society. 1996. No. 77. P. 19–40.

35. *Kursinski E.R.* et al. Initial results of radio occultation observations of Earth's atmosphere using the Global Positioning System // Science. 1996. V. 271(5252). P. 1107–1110. doi:10.1126/science.271.5252.1107

36. *Rocken C., Anthes R., Exner M., Hunt D., Sokolovskiy S., Ware R., Gorbunov M., Schreiner W., Feng D., Herman B., Kuo Y.-H., Zou X.* Analysis and validation of GPS/MET data in the neutral atmosphere // Journal of Geophysical Research. 1997. V. 102, No. D25. P. 29849–29866.

37. *Gorbunov M.E., Gurvich A.S.* Algorithms of inversion of Microlab-1 satellite data including effects of multipath propagation // Int. Journal of Remote Sensing. 1998. V. 19, No. 12. P. 2283–2300.

38. *Gorbunov M.E., Gurvich A.S.* Microlab-1 experiment: multipath effects in the lower troposphere // Journal of Geophysical Research. 1998. V. 103, No. D12. P. 13819–13826.

39. *Gorbunov M.E., Kornblueh L.* Analysis and validation of GPS/MET radio occultation data // Journal of Geophysical Research. 2001. V. 106, No. D15. P. 17,161–17,169.

40. *Schreiner W.S., Sokolovskiy S.V., Rocken C., Hunt D.C.* Analysis and validation of GPS/MET radio occultation data in the ionosphere // Radio Sci. 1999. V. 34(4). P. 949-966. doi:10.1029/1999RS900034

41. *Vorob'ev V.V., Gurvich A.S., Kan V., Sokolovskiy S.V., Fedorova O.V., Shmakov A.V.* Structure of the ionosphere from the radio-occultation GPS-"Microlab-1" satellite data: Preliminary results // Earth Observation and Remote Sensing. 1999. V. 15. P. 609–622.

42. *Gorbunov M.E., Gurvich A.S., Shmakov A.V.* Back-propagation and radio-holographic methods for investigation of sporadic ionospheric E-layers from Microlab-1 data // Int. J. Remote Sens. 2002. V. 23(4). P. 675–685. doi:10.1080/01431160010030091

43. *Sokolovskiy S., Schreiner W., Rocken C., Hunt D*. Detection of high-altitude ionospheric irregularities with GPS/MET // Geophys. Res. Lett. 2002. V. 29. doi:10.1029/2001GL013398

44. *Wickert J.* et al. Atmosphere sounding by GPS radio occultation: First results from CHAMP // Geophys. Res. Lett. 2001. V. 28(17). P. 3263−3266. doi:10.1029/2001GL013117

45. *Jakowski N., Wehrenpfennig A., Heise S., Reigber Ch., Lühr H., Grunwaldt L., Meehan T.K*. GPS radio occultation measurements of the ionosphere from CHAMP: Early results // Geophys. Res. Lett. 2002. V. 29(10). P. 1457. doi:10.1029/2001GL014364

46. *Beyerle G., Hocke K., Wickert J., Schmidt T., Marquardt C., Reigber C*. GPS radio occultations with CHAMP: A radio holographic analysis of GPS signal propagation in the troposphere and surface reflections // J. Geophys. Res. 2002. V. 107(D24). 4802. doi:10.1029/2001JD001402

47. *Gorbunov M.E.* Canonical transform method for processing radio occultation data in the lower troposphere // Radio Sci. 2002. V. 37(5). 1076. doi:10.1029/2000RS002592

48. *Gorbunov M.E., Kornblueh L.* Analysis and validation of Challenging Minisatellite Payload (CHAMP) radio occultation data // J. Geophys. Res. 2003. V. 108. 4584. doi:10.1029/2002JD003175

49. *Marquardt C., Schöellhammer K., Beyerle G., Schmidt T., Wickert J., Reigber C*. Validation and data quality of CHAMP radio occultation data. First CHAMP mission results for gravity, magnetic and atmospheric studies / C. Reigber, H. Lühr, P. Schwintzer, eds. Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 2003. P. 384−396.

50. *Beyerle G., Wickert J., Schmidt T., Reigber C.* Atmospheric sounding by global navigation satellite system radio occultation: An analysis of the negative refractivity bias using CHAMP observations // J. Geophys. Res. 2004. V. 109. D01106, doi:10.1029/2003JD003922

51. *Jensen A.S., Lohmann M.S., Benzon H.-H., Nielsen A.S.* Full spectrum inversion of radio occultation signals // Radio Sci. 2003. V. 38. 1040. doi:10.1029/2002RS002763

52. *Jensen A.S., Lohmann M.S., Nielsen A.S., Benzon H.-H*. Geometrical optics phase matching of radio occultation signals // Radio Sci. 2004. V. 39. RS3009. doi:10.1029/2003RS002899

53. *Gorbunov M.E., Benzon H.-H., Jensen A.S., Lohmann M.S., Nielsen A.S*. Comparative analysis of radio occultation processing approaches based on Fourier integral operators // Radio Sci.. 2004. V. 39. RS6004. doi:10.1029/2003RS002916

54. *Gorbunov M.E., Lauritsen K.B*. Analysis of wave fields by Fourier integral operators and their application for radio occultations // Radio Sci. 2004. V. 39. RS4010. doi:10.1029/2003RS002971

55. *Rocken C., Kuo Y.-H., Schreiner W. S., Hunt D., Sokolovskiy S., McCormick C.* COSMIC System description // Terr. Atmos. Ocean. Sci. 2000. V. 11(1). P. 157−186.

56. *Anthes R.A., Rocken C., Kuo Y.-H.* Applications of COSMIC to meteorology and climate // Terr. Atmos. Ocean. Sci. 2000. V. 11(1). P. 115−156.

57. *Cucurull L., Kuo Y.-H., Barker D., Rizvi S.R.H*. Assessing the impact of simulated COSMIC GPS radio occultation data on weather analysis over the Antarctic: A case study // Mon. Wea. Rev. 2004. V. 134(11). P. 3283−3296. doi:10.1175/MWR3241.1

58. *Wu B.-H., Chu V., Chen P., Ting T.* FORMOSAT-3/COSMIC science mission update // GPS Solut. 2005. V. 9(2). P. 111−121. doi:10.1007/s10291-005-0140-z

59. *Sokolovskiy S.V., Rocken C., Lenschow D.H., Kuo Y.-H., Anthes R.A., Schreiner W.S., Hunt D.C.* Observing the moist troposphere with radio occultation signals from COSMIC // Geophys. Res. Lett. 2007. V. 34. L18802. doi:10.1029/2007GL030458

60. *Schreiner W., Rocken C., Sokolovskiy S., Syndergaard S., Hunt D*. Estimates of the precision of GPS radio occultations from the COSMIC/FORMOSAT-3 mission // Geophys. Res. Lett. 2007. V. 34. L04808. doi:10.1029/2006GL027557

61. *Wang K.-Y., Lin S.-C*. First continuous GPS soundings of temperature structure over Antarctic winter from FORMOSAT-3/COSMIC constellation // Geophys. Res. Lett. 2007. V. 34. L12805. doi:10.1029/2007GL030159

62. *Sokolovskiy S., Schreiner W., Rocken C., Hunt D.* Optimal noise filtering for the ionospheric correction of GPS radio occultation signals // J. Atmos. Oceanic Technol. 2009 V. 26(7). P. 1398‒1403. doi:10.1175/2009JTECHA1192.1

63. *Sokolovskiy S., Rocken C., Schreiner W., Hunt D., Johnson J*. Postprocessing of L1 GPS radio occultation signals recorded in open-loop mode // Radio Sci. 2009. V. 44. RS2002. doi:10.1029/2008RS003907

64. *Schreiner W., Rocken C., Sokolovskiy S., Hunt D.* Quality assessment of COSMIC/FORMOSAT-3 GPS radio occultation data derived from single- and double-difference atmos-

pheric excess phase processing // GPS Solut. 2009. V. 14(1). P. 13−22. doi:10.1007/s10291-009-0132-5

65. *Zeng Z., Sokolovskiy S.* Effect of sporadic E clouds on GPS radio occultation signals // Geophys. Res. Lett. 2010. V. 37. L18817. doi:10.1029/2010GL044561

66. *Yue X., Schreiner W. S., Lei J., Sokolovskiy S. V., Rocken C., Hunt D. C., Kuo Y.-H.* Error analysis of Abel retrieved electron density profiles from radio occultation measurements // Ann. Geophys. 2010. V. 28. P. 217−222. doi:10.5194/angeo-28-217-2010

67. *Yue X., Schreiner W.S., Lei J., Rocken C., Kuo Y.-H., Wan W*. Climatology of ionospheric upper transition height derived from COSMIC satellites during the solar minimum of 2008 // J. Atmos. Sol.-Terr. Phys. 2010. V. 72(17). P. 1270−1274. doi:10.1016/j.jastp.2010.08.018.

68. *Sun B., Reale A., Seidel D.J., Hunt D.C.* Comparing radiosonde and COSMIC atmospheric profile data to quantify differences among radiosonde types and the effects of imperfect collocation on comparison statistics // J. Geophys. Res. 2010. V. 115. D23104. doi:10.1029/2010JD014457

69. *Sokolovskiy S., Rocken C., Schreiner W., Hunt D.* On the uncertainty of radio occultation inversions in the lower troposphere // J. Geophys. Res. 2010. V. 115. D22111. doi:10.1029/2010JD014058

70. *Schreiner W., Rocken C., Sokolovskiy S., Hunt D.* Quality assessment of COSMIC/FORMOSAT-3 GPS radio occultation data derived from single- and double-difference atmospheric excess phase processing // GPS Solut. 2010 V. 14(1). P. 13−22. doi:10.1007/s10291-009-0132-5

71. *Lin L., Zou X., Anthes R., Kuo Y-H.* COSMIC GPS radio occultation temperature profiles in clouds // Mon. Wea. Rev. 2010. V. 138(4). P. 1104–1118. doi: 10.1175/2009MWR2986.1

72. *Ho S.-P., Kuo Y.-H., Schreiner W., Zhou X*. Using SI-traceable global positioning system radio occultation measurements for climate monitoring [In "State of the Climate in 2009"] // Bull. Amer. Meteor. Sci. 2010. V. 91(7). P. S36−S37. doi: 10.1175/BAMS-91-7-StateoftheClimate

73. *Gorbunov M.E., Lauritsen K.B., Leroy S.S*. Application of Wigner distribution function for analysis of radio occultations // Radio Sci. 2010. V. 45. RS6011. doi:10.1029/2010RS004388

74. *Ho S.-P., Zhou X., Kuo Y.-H., Hunt D., Wang J.-H*. Global evaluation of radiosonde water vapor systematic biases using GPS radio occultation from COSMIC and ECMWF analysis // Remote Sens. 2010. V. 2(5). P. 1320−1330. doi:10.3390/rs2051320

75. *Schreiner W., Sokolovskiy S., Hunt D., Rocken C., Kuo Y.-H.* Analysis of GPS radio occultation data from the FORMOSAT-3/COSMIC and Metop/GRAS missions at CDAAC // Atmos. Meas. Tech. 2011. V. 4. P. 2255−2272. doi:10.5194/amt-4-2255-2011

76. *Scherllin-Pirscher B., Kirchengast G., Steiner A.K., Kuo Y.-H., Foelsche U.* Quantifying uncertainty in climatological fields from GPS radio occultation: an empirical-analytical error model // Atmos. Meas. Tech. 2011. V. 4(9). P. 2019−2034. doi:10.5194/amt-4-2019-2011

77. *Scherllin-Pirscher B., Steiner A.K., Kirchengast G., Kuo Y.-H., Foelsche U*. Empirical analysis and modeling of errors of atmospheric profiles from GPS radio occultation // Atmos. Meas. Tech. 2011. V. 4(9). P. 1875−1890. doi:10.5194/amt-4-1875-2011

78. *Guo P., Kuo Y.-H., Sokolovskiy S.V., Lenschow D.H*. Estimating atmospheric boundary layer depth using COSMIC radio occultation data // J. Atmos. Sci. 2011. V. 68(8). P. 1703-1713. doi:10.1175/2011JAS3612.1

79. *Chen S.-Y., Huang C.-Y., Kuo Y.-H., Sokolovskiy S.* Observational error estimation of FORMOSAT-3/COSMIC GPS radio occultation data // Mon. Wea. Rev. 2011. V. 139(3). P. 853−865. doi:10.1175/2010MWR3260.1

80. *Gorbunov M.E., Lauritsen K.B., Benzon H.-H., Larsen G.B., Syndergaard S., Sørensen M.B.* Processing of GRAS/METOP radio occultation data recorded in closed-loop and raw-sampling modes // Atmos. Meas. Tech. 2011. V. 4. P. 1021−1026. doi:10.5194/amt-4-1021-2011

81. *Gorbunov M.E., Shmakov A.V., Leroy S.S., Lauritsen K.B*. COSMIC radio occultation processing: Cross-center comparison and validation // J. Atmos. Oceanic Technol. 2011. V. 28. P. 737–751. doi:10.1175/2011JTECHA1489.1

82. *Yue X., Schreiner W.S., Kuo Y.-H.* A feasibility study of the radio occultation electron density retrieval aided by a global ionospheric data assimilation model // J. Geophys. Res. 2012. V. 117. A08301. doi:10.1029/2011JA017446

83. *Ho S.-P.* et al. Reproducibility of GPS radio occultation data for climate monitoring: Profile-to-profile inter-comparison of CHAMP climate records 2002 to 2008 from six data centers // J. Geo-

phys. Res. 2012. V. 117. D18111. doi:10.1029/2012JD017665

84. *Yue X., Schreiner W. S., Kuo Y.-H., Wu Q., Deng Y., Wang W*. GNSS radio occultation (RO) derived electron density quality in high latitude and polar region: NCAR-TIEGCM simulation and real data evaluation // J. Atmos. Sol.-Terr. Phys. 2013. V. 98. P. 39–49. doi:10.1016/j.jastp.2013.03.009

85. *Sokolovskiy S., Schreiner W., Zeng Z., Hunt D., Lin Y.-C., Kuo Y.-H.* Observation, analysis, and modeling of deep radio occultation signals: Effects of tropospheric ducts and interfering signals // Radio Sci. 2014. V. 49. doi:10.1002/2014RS005436

86. *Gorbunov M.E., Vorob'ev V.V., Lauritsen K.B.* Fluctuations of refractivity as a systematic error source in radio occultations // Radio Sci. 2015. V. 50. P. 656–669. doi:10.1002/2014RS005639

87. *Ho S.-P., Yue X., Zeng Z., Ao C.O., Huang C.-Y., Kursinski E.R., Kuo Y.-H*. Applications of COSMIC radio occultation data from the troposphere to ionosphere and potential impacts of COSMIC-2 data // Bull. Amer. Meteor. Soc. 2014. V. 95. P. ES18–ES22. doi:10.1175/BAMS-D-13-00035.1

## 6.2. Решение обратной задачи в приближении геометрической оптики

### Обращение углов рефракции

Мы переходим к решению обратной задачи радиозатменного зондирования атмосферы Земли. Простейший подход состоит в использовании приближений геометрической оптики и сферической симметрии атмосферы.

Радиозатменные данные представляют собой массивы измерений, включающих следующие переменные: орбитальные данные спутников – координаты спутника системы GPS или в общем случае спутника, оборудованного передатчиком, $\mathbf{x}_T(t)$, координаты спутника, оборудованного приемником $\mathbf{x}_R(t)$, и измерения фазовой задержки $\Delta s_{1,2}(t)$ и амплитуды $A_{1,2}(t)$. Нижний индекс относится к номеру частотного канала. Как мы видели в разделе 5.1, посвященном описанию геометрооптической модели радиозатменных экспериментов, нелинейная система уравнений (5.1.52) при наложении условия сферической симметрии среды и однолучевого распространения однозначно связывает производные фазовой задержки и орбитальные данные с направлениями луча у источника и приемника через, а значит, и с прицельными параметрами и углами рефракции в двух частотных каналах. Таким образом, определяются профили углов рефракции $\varepsilon_{1,2}(p)$. Измеряемые фазовые задержки и получаемые из них углы рефракции включают ионосферную компоненту. Поскольку ионосферный индекс рефракции обратно пропорционален квадрату частоты, в рамках линейного приближения нейтральный угол равен линейной комбинации углов рефракции в двух частотных каналах [1]:

$$\varepsilon(p) = \frac{f_1^2 \varepsilon_1(p) - f_2^2 \varepsilon_2(p)}{f_1^2 - f_2^2}. \qquad (6.2.1)$$

Как мы отмечали, линейная комбинация подавляет лишь крупномасштабную компоненту ионосферного вклада. Мелкомасштабная компонента приводит к появлению остаточной ошибки ионосферной коррекции. Методы подавления ионосферных шумов обсудим в разделе 6.4. Связь между углом рефракции и профилем показателя преломления задается уравнением (5.1.40), которое пе-

репишем в виде свертки, перейдя к переменным $x^2$ и $p^2$ и введя дополнительный нормировочный множитель:

$$\frac{\varepsilon(p)}{2\sqrt{\pi}p} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_p^\infty \frac{d\ln n}{d\left(x^2\right)}\frac{d\left(x^2\right)}{\sqrt{x^2-p^2}}, \tag{6.2.2}$$

Рассмотрим решение уравнений такого типа. Оператор вида

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_y^\infty \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{x-y}}, \tag{6.2.3}$$

переводящий функцию $f(x)$ в функцию $g(y)$, обладает интересным свойством: его квадрат равен оператору интегрирования с переменным нижним пределом:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty \frac{g(x)\,dy}{\sqrt{y-x}} &= \frac{1}{\pi}\int_x^\infty\int_y^\infty \frac{f(x')\,dx'}{\sqrt{x'-y}}\frac{dy}{\sqrt{y-x}} = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_x^\infty f(x')\int_x^{x'}\frac{dy}{\sqrt{(x'-y)(y-x)}}\,dx' = \int_x^\infty f(x')\,dx'.\end{aligned} \tag{6.2.4}$$

Это позволяет записать решение уравнения (6.2.3):

$$f(x) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dx}\int_x^\infty \frac{g(y)\,dy}{\sqrt{y-x}} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty \frac{dg}{dy}\frac{dy}{\sqrt{y-x}}, \tag{6.2.5}$$

где мы воспользовались свойством производной свертки:

$$\left(g*h\right)' = g'*h = g*h'. \tag{6.2.6}$$

Взаимно-обратные интегральные преобразования (6.2.3) и (6.2.5) носят имя выдающегося норвежского математика Нильса Хенрика Абеля. С использованием преобразований с ядром типа $(y-x)^{-\alpha}$ вводятся операторы дробного интегрирования и дифференцирования произвольной степени [2]. В частности, операторы (6.2.3) и (6.2.5) являются операторами половинного интегрирования и дифференцирования соответственно.

Поскольку уравнение (6.2.2) аналогично (6.2.5), его решение аналогично (6.2.3):

$$\ln n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_x^\infty \frac{\varepsilon(p)}{p}\frac{d\left(p^2\right)}{\sqrt{p^2-x^2}} = \frac{1}{\pi}\int_x^\infty \frac{\varepsilon(p)\,dp}{\sqrt{p^2-x^2}}. \tag{6.2.7}$$

или

$$n(x) = \exp\left(\frac{1}{\pi}\int_x^\infty \frac{\varepsilon(p)\,dp}{\sqrt{p^2-x^2}}\right). \tag{6.2.8}$$

Эта формула дает точное решение обратной задачи для сферически-слоистой среды без волноводов. Формула очень широко применяется как приближенное решение для реальной атмосферы с горизонтальными градиентами [3–8]. Восстановленную зависимость $n(x)$ можно преобразовать в $n(r)$, пользуясь

формулой $r(x) = \dfrac{x}{n(x)}$.

**Влияние волноводов**

Вывод формулы для угла рефракции в разделе 5.1 не требовал отсутствия волноводов, но он справедлив лишь для лучей с единственной точкой перигея, т.е. для любого луча на трассе космос–космос. Этот вывод неприменим для луча, заключенного в бесконечном волноводе. Формально угол рефракции такого луча бесконечен. Рассмотрим ситуацию с волноводом в интервале радиусов от $r_1$ до $r_2$. Как следует из рассмотрения в разделе 5.1 (рис. 14), $n(r_1)r_1 = n(r_2)r_2 = x_s$. В реалистичных условиях профили показателя преломления практически всегда монотонно убывают с высотой. В частности, для волновода в силу того, что $r_1 < r_2$, должно быть $n(r_1) > n(r_2)$. Рассмотрим профиль $n^*(x)$, составленный из участков профилей $n(x)$ под волноводом и над волноводом. В точке $x_s$ логарифм этого профиля имеет отрицательный скачок $\Delta\ln n = \ln n(r_2) - \ln n(r_1)$. Чтобы точно восстановить профиль $n^*(x)$ по формуле (6.2.8), необходим профиль угла рефракции, равный

$$\varepsilon^*(p) = \begin{cases} \varepsilon(p), p > x_s \\ -2p\int\limits_p^{x_s} + \int\limits_{x_s}^{\infty} \dfrac{d\ln n^*}{dx}\dfrac{dx}{\sqrt{x^2 - p^2}} + \dfrac{2p|\Delta\ln n|}{\sqrt{x_s^2 - p^2}}, p < x_s \end{cases}, \qquad (6.2.9)$$

где добавка учитывает дельта-функцию в производной $\ln n$ для лучей с точками перигея ниже волновода. Фактически измеряемый профиль угла рефракции при $p < x_s$ можно записать в следующем виде:

$$\varepsilon(p) = -2p\int\limits_p^{x_s} + \int\limits_{x_s}^{\infty} \frac{d\ln n^*}{dx}\frac{dx}{\sqrt{x^2 - p^2}} + 2p\int\limits_{n_1}^{n_2} \frac{|d\ln n|}{\sqrt{x^2 - p^2}}, \qquad (6.2.10)$$

где последний член относится к участку профиля $n$ внутри волновода и где $x > x_s$. В силу этого мы приходим к оценке

$$2p\int\limits_{n_1}^{n_2} \frac{|d\ln n|}{\sqrt{x^2 - p^2}} < \frac{2p|\Delta\ln n|}{\sqrt{x_s^2 - p^2}}. \qquad (6.2.11)$$

Следовательно, $\varepsilon(p) < \varepsilon^*(p)$ при $p < x_s$. Это приводит к тому, что применение формулы обращения в присутствии волноводов будет приводить к систематической отрицательной ошибке восстановления $n(r)$, при этом восстановить структуру волновода оказывается невозможно.

Это рассмотрение носило формальный характер. Угол рефракции имеет особенность при $p = x_s$. Практически измеряемые углы рефракции всегда конечны. Сильные пики в профиле угла соответствуют сигналам с низкой амплитудой, которые могут теряться на фоне измерительных шумов. Это усиливает систематическую отрицательную ошибку [10, 11]. Волноводы систематически образуются на высотах 1–2 км в морском пограничном слое в оп-

ределенных регионах над Атлантическим и Тихим океанами, где они могут приводить к значительным систематическим ошибкам восстановления показателя преломления [12].

**Восстановление метеопараметров**

Восстановленные профили $n(r)$ используются для определения температуры. При этом используются уравнение состояния

$$P = R_d \left(1 + c_q q\right) \rho T, \tag{6.2.12}$$

где $c_q = \frac{R_v}{R_d} - 1$, и уравнение статики

$$\frac{dP(z)}{dz} = -g(z)\rho(z), \tag{6.2.13}$$

где $R_d$ – газовая постоянная для сухого воздуха, $R_v$ – газовая постоянная для водяного пара, $q$ – удельная влажность, $\rho$ – плотность воздуха, $g(z)$ – ускорение силы тяжести на высоте $z$.

На высотах более 7–12 км влажность атмосферы становится пренебрежимо малой. Если ионосферный вклад в угол рефракции исключен, то восстановленный показатель преломления целиком относится к нейтральной атмосфере. Тогда можно определить плотность:

$$\rho(z) = \frac{N(z)}{C_1 R_d}. \tag{6.2.14}$$

Интегрируя затем уравнение статики (6.2.13), получаем давление $P(z)$, и из уравнения состояния (6.2.12) с $q = 0$ находим температуру $T(z)$.

В нижней тропосфере нужно определять две неизвестные величины: температуру $T(z)$ и удельное влагосодержание $q(z)$. Одного только профиля показателя преломления $n(z)$ для этого уже недостаточно. Возможны следующие способы обработки нижнетропосферных данных.

1. Восстановление «сухой температуры» в пренебрежении вкладом влажности. Такой способ очень удобен для оценки точности определения угла рефракции в численных экспериментах. При этом вместо сравнения найденного профиля угла рефракции с эталонным сравниваются профили сухой температуры. Мы будем пользоваться этим методом сравнения.

2. Можно использовать восстановленный показатель преломления $n(z) = 1 + N(z)$ и априорно заданный (например, на основании численного прогноза) профиль влажности $q(z)$ для определения температуры. Воспользуемся соотношением (2.3.19)

$$P_w = \frac{Pq}{a_q + b_q q}, \tag{6.2.15}$$

где $a_q = \frac{R_d}{R_v}$, $b_q = 1 - \frac{R_d}{R_v}$. Отсюда и из (2.3.3) можно найти зависимость

$$T(P,q,N)=\frac{C_1P+\sqrt{C_1^2P^2+\dfrac{4C_3NPq}{a_q+b_qq}}}{2N}. \qquad (6.2.16)$$

Тогда из (6.2.12) и (6.2.13) получаем

$$\frac{dP(z)}{dz}=-\frac{g(z)P(z)}{R_d\left(1+c_qq(z)\right)T\left(P(z),q(z),N(z)\right)}. \qquad (6.2.17)$$

При заданных $N(z)$ и $q(z)$ правая часть здесь является известной функцией давления. Это позволяет проинтегрировать уравнение (6.2.17) и найти профиль давления $P(z)$ и профиль температуры $T(z) = T(P(z), q(z), N(z))$. Такая температура называется гибридной [9, 3].

3. Аналогично определяется гибридный профиль влажности из восстановленного показателя преломления $n(z)$ и заданной температуры $T(z)$. Из формул (2.3.3) и (6.2.15) получаем зависимость

$$q\left(P,T,N\right)=\frac{a_qT\left(C_1P-NT\right)}{b_qNT^2-\left(C_1b_qT+C_3\right)P}. \qquad (6.2.18)$$

Уравнение статики тогда запишется в виде

$$\frac{dP(z)}{dz}=-\frac{g(z)P(z)}{R_d\left(1+c_qq\left(P(z),T(z),N(z)\right)\right)T(z)}. \qquad (6.2.19)$$

Его можно проинтегрировать и вычислить профиль давления $P(z)$, а затем найти профиль влажности $q(z) = q(P(z), T(z), N(z))$.

**Восстановление комплексного показателя преломления**

Формула обращения для поглощения выводится из (5.1.68) аналогично формуле обращения для углов рефракции:

$$kn_I(x)=-\frac{1}{\pi}\frac{dx}{dr}\int_x^\infty\frac{d\tau}{dp}\frac{dp}{\sqrt{p^2-x^2}}. \qquad (6.2.20)$$

Снова пользуясь свойством свертки (6.2.6), преобразуем формулу обращения:

$$\begin{aligned}kn_I(x)&=-\frac{1}{\pi}\frac{dx}{dr}\int_x^\infty\frac{d\tau}{dp^2}\frac{dp^2}{\sqrt{p^2-x^2}}=-\frac{1}{\pi}\frac{dx}{dr}\frac{d}{dx^2}\int_x^\infty\tau(p)\frac{dp^2}{\sqrt{p^2-x^2}}=\\&=-\frac{1}{\pi x}\frac{dx}{dr}\frac{d}{dx}\int_x^\infty\tau(p)\frac{pdp}{\sqrt{p^2-x^2}}=-\frac{1}{\pi x}\frac{d}{dr}\int_x^\infty\tau(p)\frac{pdp}{\sqrt{p^2-x^2}}.\end{aligned} \qquad (6.2.21)$$

Этот вариант формулы удобнее для практических применений, поскольку дифференцирование применяется не непосредственно к зашумленной измеряемой функции $\tau(p)$, а к ее интегральному преобразованию, обладающему свойством сглаживания.

**Обращение комплексного показателя преломления**

По восстановленным профилям комплексного показателя преломления на нескольких частотах можно восстанавливать профили давления, температуры и влажности. Дисперсия действительной части показателя преломления пренебрежимо мала, поэтому можно считать, что имеются профили $N(z)$ и $N_I^{(i)}(z), i = 1, K$, где $K$ – количество частотных каналов. Модель распространения миллиметровых волн, которую мы обсуждали в разделе 2.3, определяет зависимость комплексного показателя преломления от метеопараметров: $N = N^{(MPM)}(P, T, q)$, $N_I = N_I^{(MPM)}(f, P, T, q)$. Поэтому можно записать нелинейную систему из $K + 1$ уравнений:

$$\begin{aligned} N(z) &= N^{(MPM)}(P, T, q), \\ N_I^{(i)}(z) &= N_I^{(MPM)}(f_i, P, T, q). \end{aligned} \tag{6.2.22}$$

где давление $P$ является свободным параметром, от которого зависят решения $T(P, N(z), N_I(z))$ и $q(P, N(z), N_I(z))$, через $N_I$ мы обозначили совокупность мнимых частей показателя преломления во всех каналах $\left\{N_I^{(i)}, i = 1..K\right\}$. Эту систему можно решать численно, например методом оптимизации по Роджеру, который учитывает априорную информацию об ошибках восстановления профилей показателя преломления. Профиль давления можно найти, интегрируя уравнение статики

$$\frac{dP(z)}{dz} = -\frac{g(z)P(z)}{R_d\left(1 + c_q q\left(P(z), N(z), N_I(z)\right)\right)T\left(P(z), N(z), N_I(z)\right)}. \tag{6.2.23}$$

Подставляя полученный профиль давления в решения системы (6.2.22), мы получаем профили температуры $T(z) = T(P(z), N(z), N_I(z))$ и влажности $q(z) = q(P(z), N(z), N_I(z))$.

Простую модель ошибок восстановления мнимой части показателя преломления можно получить из формулы (5.1.66) для ошибки интегрального поглощения:

$$\delta N_I(x) = C N_I(x) \frac{\exp \tau(x)}{\tilde{\kappa}(x)}, \tag{6.2.24}$$

где нормированная амплитуда $\tilde{\kappa}(x)$ вычисляется для гладкой модели атмосферы. Нормировочный множитель $C$ зависит от ковариационных матриц ошибок измерения, и проще всего его определить по восстановленным значениям $N_I$ на высотах 20–25 км. Априори известно, что поглощение на этих высотах очень мало, поэтому восстановленный профиль $N_I$ будет давать оценку уровня шумов.

Модель распространения миллиметровых волн определяет зависимость комплексного показателя преломления также от других метеопараметров, таких как содержание жидкой (капельной) воды, скорость выпадения дождя, содержание льда. Поэтому можно аналогично сформулировать задачу вос-

становления большего количества метеопараметров, например температуры, давления, влажности и содержания жидкой воды. Практически, однако, такая задача оказывается неустойчивой, если использовать только частотные каналы на крыле линии поглощения водяного пара.

### Литература


1. *Воробьев В.В., Красильникова Т.Г.* Оценка точности восстановления атмосферного показателя преломления по измерениям доплеровского сдвига частоты на частотах, используемых в системе NAVSTAR // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1993. Т. 29. № 5. С. 626–632.
2. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторых их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
3. *Ware R., Exner M., Feng D., Gorbunov M., Hardy K., Herman B., Kuo Y.-H., Meehan T., Melbourne* W*., Rocken C., Schreiner W., Sokolovskiy S., Solheim F., Zou X., Anthes R., Businger S., Trenberth K.* GPS sounding of the atmosphere from low Earth orbit: Preliminary results // Bulletin of the American Meteorological Society. 1996. No. 77. P. 19–40.
4. *Kursinski E.R., Hajj G.A., Bertie W.I., Leroy S.S., Meehan T.K., Romans L.J., Schofield J.T., McLeish D.J., Melbourne W.G., Thornton C.L., Yunck T.P., Eyre J.R., Nagasaki R.N.* Initial results of radio occultation observation of Earth's atmosphere using the Global Positioning System // Science. 1996. No. 271. P. 1107–1110.
5. *Kursinski E.R., Hajj G.A., Schofield J.T., Linfield R.P., Hardy K.R.* Observing Earth's atmosphere with radio occultation measurements using the Global Positioning System // Journal of Geophysical Research. 1997. V. 102, No. D19. P. 23429–23465.
6. *Hocke K.* Inversion of GPS meteorology data // Annales Geophysicae. 1997. V. 15, No. 4. P. 443–450.
7. *Steiner A.K., Kirchengast G., Ladreiter H.P.* Inversion, error analysis, and validation of GPS/MET data // Annales Geophysicae. 1999. V. 17, No. 2. P. 122–138.
8. *Feng D.D., Herman B.M.* Remotely sensing the Earth's atmosphere using the Global Positioning System (GPS), the GPS/MET data analysis // Journal of Atmospheric and Oceanic Technology. 1999. V. 16, No. 8. P. 989–1002.
9. *Bengtsson L., Gorbunov M.E., Sokolovskiy S.V.* Space refractive tomography of the atmosphere, modeling of direct and inverse problems / Max-Planck Institute for Meteorology. Report No. 210. Hamburg, 1996. 59 p.
10. *Sokolovskiy S.* Effect of superrefraction on inversions of radio occultation signals in the lower troposphere // Radio Sci. V. 38, No. 3. 1058. doi:10.1029/2002RS002728, 2003
11. *Sokolovskiy S.* Modeling and inverting radio occultation signals in the moist troposphere // Radio Sci. 2001. V. 36, No. 3. P. 441–458.
12. *Xie F., Wu D.L., Ao C.O., Kursinski E.R., Mannucci A.J., Syndergaard S.* Super-refraction effects on GPS radio occultation refractivity in marine boundary layers // Geophys. Res. Lett, 2010. V. 37. L11805. Doi:10.1029/2010gl043299


## 6.3. Восстановление лучевой структуры волнового поля

### Общие замечания

Рассмотренные выше геометрооптические соотношения, лежащие в основе радиозатменного зондирования атмосферы, играют важнейшую роль в решении обратной задачи. Тем не менее геометрооптической техники недостаточно для успешного восстановления показателя преломления. Связано это с ее ограничениями: 1) геометрическая оптика не учитывает эффектов дифракции и 2) геометрооптические соотношения между фазой и углом рефракции неприменимы в случае многолучевого распространения.

В главах 4 и 5 мы последовательно пользовались понятием лучевого многообразия. Там была установлена связь между его структурой и решением задачи распространения волн в атмосфере. Построение асимптотического решения волновой задачи на основе ее геометрооптического решения (лучевого многообразия) аналогично построению квазиклассического решения квантовой задачи динамики частицы на основе множества ее классических траекторий. Такая процедура называется квантованием. Мы будем рассматривать обратную процедуру восстановления структуры лучевого многообразия на основе имеющегося волнового поля. Такую процедуру можно назвать деквантованием.

Применительно к обратной задаче радиозатменного зондирования процедура деквантования состоит из следующих шагов.

1. Построение фазового пространства, связанного с измеряемым сигналом. Координатами в этом пространстве являются координаты точки наблюдения, а импульсами – величины, связанные с направлениями наблюдаемых лучей. С точки зрения измерений каждое возможное направление луча соответствует определенной доплеровской частоте, а весь сигнал в случае многолучевого распространения является суперпозицией элементарных сигналов с плавной меняющейся мгновенной частотой и амплитудой. Это фазовое пространство является пространством геометрооптических лучей.
2. Построение канонического преобразования фазового пространства. Требование к этому преобразованию заключается в том, что проекция лучевого многообразия на новую координатную ось должна быть однозначной.
3. Построение интегрального оператора Фурье, реализующего это преобразование.
4. Вычисление волнового поля в новом представлении, вычисление нового импульса путем дифференцирования фазы, вычисление прицельных параметров $p$ и углов рефракции $\varepsilon$ лучей.

Весь математический аппарат, необходимый для реализации этой программы, подробно обсуждался в главах 4 и 5. Нам остается лишь его применить.

**Каноническое преобразование 1-го типа**

Начнем с рассмотрения канонического преобразования 1-го типа [4], которое применяется в сочетании с обратным распространением [37–39]. Вычисления в этом случае оказываются очень простыми. Рассмотрим поле $u(t)$, измеренное на низкоорбитальном спутнике. Приведем геометрию наблюдений к вертикальной с неподвижным источником (как описано в разделе 5.1) и воспользуемся процедурой обратного распространения. Задавая положение $x$ плоскости обратного распространения, определим поле $u(x, y)$ (раздел 3.5, рис. 6). Применим к этому полю описанную выше процедуру, чтобы определять его лучевую структуру.

В качестве исходных координат фазового пространства выберем $(y, \eta)$, где $\eta$ – $y$-компонента единичного вектора направления луча $\left(\sqrt{1-\eta^2}, \eta\right)$.

Для сферически слоистой среды прицельный параметр $p$ является однозначной координатой в пространстве лучей. Поэтому будем преобразовывать

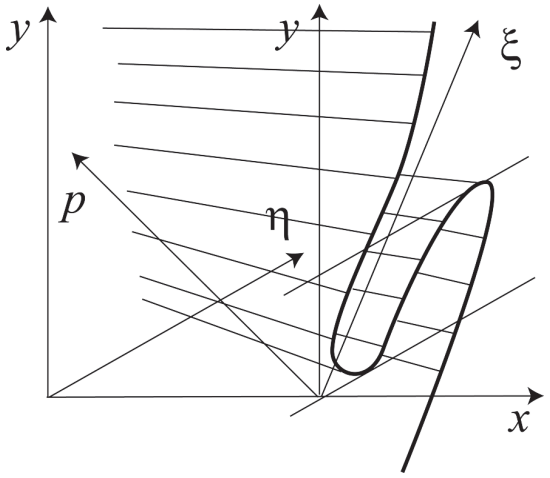



**Рис. 20.** Пример лучевого многообразия. Проекция многообразия на ось $y$ многозначна, в $y$-представлении присутствует многолучевость. Новая координатная ось $p$ выбрана так, что проекция многообразия на эту ось однозначна, и многолучевость устранена

поле $u(x, y)$ из представления $(y, \eta)$ в представление новых канонических координат $(p, \xi)$. Это обеспечит отсутствие многолучевости в новом представлении (рис. 20).

Новую координату $p$ можно выразить как скалярное произведение вектора $(x, y)$ на вектор нормали к лучу:

$$p = -x\eta + y\sqrt{1-\eta^2}. \tag{6.3.1}$$

Для определения нового импульса $\xi$ имеем условие каноничности преобразования (4.5.5): $d\eta \wedge dy = d\xi \wedge dp$, откуда получаем уравнение

$$\frac{\partial \xi}{\partial \eta}\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial \eta} = 1. \tag{6.3.2}$$

Если принять, что $\xi = \xi(\eta)$, то получаем

$$\frac{\partial \xi}{\partial \eta} = \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}}. \tag{6.3.3}$$

Поэтому каноническое преобразование имеет вид

$$\begin{aligned} p &= -x\eta + y\sqrt{1-\eta^2}, \\ \xi &= \arcsin\eta. \end{aligned} \tag{6.3.4}$$

Таким образом, новый импульс является углом между направлением луча и осью $x$. Для производящей функции 1-го типа из (4.5.7) следует дифференциальное уравнение

$$dS(p,\eta) = y(p,\eta)\,d\eta + \xi(\eta)\,dp = \frac{p + x\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}\,d\eta + \arcsin\eta\,dp, \qquad (6.3.5)$$

из которого получаем

$$S(p,\eta) = p\arcsin\eta - x\sqrt{1-\eta^2}. \qquad (6.3.6)$$

Символ оператора вычисляется из фазовой функции в соответствии с формулой (4.4.26)

$$a(p,\eta) = \sqrt{\left|\frac{\partial^2 S}{\partial p\,\partial\eta}\right|} = (1-\eta)^{1/4}. \qquad (6.3.7)$$

Это позволяет записать оператор в следующем виде:

$$\hat{\Phi}_1 u(p) = \sqrt{\frac{ik}{2\pi}}\int (1-\eta^2)^{1/4}\exp\left[ik\left(p\arcsin\eta - x\sqrt{1-\eta^2}\right)\right]\tilde{u}(x,\eta)\,d\eta. \qquad (6.3.8)$$

Для вычислений удобно вычесть радиус кривизны Земли $r_E$ из аргументов функций $u(x, y)$ и $\hat{\Phi}_1 u(p)$. Если $p = r_E + \Delta p$ и $y = r_E + \Delta y$, то можно ввести функции $v(x,\Delta y) = u(x, r_E + \Delta y)$ и $\hat{\Phi}_1' v(\Delta p) = \hat{\Phi}_1 u(r_E + \Delta p)$. Тогда интегральный оператор Фурье можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned}\hat{\Phi}_1' v(\Delta p) = \sqrt{\frac{ik}{2\pi}}\int (1-\eta^2)^{1/4}\exp\left[ik(\Delta p\arcsin\eta)\right]\times \\ \times\exp\left[ik\left(-x\sqrt{1-\eta^2} + r_E(\arcsin\eta - \eta)\right)\right]\tilde{v}(x,\eta)\,d\eta.\end{aligned} \qquad (6.3.9)$$

Член 3-го порядка $ikr_E(\arcsin\eta - \eta)$ в аргументе осциллирующей экспоненты не мал и очень важен. Пренебрежение им превращает этот оператор практически в обратное распространение к плоскости, расположенной при $x = 0$. Этот оператор можно переписать, перейдя к интегрированию по координате $\xi = \arcsin\eta$, следующим образом:

$$\begin{aligned}\hat{\Phi}_1' v(\Delta p) = \sqrt{\frac{ik}{2\pi}}\int \exp\left[ik\left(\Delta p\xi - x\cos\xi + r_E(\xi - \cos\xi)\right)\right]\times \\ \times\tilde{v}(x,\sin\xi)\cos^{3/2}\xi\,d\xi,\end{aligned} \qquad (6.3.10)$$

что является обратным Фурье-преобразованием функции

$$\widetilde{\hat{\Phi}_1' v}(\xi) = \exp\left[ik\left(-x\cos\xi + r_E(\xi - \cos\xi)\right)\right]\tilde{v}(x,\sin\xi)\cos^{3/2}\xi. \qquad (6.3.11)$$

Это означает, что такой оператор допускает быструю численную реализацию на основе быстрого преобразования Фурье.

Хотя и сам оператор $\hat{\Phi}_1$, и поле $u(x, y)$, на которое он действует, зависят от положения плоскости обратного распространения $x$, эта зависимость исчезает в функции $\hat{\Phi}_1 u$, поскольку оператор содержит комбинацию

$$\exp\left[ik\left(-x\sqrt{1-\eta^2}\right)\right]\tilde{u}(x,\eta)=\tilde{u}(0,\eta), \tag{6.3.12}$$

которая не зависит от $x$, как это следует из (3.4.4).

Преобразованная волновая функция $\hat{\Phi}_1' v(\Delta p)$ имеет форму $A(\Delta p)\exp\left(ik\int \xi(\Delta p)\,d\Delta p\right)$, где $A(\Delta p)$ – плавно меняющаяся амплитуда. Поэтому импульс можно вычислить следующим образом:

$$\xi(\Delta p)=\frac{1}{k}\frac{d}{d\Delta p}\arg\hat{\Phi}_1' v(\Delta p). \tag{6.3.13}$$

Угол рефракции как функцию прицельного параметра можно тогда найти как сумму $-\xi(\Delta p)$ и угла между осью $x$ и направлением луча с прицельным параметром $r_E + \Delta p$ у источника:

$$\varepsilon(r_E+\Delta p)=-\xi(\Delta p)+\arcsin\left(\frac{-x_T-\sqrt{x_T^2-2r_E\Delta p}}{r_E}\right). \tag{6.3.14}$$

Таким образом, прицельный параметр здесь задается как независимая координата. Это является важным достоинством метода канонических преобразований, поскольку в геометрооптической технике $\varepsilon$ и $p$ вычисляются из производной фазы одновременно, и измерительные шумы могут приводить к неоднозначной зависимости $\varepsilon(p)$.

В конечном счете для определения профиля угла рефракции по измерениям волнового поля $u(t)$ необходимо применить процедуру обратного распространения и затем на полученное поле интегральным оператором Фурье (6.3.10), который допускает эффективную численную реализацию на основе быстрого преобразования Фурье. Процедура обратного распространения требует многократного вычисления дифракционных интегралов. Для частот GPS и характерной геометрии радиозатменных наблюдений, это вычисление после различных оптимизаций оказывается достаточно быстрым. Тем не менее, как мы видели в разделе 5.3, существует приближенное решение (5.3.54) для пересчета поля с прямой (1-мерного фазового) на кривую (орбиту принимающего спутника). Этот оператор легко обратить, что позволит получить формулу для обратного распространения, также допускающую реализацию на основе быстрого преобразования Фурье. Мы не будем выписывать эту формулу, которую читатель может легко получить самостоятельно. Вместо этого рассмотрим построение операторов 2-го типа, реализующих преобразование измеренного поля в представление лучевых координат без промежуточных этапов.

**Каноническое преобразование 2-го типа**

Рассмотрим аналогичное решение задачи восстановления лучевой структуры волнового поля при помощи оператора 2-го типа. Впервые такая возможность была рассмотрена в [5–7] в контексте метода глобального спектра (Full Spectrum Inversion) и его обобщений. Простейшая формулировка этого метода относится к круговой геометрии радиозахода (круговые копланарные орбиты спутников, сферическая форма Земли, сферически-симметричная ат-

мосфера). К полной записи комплексного волнового поля $u(t)$ применяется преобразование Фурье. Для круговой геометрии производная фазы, или доплеровская частота, ω, пропорциональна прицельному параметру луча $p$. Можно ввести (вообще говоря, многозначную) зависимость $\omega(t)$, равную доплеровским частотам лучей, принимаемых в момент времени $t$. В многолучевых зонах, где зависимость $\omega(t)$ многозначна, она не может быть определена дифференцированием фазы поля $u(t)$. В отличие от $\omega(t)$, обратная зависимость $t(\omega)$ однозначна в предположении, что каждый прицельный параметр и значит, частота ω встречается не более одного раза. Как мы знаем из раздела 4.4, производная фазы преобразования Фурье $\tilde{u}(\omega)$ равна $-t(\omega)$. Это позволяет для каждого прицельного параметра $p$ найти время $t$ и соответствующие координаты спутников, для которых наблюдался луч с заданным прицельным параметром. Можно вычислить соответствующий угол рефракции. Преимущество этого метода в его численной простоте. Его недостаток в том, что он формулируется для круговой геометрии радиозахода, и его обобщение для реалистичной геометрии требует приближений.

Мы будем рассматривать синтез методов канонических преобразований и глобального спектра [8–10]. В [6] был введен общий оператор 2-го типа, применяемый непосредственно к данным, измеренным вдоль орбиты спутника для произвольной геометрии радиозахода, без применения процедуры обратного распространения. Для фазовой функции получено приближенное выражение. Впоследствии точное выражение для фазовой функции было найдено в [11]. Этот метод, таким образом, обобщает метод глобального спектра. Основные соотношения были нами фактически уже получены в контексте прямого моделирования, и остается лишь их применить для восстановления лучевой структуры измеренного волнового поля.

Снова рассматриваем комплексное поле $u(t) = A(t) \exp(ik\,\Psi(t))$, записанное вдоль траектории наблюдения. Вводим фазовое пространство с координатами $(t, \eta)$, где импульс $\eta = -\Delta\omega / k$, $\Delta\omega$ – доплеровский сдвиг частоты. Это определение основано на временной зависимости поля $u(t) = A(t) \exp(ik\,\Psi(t) - i\omega t)$. Соответствующая фазовая функция была уже получена в разделе 5.3:

$$S_2(p,t) = -p\theta - \sqrt{r_G^2 - p^2} + p\arccos\frac{p}{r_G} - \sqrt{r_L^2 - p^2} + p\arccos\frac{p}{r_L}. \quad (6.3.15)$$

Импульс в представлении лучевых координат равен углу рефракции с отрицательным знаком:

$$\xi(p,t) = -\theta(t) + \arccos\frac{p}{r_G(t)} + \arccos\frac{p}{r_L(t)} = -\varepsilon(p,t). \quad (6.3.16)$$

Эта величина равна тому углу рефракции, который был бы у луча с прицельным параметром $p$ при условии, что этот луч наблюдается в момент времени $t$. Таким образом, для обработки данных измерений волнового поля можно применить оператор 2-го типа с фазовой функцией (5.3.8), при помощи которого мы вычисляем преобразованное поле $\hat{\Phi}_2 u(p) = A'(p)\exp(ik\Psi'(p))$. Производная его эйконала $\Psi'(p)$ с отрицательным знаком равна фактическому

углу рефракции $\varepsilon(p) = \varepsilon(p, t_s(p))$.

Для круговой геометрии ($r_G = \text{const}$, $r_L = \text{const}$, $\dot{\theta} = \text{const}$) фазовая функция равна $S_2(p, y) = -p\theta + F(p)$, и оператор сводится к преобразованию Фурье. В методе глобального спектра фазовая функция $S_2(p, y)$ равна $-p\theta$. Производная фазы преобразованного поля равна $-\theta$, и угол рефракции можно найти как функцию от $\theta$ и $p$, используя уравнение (5.3.9) ($\varepsilon = \theta + F'(p)$).

Другой подход был введен в [12]. Рассматривалось преобразование Фурье по времени $t$ от волнового поля, фаза которого заменена величиной $k\Omega_0 \int \tilde{p}(t)dt$. Здесь $\Omega_0 = \left\langle \dot{\theta}(t) \right\rangle$ – нормировочный множитель, $\tilde{p}(t) = d\Psi / d\theta + \Delta\tilde{p}(t)$ – модель прицельного параметра, член $\Delta\tilde{p}(t)$ равен приближенной поправке на радиальные компоненты скоростей спутников, аналогично $F(\theta)$. В [12] приведены примеры хорошего качества восстановления углов рефракции этим методом. В этом методе используется линейное интегральное преобразование фазы измеренного поля. Следовательно, этот метод нелинеен по комплексному волновому полю $u(t)$, и поэтому он, вообще говоря, не сохраняет энергию.

Выражение для амплитудной функции было уже получено в разделе 5.3:

$$a_2(p,t) = \left( \sqrt{r_L^2 - p^2}\sqrt{r_G^2 - p^2} \left\{ \frac{r_L r_G}{p} \sin\theta \right\}_{3D} \right)^{1/2} \times \\ \times \left( \dot{\theta} - \frac{\dot{r}_G}{r_G} \frac{p}{\sqrt{r_G^2 - p^2}} - \frac{\dot{r}_L}{r_L} \frac{p}{\sqrt{r_L^2 - p^2}} \right). \tag{6.3.17}$$

Амплитудная функция $a_2(p, t)$ не играет никакой роли при вычислении углов рефракции. Например, можно было бы считать, что $a_2(p, t) \equiv 1$. Однако правильное определение амплитудной функции важно для восстановления атмосферного поглощения [4, 11]. Если имеется преобразованное волновое поле

$$v(p) = \hat{\Phi}_2 u(p) = A'(p) \exp\left(ik\Psi'(p)\right), \tag{6.3.18}$$

то амплитуда равна

$$A'(p) = A'_0 \exp\left(-\tau(p)\right), \tag{6.3.19}$$

где $\tau(p)$ – интегральное поглощение, которое мы обсуждали в разделах 5.1 и 6.2.

Оператор, определяемый фазовой функцией $S_2(p, t)$ (5.3.8) и символом $a_2(p, t)$ (6.3.17), решает проблему определения углов рефракции из измерений волнового поля, без применения обратного распространения. Однако этот оператор не сводится к преобразованию Фурье, поэтому его численная реализация будет медленной, особенно для частот 10–30 ГГц и выше. В разделе 5.3 мы построили приближение линеаризованного канонического преобразования, позволяющее свести этот оператор к преобразованию Фурье. Приведем здесь основные приближенные формулы. Обозначим импульс $\sigma = d\Psi / dt$ и приближенное значение прицельного параметра $\tilde{p}$:

$$\tilde{p}(t,\sigma) = p_0(t) + \frac{\partial p_0}{\partial \sigma}\left(\sigma - \sigma_0(t)\right) = f(t) + \frac{\partial p_0}{\partial \sigma}\sigma,$$
$$f(t) = p_0(t) - \left.\frac{\partial p_0}{\partial \sigma}\right|_{\sigma=\sigma_0(t)} \sigma_0(t), \tag{6.3.20}$$

где $\sigma_0(t) = -\dfrac{\Delta\omega_0(t)}{k}$, $\Delta\omega_0(t)$ – некоторая гладкая модель доплеровской частоты, $p_0(t) = p(\sigma_0(t), t)$. Определим координату $Y = Y(t)$, параметризующую траекторию, и соответствующий импульс следующим образом:

$$dY = \left(\frac{\partial p_0}{\partial \sigma}\right)^{-1} dt = \frac{\partial \sigma}{\partial p_0} dt,$$
$$\eta = \frac{\partial p_0}{\partial \sigma}\sigma, \tag{6.3.21}$$

и запишем линейное каноническое преобразование:

$$\tilde{p} = f(Y) + \eta,$$
$$\xi = -Y, \tag{6.3.22}$$

Производящая функция равна

$$S_2(\tilde{p}, Y) = -\tilde{p}Y + \int_0^Y f(Y')\,dY', \tag{6.3.23}$$

где

$$f(t) = p_0 - \left(\dot{\theta} - \frac{\dot{r}_G}{r_G}\frac{p_0}{\sqrt{r_G^2 - p_0^2}} - \frac{\dot{r}_L}{r_L}\frac{p_0}{\sqrt{r_L^2 - p_0^2}}\right)^{-1} \sigma_0. \tag{6.3.24}$$

Для $dY$ имеем следующее выражение:

$$dY = d\theta - \frac{dr_G}{r_G}\frac{p_0}{\sqrt{r_G^2 - p_0^2}} - \frac{dr_L}{r_L}\frac{p_0}{\sqrt{r_L^2 - p_0^2}} \approx \delta\theta. \tag{6.3.25}$$

и амплитудная функция равна

$$a_2(\tilde{p}, Y) = \left(\sqrt{r_L^2 - \tilde{p}^2}\sqrt{r_G^2 - \tilde{p}^2}\left\{\frac{r_L r_G \sin\theta}{\tilde{p}}\right\}_{3D}\right)^{1/2}. \tag{6.3.26}$$

В силу соотношения (6.3.22) производная фазы поля в представлении приближенного прицельного параметра $\tilde{p}$ равна $\xi(\tilde{p}) = -Y_s(\tilde{p})$. Амплитудную функцию $a_2(\tilde{p}, Y)$ в интегральном операторе Фурье приближенно заменим на $a_2(\tilde{p}, Y_s(\tilde{p}))$ и вынесем из-под интеграла. Полученный оператор будет композицией умножения на опорный сигнал $\exp\left(ik\int f(Y)\,dY\right)$, преобразо-

вания Фурье и умножения на амплитудную функцию:

$$\hat{\Phi}_2 u(\tilde{p}) = \sqrt{\frac{-ik}{2\pi}}\, a_2\left(\tilde{p}, Y_s(\tilde{p})\right) \int \exp(-ik\tilde{p}Y) \exp\left( ik \int_0^Y f(Y')\, dY' \right) u(Y)\, dY. \tag{6.3.27}$$

Оператор (5.3.24) преобразует волновое поле в представление приближенного прицельного параметра $\tilde{p}$. Используя уравнение (5.3.16), можно найти точное значение σ:

$$\sigma = \frac{\tilde{p} - f\left(Y_s(\tilde{p})\right)}{\dfrac{\partial p_0}{\partial \sigma}}. \tag{6.3.28}$$

Тогда точное значение прицельного параметра $p(\sigma, t)$ может быть найдено как функция $p(\tilde{p})$. Угол рефракции определяется соотношением

$$\varepsilon(p) = \theta\left(t\left(Y_s(p)\right)\right) - \arccos\frac{p}{r_G\left(t\left(Y_s(p)\right)\right)} - \arccos\frac{p}{r_L\left(t\left(Y_s(p)\right)\right)}, \tag{6.3.29}$$

Построенный интегральный оператор Фурье 2-го типа допускает численную реализацию на основе быстрого преобразования Фурье. Численный алгоритм на его основе существенно проще комбинации обратного распространения и интегрального оператора Фурье 1-го типа.

## Литература


1. *Gorbunov M.E., Gurvich A.S.* Algorithms of inversion of Microlab-1 satellite data including effects of multipath propagation // Int.l Journal of Remote Sensing. 1998. V. 19, No. 12. P. 2283–2300.
2. *Gorbunov M.E., Gurvich A.S.* Microlab-1 experiment: multipath effects in the lower troposphere // Journal of Geophysical Research. 1998. V. 103, No. D12. P. 13819–13826.
3. *Gorbunov M.E., Kornblueh L.* Analysis and validation of GPS/MET radio occultation data // Journal of Geophysical Research. 2001. V. 106, No. D15. P. 17,161–17,169.
4. *Gorbunov M.E.* Canonical transform method for processing GPS radio occultation data in lower troposphere // Radio Sci. 2002. V. 37, No. 5. doi: 10.1029/2000RS002592, p. 9-1–9-10
5. *Jensen A.S., Benzon H.-H., Lohmann M.S.* A new high resolution method for processing radio occultation data / Danish Meteorological Institute. Scientific Report No. 02-06. Copenhagen, 2002. 38 p.
6. *Gorbunov M.E., Lauritsen K.B.* Canonical transform methods for radio occultation data / Danish Meteorological Institute. Scientific Report 02-10, http://www.dmi.dk/dmi/Sr02-10.pdf. Copenhagen, 2002. 15 p.
7. *Jensen A.S., Lohmann M.S., Benzon H.-H., Nielsen A.S.* Full spectrum inversion of radio occultation signals // Radio Sci. 2003. V. 38, No. 3. doi: 10.1029/2002RS002763
8. *Gorbunov M.E., Benzon H.-H., Jensen A.S., Lohmann M.S., Nielsen A.S.* Comparative analysis of radio occultation processing approaches based on Fourier integral operators // Radio Sci. 2004. V. 39(6). RS6004. doi: 10. 1029/2003RS002916
9. *Gorbunov M.E., Lauritsen K.B.* Analysis of wave fields by Fourier Integral Operators and its application for radio occultations // Radio Sci. 2004. V. 39, No. 4. RS4010. doi: 10.1029/2003RS002971
10. *Горбунов М.Е.* Анализ данных радиозатменного зондирования атмосферы Земли с применением теории интегральных операторов Фурье // Электромагнитные волны и электронные системы. 2004. Т. 9, № 9-10. С. 3–15.

11. *Jensen A.S., Lohmann M.S., Nielsen A.S., Benzon H.-H.* Geometrical optics phase matching of radio occultation signals (manuscript submitted to Radio Science) / Danish Meteorological Institute. No. 2003RS002899. Copenhagen, 2003. 22 p.

12. *Lauritsen K.B., Lohmann M.S.* Unfolding of radio occultation multipath behavior using phase models / Danish Meteorological Institute. Scientific Report No. 02-11, http://www.dmi.dk/dmi/Sr02-11.pdf. Copenhagen, Denmark, 2002. 10 p.

## 6.4. Общая схема обработки данных измерений

### Исходные данные

Данные измерений представляют собой орбитальные данные спутников, а также амплитуды $A_{1,2}(t_i)$ и атмосферные набеги оптического пути $\Delta\Psi_{1,2}(t_i)$ для двух каналов системы GPS (L1 – 1.57542 ГГц и L2 – 1.22760 ГГц) с частотой выборки 50 Гц ($t_i = t_0 + 0.02i$ с). Полные оптические пути вычисляются как $\Psi_{1,2}(t_i) = \Psi_0(t_i) + \Delta\Psi_{1,2}(t_i)$, где $\Psi_0(t_i)$ – расстояние от передатчика до приемника. Измерение сигналов в многолучевых областях, где амплитуда и фаза сигнала подвержены сильным флуктуациям, является сложной технической задачей. В этих условиях приемник часто теряет сигнал или вносит в измерения значительные ошибки [1, 2].

Алгоритмы обработки несколько различаются для данных разных проектов. Данные проекта CHAMP записываются с частотой выборки 50 Гц в режиме фазовой автоподстройки (PLL, phase locked loop или CL, closed loop). В тропосфере, на высотах ниже 10 км, в условиях флуктуаций амплитуды и фазы, система фазовой автоподстройки работает неустойчиво и часто теряет сигнал. Это приводит к низкому качеству данных [3–5]. Особенно низким оказывается качество сигнала в канале L2. Приемник, использованный на спутнике CHAMP, не различает фазы, различающиеся на $\pi$. Это делает приемник нечувствительным к модуляции сигнала навигационными битами. Оборотная сторона такого решения состоит в том, что в условиях, когда вариации фазы между выборками превышают $\pi$, качество измерений резко ухудшается.

Данные проекта COSMIC записываются с частотой выборки 50 Гц в режиме фазовой автоподстройки для лучей с перигеями, лежащими выше 7–11 км. Эта высота варьируется в разных сеансах измерений. Ниже этой высоты включается режим открытой петли (OL, open loop) с той же частотой выборки. Режим открытой петли оптимален для слежения за сигналами с сильными вариациями фазы, которые наблюдаются при тропосферном распространении радиоволн. В этом режиме отсутствует обратная связь гетеродина с измеряемым сигналом. Гетеродин управляется грубой фазовой моделью. Записанные сигналы требуют дополнительной демодуляции для удаления навигационных бит и восстановления вариации фазы [6]. В режиме открытой петли измеряется только сигнал в канале L1. Демодуляция требует отдельной записи навигационных бит, поставляемых наземными станциями.

Данные проекта GRAS/METOP [7] аналогичны данным проекта COSMIC с той разницей, что данные в режиме открытой петли (RS, raw sampling) записываются с частотой выборки 1000 Гц. Столь высокая частота выборки позволяет выполнять демодуляцию без использования навигационных бит.

**Демодуляция фазовой задержки в канале L1**

Обозначим через $t_i$ моменты времени записи выборок сигнала, $I = 1...N$, где $N$ – количество данных. Навигационные биты $\tilde{B}_j$ даются как функция времени GPS, принимающая значения 0 и 1. Каждый навигационный бит соответствует добавке 0 или $\pi$ к фазе. Поскольку время GPS начала эксперимента содержится в файлах данных, можно вычислить навигационные биты $B_i$ , соответствующие моментам времени $t_i$ . Для некоторых сеансов навигационные биты могут отсутствовать полностью или их последовательность может покрывать лишь часть записанных данных. Если навигационный бит для момента $t_i$ отсутствует, мы полагаем $B_i = 0$.

Для понижения частоты сигнала вычитаем из измеренных фазовых задержек фазовую модель, вычисляемую для гладкой модели атмосферы на основе климатологии MSIS. При этом относительная влажность принимается равной 80% для высот меньше 15 км и 0% – выше 15 км. Для вычисления фазовой модели берется модельный вертикальный профиль показателя преломления в области зондирования, вычисляется профиль угла рефракции в предположении локальной сферической симметрии, по которому вычисляется фазовая задержка при заданных траекториях спутников. Эта процедура описана в разделе 5.1. Как показано в [6], даже грубая климатологическая модель атмосферного показателя преломления позволяет предсказывать доплеровскую частоту сигнала с точностью не хуже 10 Гц. Поскольку частота выборки данных COSMIC составляет 50 Гц, это означает, что после вычитания фазовой модели можно восстанавливать потерянные циклы в фазовой задержке.

Обозначим через $\tilde{\phi}_{1,i}$ фазу измеренного сигнала L1 с пониженной частотой:

$$\tilde{\phi}_{1,i} = k_1 \left( \Psi_1 \left( t_i \right) - \Psi_{MSIS} \left( t_i \right) \right). \tag{6.4.1}$$

Фаза демодулированного сигнала с пониженной частотой равна

$$\phi_{1,i} = \tilde{\phi}_{1,i} + \pi B_i. \tag{6.4.2}$$

После этого необходимо вычислить накопленную фазу. В режиме открытой петли, если имеются навигационные биты, накопление выполняется по полным циклам. В случае, когда навигационные биты отсутствуют, и в режиме фазовой автоподстройки накопление фазы L1 выполняется по половинным циклам. Процесс накопления фазы состоит в том, что в каждой выборке сигнала к фазе добавляется целое число полных ($2\pi$) или половинных циклов ($\pi$) так, чтобы минимизировать вариации фазы между выборками. После этого восстанавливается исходная вариация фазы $\Delta\Psi_{1,i}$ путем добавления ранее вычтенной фазовой модели. В отсутствие навигационных битов эта схема имитирует работу 2-квадрантного детектора, который не чувствителен к навигационным битам, однако не обеспечивает точного слежения за сигналом в условиях многолучевого распространения. Как мы уже отмечали, накопление фазы по половинным циклам обеспечивает хорошие результаты в случае высокой частоты выборки.

**Предварительная обработка данных измерений**

На первом этапе обработки данных делается грубая оценка профиля угла рефракции в геометрооптическом приближении на основе формул раздела 5.1, где производная фазовой задержки $\Delta\dot{\Psi}$ вычисляется с сильным сглаживанием (с вертикальным масштабом около 2 км). Данные, начиная с момента времени, где угол рефракции достигает 0.02 рад, отбрасываются. Статистический анализ [5] показывает, что такие данные практически непригодны для дальнейшей обработки.

Затем проводится анализ скользящих пространственных спектров (спектрограмм) $v_{1,2}(t, \eta)$ сигналов $u_{1,2}(t) = A_{1,2}(t)\exp\left[ik_{1,2}\Psi_{1,2}(t)\right]$ [17–21]:

$$v_{1,2}(t,\eta) = \int w(t'-t)\,A_{1,2}(t')\exp\left[ik_{1,2}\left(\Psi_{1,2}(t') - \Psi_{MSIS}(t')\right)\right]\times \\ \times\exp\left[-ik_{1,2}\left(\eta - \dot{\Psi}_{MSIS}(t)\right)\right]dt', \tag{6.4.3}$$

где $w(\Delta t)$ – оконная функция. Мы применяем окно в форме косинуса с шириной около 2 с.

Эти спектры можно пересчитывать в координаты $\epsilon$, $p$ с использованием зависимостей $\epsilon(t, \eta)$ и $p(t, \eta)$, которые получаются решением уравнений (5.3.5) и (5.3.7). Вместо прицельного параметра луча $p$ удобно пользоваться прицельной высотой луча над лимбом Земли $p - r_E$, где $r_E$ – радиус локальной кривизны геоида в плоскости радиозахода. Луч, касающийся Земли, имеет характерную прицельную высоту $r_E(n(r_E) - 1) = 2$ км, поскольку характерная величина показателя преломления $n$ на поверхности Земли равна $1+3\times10^{-4}$, а $r_E = 6370$ км. Более детально спектрограмму и ее обобщения будем рассматривать в главе 7.

В канале L2 часто происходит потеря сигнала. Для отсева таких данных и фильтрации шумов формируется оценочная функция качества сигнала L2. По спектрам вычисляются средняя величина и спектральная ширина прицельного параметра:

$$\overline{p}_{1,2}(t) = \frac{\int\left|v_{1,2}(t,\eta)\right|^2 p(t,\eta)\,d\eta}{\int\left|v_{1,2}(t,\eta)\right|^2 d\eta}, \\ \delta p_{1,2}(t) = \left(\frac{\int\left|v_{1,2}(t,\eta)\right|^2\left(p(t,\eta) - \overline{p}_{1,2}(t)\right)^2 d\eta}{\int\left|v_{1,2}(t,\eta)\right|^2 d\eta}\right)^{1/2}. \tag{6.4.4}$$

Эмпирическая оценочная функция принимается равной

$$W(t) = 1 - \exp\left[-\frac{\left(\overline{p}_2(t) - \overline{p}_1(t)\right)^2 + \delta p_2^2(t)}{\Delta p^2}\right], \tag{6.4.5}$$

где параметр $\Delta p = 0.2$ км. Эта функция оценивает ухудшение качества данных в канале L2. Показателями ухудшения качества данных являются боль-

шая ширина спектра $\delta p_2(t)$ и большое расхождение прицельных параметров в каналах L1 и L2, $\bar{p}_2(t) - \bar{p}_1(t)$.

Затем вычисляются сглаженные фазовые пути по профилям сглаженного прицельного параметра:

$$\bar{\Psi}_{1,2}(t) = \int_{t_0}^{t} \eta\left(\bar{p}_{1,2}(t'), t'\right) dt'. \tag{6.4.6}$$

Сглаженная ионосферная разность оптических путей вычисляется как $\Delta\bar{\Psi}(t) = \bar{\Psi}_2(t) - \bar{\Psi}_1(t)$ в интервале времени, где $W(t) < 0.7$. В тропосфере, где качество сигнала L2, как правило, очень низкое ($W(t) > 0.7$), $\Delta\bar{\Psi}(t)$ линейно экстраполируется. Для этого строится линейная регрессия $\Delta\bar{\Psi}(t)$ между моментом времени, когда луч достигает высоты 30 км, и моментом времени, когда $W(t)$ достигает величины 0.7.

Обозначим символом $D_i$ операцию вычисления конечных разностей сеточной функции $D_i F = F(t_{i+1}) - F(t_i)$. Откорректированные оптический путь $\Psi_2^{cor}(t)$ и амплитуда $A_2^{cor}(t)$ для канала L2 определяются как линейная комбинация данных L1 и L2 с весом, определяемым оценочной функцией $W(t)$:

$$\begin{aligned} D_i\Psi_2^{cor} &= D_i\Psi_2\left(1 - W(t_i)\right) + \left(D_i\Psi_1 + D_i\Delta\bar{\Psi}\right)W(t_i), \\ \Psi_2^{cor}(t_i) &= \sum_{j=1}^{i-1} D_j\Psi_2^{cor}, \\ A_2^{cor}(t_i) &= A_2(t_i)\left(1 - W(t_i)\right). \end{aligned} \tag{6.4.7}$$

Определение комбинации через конечные разности позволяет избавиться от влияния произвольных констант $\Psi_{1,2}^0$ в определениях оптических путей в каналах L1 и L2. Если брать комбинацию самих оптических путей, то линейная комбинация двух констант $\Psi_2^0\left(1 - W(t_i)\right) + \Psi_1^0 W(t_i)$ уже не будет константой, что будет приводить к значительным ошибкам вычисления угла рефракции.

**Обработка фазовой задержки в канале L2 и контроль качества**

Обработка фазовой задержки в канале L2 существенно отличается от обработки фазовой задержки в канале L1. Это объясняется следующими причинами: 1) прием сигнала в канале L2 не производится, когда приемник работает в режиме открытой петли. В этом случае вместо данных L2 подставляется грубая модель фазовой задержки; 2) данные в канале L2 содержат гораздо больше шумов по сравнению с данными в канале L1.

Мы применяем следующую схему подавления шумов и экстраполяции данных в канале L2. Данные L2 сначала пропускаются через радиоголографический фильтр [20]. Далее применяется схема коррекции данных в канале L2, описанная в [17], с изменениями, описанными ниже. На основе радиого-

лографического анализа [21, 22] определяем сглаженные профили прицельных параметров $\overline{p}_{1,2}(t)$, углов рефракции $\overline{\varepsilon}_{1,2}(t)$, доплеровских сдвигов частоты $\overline{d}_{1,2}(t)$ и атмосферных фазовых задержек $\Delta\overline{\Psi}_{1,2}(t)$ для каналов L1 и L2. Радиоголографический анализ также позволяет вычислить спектральные ширины прицельных параметров $\delta p_{1,2}(t)$ [17, 18]. Далее строим следующую штрафную функцию данных в канале L2 $Q^{L2}(t)$ и соответствующую весовую функцию $W(t)$:

$$Q^{L2}(t) = \left( \frac{\left| \overline{p}_1(t) - \overline{p}_2(t) \right|}{\Delta p_A} + \frac{\delta p_2(t)}{\Delta p_D} \right)^2, \qquad (6.4.8)$$

$$W(t) = 1 - \exp\left(-Q^{L2}(t)\right),$$

где значения параметров $\Delta p_A$ = 0.2 км и $\Delta p$ = 0.15 км были определены эмпирически.

Как указано выше, в тропосфере данные L2 отсутствуют, вместо них в файлах содержится грубая модель фазовой задержки. Весовая функция позволяет подавлять часть записи сигнала в канале L2, непригодную для дальнейшей обработки. Точка $t_R$, в которой весовая функция достигает значения 0.3 min ($W(t)$) + 0.7 max ($W(t)$), используется для оценки ионосферной разности между фазовыми задержками L1 и L2. Вначале мы оцениваем ионосферную разность углов рефракции $\Delta\varepsilon_I$, усредняя $\overline{\varepsilon}_2(p) - \overline{\varepsilon}_1(p)$ по интервалу шириной 1 км выше $p_1$ ($t_R$). Эта ионосферная разность экстраполируется константой в тропосферу, и по оценке угла рефракции в канале L2 $\overline{\varepsilon}_1(p) + \Delta\varepsilon_I$ мы вычисляем экстраполированный профиль фазовой задержки $\Delta\overline{\Psi}_2^{ext}(t)$ в канале L2. Ионосферная разность фазовой задержки оценивается величиной $\Delta\Psi_I(t) = \Delta\overline{\Psi}_2^{ext}(t) - \Delta\overline{\Psi}_1(t)$.

Весовая функция используется для вычисления откорректированной фазовой задержки $\Delta\Psi_2^{cor}(t)$ в канале L2, как описано в [17]: конечные разности функции $\Delta\Psi_2^{cor}(t)$ полагаются равными

$$\Delta\Psi_2^{cor}(t) = \left(\Delta\Psi_1 + \Delta\Psi_I\right) W(t) + \Delta\Psi_2(t)\left(1 - W(t)\right). \qquad (6.4.9)$$

**Определение углов рефракции в каналах L1 и L2**

Волновые поля $u_1(t)$ и $u_2^{cor}(t)$ преобразуются при помощи интегрального оператора Фурье $\hat{\mathbf{\Phi}}_2$, определяемого формулами (6.3.27), (6.3.26) и (6.3.24). Затем вычисляются углы рефракции $\epsilon_{1,2}(p)$ по формуле (6.3.16) [13–16]. Граница геометрооптической тени $p_1$ определяется по максимуму корреляции амплитуды $\left|\hat{\Phi}_2 u_1(p)\right|$ с θ-функцией. Для данных в канале L2 максимум кор-

реляции $\left|\hat{\Phi}_2 u_1(p)\right|$ с θ-функцией, $p_2$, определяет границу, ниже которой данные в канале L2 непригодны для обработки (как правило, $p_2 > p_1$). Для $p \in [p_1, p_2]$ углы рефракции в канале L2 $\epsilon_2(p)$ определялись как $\epsilon_1(p) + \Delta\epsilon(p)$, где $\Delta\epsilon(p)$ – оценка ионосферной разности $\epsilon_1(p) - \epsilon_2(p)$, вычисляемая по интервалу прицельных параметров $[p_1, p_1 + 1$ км$]$.

Профили углов рефракции $\epsilon_{1,2}(p)$ содержат вклад ионосферы. Поскольку ионосферный вклад обратно пропорционален квадрату частоты, в рамках линейного приближения можно удалить ионосферный вклад и вычислить компоненту угла рефракции $\epsilon(p)$, связанную с нейтральной атмосферой [8–11]. На высотах более 50 км ионосферная компонента угла рефракции становится существенно больше нейтральной компоненты. Это позволяет оценить остаточную погрешность ионосферной коррекции $\delta\epsilon_I(p)$ в профиле угла рефракции $\epsilon(p)$ [10].

**Оценка погрешностей углов рефракции**

Оценка погрешностей $\epsilon(p)$ в нижней тропосфере проводится при помощи анализа локальных спектров преобразованного волнового поля $\hat{\Phi}_2 u_1(p) = A'(p)\exp\left(ik\Psi'(p)\right)$. Для этого вычисляется эйконал $\bar{\Psi}'(p)$, сглаженный с окном 0.25 км, и скользящие спектры:

$$w(p,\xi) = \int_{p-\Delta p/2}^{p+\Delta p/2} \cos\frac{\pi(p'-p)}{\Delta p}\frac{\hat{\Phi}_2 u_1(p')}{\exp\left(ik\bar{\Psi}'(p')\right)}\exp\left(-ik\xi p'\right)dp', \quad (6.4.10)$$

где $\Delta p = 1.0$ км. Максимум спектра в среднем находится около $\xi = 0$. Тропосферная погрешность угла рефракции $\delta\epsilon_T(p)$ оценивается как ширина спектра:

$$\delta\epsilon_T(p) = \left(\frac{\int |w(p,\xi)|^2 \xi^2 d\xi}{\int |w(p,\xi)|^2 d\xi}\right)^{1/2}. \quad (6.4.11)$$

Среднеквадратичная погрешность $\delta\epsilon(p)$ определения угла рефракции принималась равной $\delta\epsilon_I(p)$ при высоте луча $p - r_E > 10$ км и $\delta\epsilon_T(p)$ при высоте луча $p - r_E < 10$ км.

**Статистическая регуляризация и контроль качества**

Для удаления ионосферной компоненты угла рефракции мы применяем комбинированную схему ионосферной коррекции и статистической оптимизации, оптимальную линейную комбинацию [12]. Эта схема основана на решении системы уравнений относительно вектора неизвестных, состоящего из нейтрального угла рефракции $\varepsilon_N(p)$ и ионосферного угла рефракции в канале L1 $\varepsilon_I(p)$. Ионосферный показатель преломления обратно пропорционален квадрату частоты. Ионосферная коррекция основана на приближении линейной зависимости ионосферной компоненты угла рефракции от ионосферного показателя преломления. Поэтому матрица, действующая на 2-мерный вектор неизвестных и вычисляющая вектор наблюдаемых углов рефракции $\varepsilon_{1,2}(p)$,

имеет вид [12]

$$K\begin{pmatrix}\varepsilon_N(p)\\ \varepsilon_I(p)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varepsilon_1(p)\\ \varepsilon_2(p)\end{pmatrix};\quad K=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & f_1^2/f_2^2\end{pmatrix}. \tag{6.4.12}$$

Пользуясь динамическими оценками ошибок матриц ковариации сигнала $C_s$ и шума $C_N$ [12], мы можем записать квазиобратную матрицу $\overline{K}^{-1}=\left(K^T C_N^{-1}K+C_S^{-1}\right)^{-1}K^T C_N^{-1}$ [23]. При этом диагональные элементы матрицы $\left(K^T C_N^{-1}K+C_S^{-1}\right)^{-1}$ равны дисперсиям ошибок нейтральной и ионосферной компонент угла рефракции, $\left\langle\delta\varepsilon_N^2(p)\right\rangle$ и $\left\langle\delta\varepsilon_I^2(p)\right\rangle$. Пользуясь оценкой ошибки нейтральной компоненты угла рефракции, формируем штрафную функцию восстановленного профиля угла рефракции:

$$Q^{SO}(p)=100\frac{\left\langle\delta\varepsilon_N^2(p)\right\rangle^{1/2}}{\left|\varepsilon_N(p)\right|}. \tag{6.4.13}$$

Эмпирически было найдено, что целесообразным является определение общей штрафной функции по следующей формуле:

$$Q^{OCC}=\max Q^{L2}(t)+\max Q^{SO}(p). \tag{6.4.14}$$

**Восстановление профиля сухой температуры**

При помощи преобразования Абеля (6.2.8) из профиля угла рефракции найдем профиль показателя преломления:

$$n(x)=\frac{1}{\pi}\exp\left(\int_x^\infty\frac{\varepsilon_N(p)\,dp}{\sqrt{p^2-x^2}}\right), \tag{6.4.15}$$

где $x(r) = rn(r)$ – рефракционный радиус. Восстановленный профиль $n(x)$ и зависимость $r(x) = x / n(x)$ задают профиль $n(r)$ в параметрической форме.

Если пренебречь влиянием влажности, то показатель преломления (2.3.2) равен

$$n=1+C_1\frac{P}{T}=1+C_1R_d\rho. \tag{6.4.16}$$

С учетом уравнений состояния и гидростатики получаем сухую температуру из восстановленного профиля показателя преломления:

$$T(z)=\frac{\int_z^\infty g(z')\rho(z')\,dz'}{R\rho(z)}=\frac{\int_z^\infty g(z')\left[n(z')-1\right]dz'}{R\left[n(z)-1\right]}, \tag{6.4.17}$$

где $z=r-r_E$ – высота над поверхностью Земли, $g(z)$ – высотный профиль ускорения силы тяжести.

Методы восстановления гибридных профилей температуры или влажности, рассмотренные в разделе 6.2, на практике применяются редко. Восста-

новление сухой температуры даже в условиях, когда вкладом влажности пренебречь нельзя, оказывается удобным методом сравнения радиозатменных данных с данными численного прогноза погоды. В этом случае из профилей прогностических метеопараметров также вычисляется сухая температура, которая сравнивается с температурой, восстановленной по радиозатменным данным.

**Обращение и оценка погрешностей восстановленной температуры**

Дисперсия восстановленного показателя преломления вычисляется следующим образом:

$$\left\langle \delta n^2(x) \right\rangle = \int_x^\infty \int_x^\infty \frac{\left\langle \delta\epsilon(p') \delta\epsilon(p'') \right\rangle dp' dp''}{\sqrt{p'^2 - x^2}\sqrt{p''^2 - x^2}}, \tag{6.4.18}$$

где ковариационная матрица углов рефракции $\left\langle \delta\epsilon(p') \delta\epsilon(p'') \right\rangle$ равна $\left\langle \delta\epsilon^2(p) \right\rangle$ при $p' = p'' = p$, а для остальных значений $p'$ и $p''$ ковариационная матрица в простейшем случае принимается треугольной с характерной шириной 1 км в соответствии с оценками [11]. В [24] разработаны эмпирические методы более точной статистической оценки ковариационных матриц.

Для погрешности восстановления температуры из (6.4.17) получаем следующее выражение:

$$\left\langle \delta T^2(z) \right\rangle = \frac{\left\langle \delta n^2(z) \right\rangle}{\left[ n(z) - 1 \right]^2} T^2 - 2 \frac{\int_z^\infty g(z') \left\langle \delta n(z) \delta n(z') \right\rangle dz'}{R\left[ n(z) - 1 \right]^2} T + \\ + \frac{\int_z^\infty \int_z^\infty g(z') g(z'') \left\langle \delta n(z') \delta n(z'') \right\rangle dz' dz''}{R^2 \left[ n(z) - 1 \right]^2}. \tag{6.4.19}$$

Считая радиус корреляции погрешности $\delta n(z)$ существенно меньше высоты однородной атмосферы, можно приближенно записать

$$\left\langle \delta T^2 \right\rangle^{1/2} = \left\langle \delta n^2 \right\rangle^{1/2} \frac{T}{n-1}. \tag{6.4.20}$$

## Литература


1. *Sokolovskiy S.V.* Modeling and inverting radio occultation signals in the moist troposphere // Radio Sci. 2001. V. 36, No. 3. P. 441–458.
2. *Sokolovskiy S.V.* Tracking tropospheric radio occultation signals from low earth orbit // Radio Sci. 2001. V. 36, No. 3. P. 483–498.
3. *Beyerle G., Gorbunov M.E., Ao C.O.* Simulation studies of GPS radio occultation measurements // Radio Sci. 2003. V. 38, No. 5. 1084. doi: 10.1029/2002RS002800
4. *Ao C.O., Meehan T.K., Hajj G.A.* et al. Lower-troposphere refractivity bias in GPS occultation retrievals // J. Geophys. Res. 2003. V. 108, No. D18. 4577. doi:10.1029/2002JD003216
5. *Gorbunov M.E., Kornblueh L.* Analysis and validation of Challenging Minisatellite Payload (CHAMP) radio occultation data // J. Geophys. Res. 2003. V. 108. D18. P. 4584. doi:10.1029/2002JD003175

6. *Sokolovskiy S., Rocken C., Hunt D., Schreiner W., Johnson J., Masters D., Esterhuizen S.* GPS profiling of the lower troposphere from space: Inversion and demodulation of the open-loop radio occultation signals // Geophys. Res. Lett. 2006. V. 33. L14816. doi:10.1029/2006GL026112

7. *Gorbunov M.E., Lauritsen K.B., Benzon H.-H., Larsen G.B., Syndergaard S., Sørensen M.B.* Processing of GRAS/METOP radio occultation data recorded in closed-loop and raw-sampling modes // Atmos. Meas. Tech. 2011. V. 4. P. 1021−1026. doi:10.5194/amt-4-1021-2011

8. *Sokolovskiy S., Hunt D.* Statistical optimization approach for GPS/MET data inversions. URSI GPS/MET Workshop. Tucson, AZ, 1996.

9. *Syndergaard S.* On the ionospheric calibration in GPS radio occultation measurements // Radio Sci. 2000. V. 35, No. 3. P. 865–883.

10. *Gorbunov M.E.* Ionospheric correction and statistical optimization of radio occultation data // Radio Sci. 2002. V. 37. P. 17–1–17–9. doi: 10.1029/2000RS002370

11. *Воробьев В.В., Кан В.* Фоновые флуктуации при просвечивании ионосферы в эксперименте GPS-Microlab-1 // Изв. вузов. Радиофизика. 1999. Т. XLIIб № 6. С. 511-523.

12. *Gorbunov M.E.* Ionospheric correction and statistical optimization of radio occultation data // Radio Sci. 2002. V. 37, No. 5. P. 17-1–17-9. doi: 10.1029/2000RS002370

13. *Gorbunov M.E.* Canonical transform method for processing GPS radio occultation data in lower troposphere // Radio Sci. 2002. V. 37, No. 5. P. 9-1–9-10. doi: 10.1029/2000RS002592

14. *Jensen A.S., Lohmann M.S., Benzon H.-H., Niels A.S.* Full spectrum inversion of radio occultation signals // Radio Sci. 2003. V. 38, No. 3. P. 6-1–6-15. doi: 10.1029/2002RS002763

15. *Gorbunov M.E., Lauritsen K.B.* Analysis of wave fields by Fourier Integral Operators and its application for radio occultations // Radio Sci. 2004. V. 39, No. 4. RS4010. doi: 10.1029/2003RS002971

16. *Jensen A.S., Lohmann M.S., Nielsen A.S., Benzon H.-H.* Geometrical optics phase matching of radio occultation signals // Radio Sci. 2004. V. 39, No. 3. RS3009. doi: 10.1029/2003RS002899

17. *Горбунов М.Е., Лауритсен К.Б., Родин А., Томассини М., Корнблю Л.* Анализ данных эксперимента CHAMP по радиозатменному зондированию атмосферы Земли // Изв. РАН. Физики атмосферы и океана. 2005. Т. 41, №. 6. С. 798–813.

18. *Gorbunov M.E., Lauritsen K.B., Rhodin A., Tomassini M., Kornblueh L.* Radio holographic filtering, error estimation, and quality control of radio occultation data // Journal of Geo-physical Research. 2006. V. 111, No. D10. D10105. doi: 10.1029/2005JD006427

19. *Gorbunov M.E., Kornblueh L.* Analysis and validation of Challenging Minisatellite Payload (CHAMP) radio occultation data // Journal of Geophysical Research. 2003. V. 108, No. D18. P. 4584. doi: 10.1029/2002JD003175

20. *Gorbunov M.E., Lauritsen K.B.* Radio holographic filtering of noisy radio occultations // Atmosphere and Climate Studies by Occultation Methods / Ed. by U. Foelsche, G. Kirchengast, A. Steiner. Berlin – Heidelberg – New York: Springer, 2006. P. 127–134.

21. *Igarashi K., Pavelyev A., Hocke K., Pavelyev D., Kucherjavenkov I.A., Matyugov S., Zakharov A., Yakovlev O.* Radio holographic principle for observing natural processes in the atmosphere and retrieving meteorological parameters from radio occultation data // Earth, Planets, and Space. 2000. V. 52, No. 11. P. 893−899.

22. *Gorbunov M.E., Benzon H.-H., Jensen A.S., Lohmann M.S., Nielsen A.S.* Comparative analysis of radio occultation processing approaches based on Fourier integral operators // Radio Sci. 2004. V. 39, No. 6. P. RS6004. doi: 10.1029/2003RS002916

23. *Турчин В.Ф., Нозик В.З.* Статистическая регуляризация решения некорректных задач // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1969. Т. 5, № 1. С. 29–38.

24. *Li Y., Kirchengast G., Scherllin-Pirscher B., Wu S., Schwaerz M., Fritzer J., Zhang S., Carter B.A., Zhang K.* A new dynamic approach for statistical optimization of GNSS radio occultation bending angles for optimal climate monitoring utility // Journal of Geophysical Research: Atmospheres. 2013. V. 118. P. 13,022–13,040. doi:10.1002/2013JD020763

## 6.5. Методы вариационного усвоения

**Вводные замечания**

Простейший способ обработки радиозатменных данных состоит в решении обратной задачи восстановления вертикального профиля показателя преломления в приближении локальной сферической симметрии. Точность этого решения оказывается недостаточной в нижней тропосфере из-за значительных горизонтальных градиентов метеополей. Можно формулировать обратную задачу на основе томографического подхода. Однако в радиозатменных экспериментах технически сложно создать систему спутников, которая могла бы поставить достаточное количество данных для томографии. Недостатком стандартного томографического подхода является то, что рефрактометрические данные используются изолированно, без учета других данных и прогностической информации.

В настоящее время наиболее перспективным подходом к использованию различным данных об атмосфере признано прямое вариационное усвоение. Эта методика основана на использовании динамической модели глобальной циркуляции атмосферы и модели измеряемой величины, или оператора наблюдений. Оператор наблюдений позволяет рассчитать наблюдаемую величину, например профиль угла рефракции при данной геометрии радиозахода, по заданным сеточным метеополям. Оператор наблюдений, вычисляющий профиль угла рефракции на основе геометрической оптики, мы рассматривали в главе 5. При прямом вариационном усвоении рассчитывается разность между реальными измерениями и результатами применения оператора наблюдений к спрогнозированному вектору модельных переменных. На основании априорных ковариационных матриц ошибок прогноза, оператора наблюдений и реальных измерений отыскивается наиболее вероятный вектор состояния атмосферы при заданных измерениях. В зависимости от того, рассматривается ли состояние атмосферы в один фиксированный момент времени или динамика на некотором интервале времени, методы прямого усвоения делятся на 3- и 4-мерные.

Для отыскания наиболее вероятного состояния атмосферы строится штрафная функция на множестве всех возможных состояний, которая зависит от условной плотности вероятности. В численных алгоритмах прямого усвоения отыскивается максимум этой функции при помощи итерационного алгоритма. В алгоритмах оптимизации требуется вычислять производные измеряемой величины по компонентам вектора состояния атмосферы. Для этого используется линеаризованная присоединенная модель оператора наблюдений.

Достоинством прямого вариационного усвоения является то, что этот подход позволяет использовать в комплексе все имеющиеся сведения об атмосфере, включая различные данные измерений и динамическую модель. При этом автоматически решаются такие проблемы, как разделение вкладов сухой и влажной компонентов атмосферы. Недостатком этого подхода является необходимость очень большого объема вычислений, т.к. оптимизация штрафной функции требует десятков или сотен итераций, и на каждой итерации необходимо заново вычислять оператор наблюдений и его производные. Од-

нако с учетом быстрых темпов развития вычислительной техники этот недостаток оказывается не столь существенным, и прямое вариационное усвоение находит очень широкое применение.

В данном разделе мы рассмотрим построение линеаризованной присоединенной модели рефрактометрических измерений. Как было показано в разделе 6.3, применение асимптотических методов позволяет извлекать информацию о геометрооптической лучевой структуре измеренного волнового поля. Поэтому будем использовать геометрооптическую модель рефрактометрических измерений. При этом вся модель разделяется на блоки:

1. Модель поля показателя преломления.
2. Модель угла рефракции.

Для каждого из этих блоков будем вычислять линеаризованную модель. Окончательно производные оператора наблюдений вычисляются по обычному цепному правилу. Такое разделение на блоки позволяет достичь большей гибкости при построении систем усвоения радиозатменных данных.

**Общие принципы прямого вариационного усвоения**

Общий принцип прямого вариационного усвоения состоит в нахождении наиболее вероятного вектора состояния атмосферы при заданных измерениях и динамических уравнениях. Апостериорная плотность вероятности вектора состояния атмосферы $\mathbf{X}$ в некоторый фиксированный момент времени может быть представлена как нормированное произведение априорной плотности вероятности, вычисляемой на основе прогностической оценки $\mathbf{X}_b$ , и вероятности вектора измеряемых величин $\mathbf{Y}$:

$$P(\mathbf{X} \mid \mathbf{Y}) = \frac{1}{N} P(\mathbf{X} \mid \mathbf{X}_b) P(\mathbf{Y} \mid \mathbf{X}), \tag{6.5.1}$$

где $N$ – нормировочная константа.

Если принять, что ошибки прогноза, измерений и оператора наблюдений подчиняются Гауссовой статистике и независимы друг от друга, то можно записать явное выражение для плотности вероятности [1]:

$$P(\mathbf{X} \mid \mathbf{Y}) = \frac{1}{N} \exp\left( -\frac{1}{2} \left(\mathbf{Y} - H(\mathbf{X})\right) \left(O + F\right)^{-1} \left(\mathbf{Y} - H(\mathbf{X})\right)^T - \right.$$
$$\left. -\frac{1}{2} \left(\mathbf{X} - \mathbf{X}_b\right) B^{-1} \left(\mathbf{X} - \mathbf{X}_b\right)^T \right), \tag{6.5.2}$$

где $H$ – оператор наблюдений, $O$ – ковариационная матрица ошибок измерений, $F$ – ковариационная матрица ошибок оператора наблюдений, $B$ – ковариационная матрица ошибок прогноза. Поэтому для 3-мерного вариационного усвоения необходимо минимизировать штрафную функцию, представляемую в виде следующей квадратичной формы:

$$J(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} \left(\mathbf{Y} - H(\mathbf{X})\right) \left(O + F\right)^{-1} \left(\mathbf{Y} - H(\mathbf{X})\right)^T +$$
$$+ \frac{1}{2} \left(\mathbf{X} - \mathbf{X}_b\right) B^{-1} \left(\mathbf{X} - \mathbf{X}_b\right)^T . \tag{6.5.3}$$

В алгоритмах минимизации требуется ее градиент, записываемый в виде

$$\nabla_{\mathbf{X}} J(\mathbf{X}) = -H'(\mathbf{X})\left(O+F\right)^{-1}\left(\mathbf{Y}-H(\mathbf{X})\right)^{T} + B^{-1}\left(\mathbf{X}-\mathbf{X}_b\right)^{T}, \quad (6.5.4)$$

где $H'(\mathbf{X})$ – производная Фреше оператора наблюдений.

В 4-мерном усвоении предполагается, что имеется ряд наблюдений $\mathbf{Y}$ в моменты времени $t_0 ... t_R$, и прогноз $\mathbf{X}_b$ задан как функция времени $t$ и начального условия $\mathbf{X}_0$ в момент времени $t_0$. При этом ищется наиболее вероятное начальное условие $\mathbf{X}_0$. Условная плотность вероятности записывается тогда следующим образом:

$$P(\mathbf{X}_0 \mid \mathbf{Y}(t_0), \ldots, \mathbf{Y}(t_R)) = \frac{1}{N}\prod_{r=0}^{R} P(\mathbf{Y}(t_r) \mid \mathbf{X}_b(t_r, \mathbf{X}_0)). \quad (6.5.5)$$

Принимая снова Гауссову статистику ошибок, можем записать штрафную функцию в следующем виде [2]:

$$J(\mathbf{X}_0) = \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{R}\left(\mathbf{Y}(t_r) - H(\mathbf{X}_b(t_r, \mathbf{X}_0))\right)\times \\ \times\left(O+F\right)^{-1}\left(\mathbf{Y}(t_r) - H(\mathbf{X}_b(t_r, \mathbf{X}_0))\right)^{T}. \quad (6.5.6)$$

Градиент штрафной функции имеет вид

$$\nabla_{\mathbf{X}_0} J(\mathbf{X}_0) = \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{R} H'(\mathbf{X}_b(t_r, \mathbf{X}_0))\frac{\partial \mathbf{X}_b(t_r, \mathbf{X}_0)}{\partial \mathbf{X}_0}\times \\ \times\left(O+F\right)^{-1}\left(\mathbf{Y}(t_r) - H(\mathbf{X}_b(t_r, \mathbf{X}_0))\right)^{T}. \quad (6.5.7)$$

Усвоение радиозатменных данных проводится на основе тех же самых общих принципов, что и усвоение любых других данных. Для этого нужно иметь 1) оператор наблюдений $H$, 2) его производную Фреше $H'$, модель ошибок оператора наблюдений $F$ и 4) модель ошибок измерений $O$.

В дальнейшем будем предполагать, что данные измерений волнового поля, полученные в ходе радиозатменных экспериментов, прошли предварительную обработку и получен профиль угла рефракции. Профили угла рефракции как функции от прицельного параметра будем считать в дальнейшем измеряемой величиной. Радиоголографические методы оценки ошибок измерений угла рефракции мы рассматривали в разделе 6.4.

В атмосфере с горизонтальными градиентами прицельный параметр не является инвариантом луча. Определение прицельного параметра из доплеровского сдвига частоты приводит к дополнительным ошибкам обращения при использовании абелевской инверсии [8]. Связь между локальным профилем индекса рефракции и углом рефракции, основанная на приближении локальной сферической симметрии, используется в рамках 1-мерной схемы усвоения [8]. Для реальной атмосферы с горизонтальными градиентами точность этого приближения оказывается недостаточной в тропосфере. Ошибки приближения локальной сферической симметрии включаются в модель ошибок оператора наблюдений.

При прямом 3-мерном вариационном усвоении радиозатменных данных ситуация меняется. Мы принимаем по определению, что профиль угла рефракции $\varepsilon(p)$ является наблюдаемой величиной. В операторе наблюдений зададим точное определение угла рефракции и прицельного параметра через доплеровскую частоту для заданной геометрии наблюдений. В качестве оператора наблюдений будем использовать геометрооптическую модель радиозатменных экспериментов, описанную в главе 1.

Первый пример вычисления углов рефракции по модельным переменным методом конечных разностей был дан в [1]. Однако метод конечных разностей приводит к чрезмерно большим вычислительным затратам. Опишем методику вычисления производной оператора наблюдений, развитую нами [9, 6] на основе общих принципов построения присоединенных линеаризованных моделей на уровне численной схемы [4]. В основе геометрооптической модели лежит численное интегрирование лучевых уравнений. Луч описывается динамическими переменными $\mathbf{x}(\tau)$ и $\mathbf{u}(\tau) = \dot{\mathbf{x}}(\tau)$, которые можно объединить в 6-мерный вектор $\mathbf{z}(\tau)$. В численном интегрировании вектор $\mathbf{z}$ зависит от дискретного параметра $n = 0...N$ и от соответствующих градиентов показателя преломления в дискретных точках, количество которых на каждом шаге зависит от численной схемы, и которые можно объединить в векторы $\mathbf{a}_n$. Величины $\mathbf{a}_n$ зависят от модельных переменных $T_{ijk}$, $q_{ijk}$, $P_{s,jk}$. Угол рефракции $\varepsilon(p)$ зависит от граничных условий луча $\mathbf{z}_0$, $\mathbf{z}_N$, а фиксация прицельного параметра $p$ накладывает дополнительное соотношение между $\mathbf{z}_0$ и $\mathbf{z}_N$. Поэтому, дифференцируя численную схему, можно вывести производные:

$$\frac{\partial \varepsilon(p)}{\partial \mathbf{z}_N}, \quad \frac{\partial \mathbf{z}_N}{\partial \mathbf{a}_n}, \quad \frac{\partial \mathbf{a}_n}{\partial \left(T_{ijk}, q_{ijk}, P_{s,jk}\right)}. \tag{6.5.8}$$

Производная угла рефракции по модельным переменным вычисляется затем по обычному цепному правилу:

$$\frac{\partial \varepsilon(p)}{\partial \left(T_{ijk}, q_{ijk}, P_{s,jk}\right)} = \frac{\partial \varepsilon(p)}{\partial \mathbf{z}_N} \frac{\partial \mathbf{z}_N}{\partial \mathbf{a}_n} \frac{\partial \mathbf{a}_n}{\partial \left(T_{ijk}, q_{ijk}, P_{s,jk}\right)}. \tag{6.5.9}$$

Вычисленная таким образом производная может использоваться в стандартных алгоритмах 4-мерного усвоения. Упрощенный вариант данной схемы рассматривался в [3, 7].

**Линеаризованная модель поля показателя преломления**

Для того чтобы вычислять производные угла рефракции по модельным переменным $T_{ijk}, q_{ijk}, P_{s,jk}$, нам остается лишь получить формулы для производных $n$ и $\nabla n$ в заданной пространственной точке $\mathbf{x}$ по модельным переменным.

Как описано в разделе 1.3, значение показателя преломления и его градиента в заданной точке с декартовыми координатами $\mathbf{x}$ и соответствующими геодезическими координатами $(z, \varphi, \lambda)$ получается в результате следующих шагов:

1) интерполяция вертикальных профилей $\ln N$ над узлами долготно-широтной сетки $\{\varphi_j, \lambda_k\}$ и вычисление $\ln N_{jk}(z)$ и производных $\dfrac{\partial \ln N_{jk}(z)}{\partial z}$ и $\dfrac{\partial^2 \ln N_{jk}(z)}{\partial z^2}$;

2) горизонтальная интерполяция:

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma}}{\partial z^\alpha \partial \varphi^\beta \partial \lambda^\gamma} \ln N(z,\varphi,\lambda) = \sum_{j,k} \frac{\partial^\alpha}{\partial z^\alpha} \ln N_{jk}(z) \frac{\partial^\beta}{\partial \varphi^\beta} w_j^\varphi(\varphi) \frac{\partial^\gamma}{\partial \lambda^\gamma} w_k^\lambda(\lambda); \quad (6.5.10)$$

3) переход от $\ln N$ к $N$:

$$\begin{gathered} N = \exp(\ln N), \\ \frac{\partial n}{\partial \tilde{x}_i} = \exp(\ln N) \frac{\partial \ln N}{\partial \tilde{x}_i}, \\ \frac{\partial^2 n}{\partial \tilde{x}_i \partial \tilde{x}_j} = \exp(\ln N) \left( \frac{\partial^2 \ln N}{\partial \tilde{x}_i \partial \tilde{x}_j} + \frac{\partial \ln N}{\partial \tilde{x}_i} \frac{\partial \ln N}{\partial \tilde{x}_j} \right), \end{gathered} \quad (6.5.11)$$

где $\tilde{x}_j = (z, \varphi, \lambda)$ – геодезические координаты;

4) перевод градиента и гессиана в декартовы координаты:

$$\begin{gathered} \frac{\partial n}{\partial x_i} = \frac{\partial \tilde{x}_j}{\partial x_i} \frac{\partial n}{\partial \tilde{x}_j}, \\ \frac{\partial^2 n}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 \tilde{x}_k}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial n}{\partial \tilde{x}_k} + \frac{\partial \tilde{x}_k}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{x}_l}{\partial x_j} \frac{\partial^2 n}{\partial \tilde{x}_k \partial \tilde{x}_l}. \end{gathered} \quad (6.5.12)$$

Производные $n\nabla n$ по одной из модельных переменных $T_{ijk}$, $q_{ijk}$, $P_{s,jk}$, которую для краткости обозначим $v$, вычисляются следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial v}(n \nabla n) = \frac{\partial n}{\partial v} \nabla n + n \frac{\partial \nabla n}{\partial v}. \quad (6.5.13)$$

С учетом формул (6.5.11) и (6.5.12) находим:

$$\begin{gathered} \frac{\partial n}{\partial v} = \exp(\ln N) \frac{\partial \ln N}{\partial v}, \\ \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial n}{\partial x_i} = \exp(\ln N) \frac{\partial \tilde{x}_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial \ln N}{\partial \tilde{x}_i}. \end{gathered} \quad (6.5.14)$$

Из интерполяционных формул (6.5.10) сразу получаем

$$\frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma}}{\partial z^\alpha \partial \varphi^\beta \partial \lambda^\gamma} \ln N(z,\varphi,\lambda) = \sum_{j,k} \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial^\alpha}{\partial z^\alpha} \ln N_{jk}(z) \frac{\partial^\beta}{\partial \varphi^\beta} w_j^\varphi(\varphi) \frac{\partial^\gamma}{\partial \lambda^\gamma} w_k^\lambda(\lambda). \quad (6.5.15)$$

Таким образом, необходимо вычислить производные по модельным пере-

менным от $\ln N_{jk}(z)$ и $\dfrac{\partial}{\partial z}\ln N_{jk}(z)$.

Вычисление $\ln N_{jk}(z)$ и $\dfrac{\partial}{\partial z}\ln N_{jk}(z)$ основано на сплайн-интерполяции дискретных вертикальных профилей $\{z_{ijk}$ , $\ln N_{ijk}\}$ для заданных долготно-широтных индексов $j$, $k$. При этом следует учитывать, что при варьировании модельных переменных меняются как значения $\ln N_{ijk}$ в узлах сетки, так и сама сетка геометрических высот $z_{ijk}$ . Поэтому необходимо вычислить производные

$$\frac{\partial}{\partial\left(z_{ijk},\ln N_{ijk}\right)}\ln N_{jk}(z),\ \frac{\partial}{\partial\left(z_{ijk},\ln N_{ijk}\right)}\frac{\partial}{\partial z}\ln N_{jk}(z). \qquad (6.5.16)$$

Эти производные можно получить, дифференцируя стандартные формулы схемы прогонки для вычисления сплайн-коэффициентов. Для производных по модельным переменным от $\ln N_{jk}(z)$ и $\dfrac{\partial}{\partial z}\ln N_{jk}(z)$ тогда можно записать формулы

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ln N_{jk}(z)}{\partial v} &= \frac{\partial z_{ijk}}{\partial v}\frac{\partial \ln N_{jk}(z)}{\partial z_{ijk}} + \frac{\partial \ln N_{ijk}}{\partial v}\frac{\partial \ln N_{jk}(z)}{\partial \ln N_{ijk}},\\
\frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial \ln N_{jk}(z)}{\partial z} &= \frac{\partial z_{ijk}}{\partial v}\frac{\partial}{\partial z_{ijk}}\frac{\partial \ln N_{jk}(z)}{\partial z} + \frac{\partial \ln N_{ijk}}{\partial v}\frac{\partial}{\partial \ln N_{ijk}}\frac{\partial \ln N_{jk}(z)}{\partial z}.
\end{aligned} \qquad (6.5.17)$$

Тем самым остается лишь вычислить производные по модельным переменным от $z_{ijk}$ и $\ln N_{ijk}$ .

Рассмотрим сначала вычисление производных от $z_{ijk}$ . Геометрические высоты вычисляются из геопотенциальных, которые, в свою очередь, вычисляются из уравнения статики. Пользуясь формулами из раздела 5.1, вычислим последовательно все производные.

Поскольку температура и влажность входят в определение геопотенциальных высот в виде комбинации – виртуальной температуры, удобнее вычислять производные геопотенциальных высот по виртуальной температуре и умножать их затем на производные виртуальной температуры $T_{\nu,\ ijk}$ по модельным переменным, которые вычисляются очевидным образом:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T_{\nu,ijk}}{\partial T_{ijk}} &= 1+\left(\frac{R_d}{R_\nu}-1\right)q_{ijk},\\
\frac{\partial T_{\nu,ijk}}{\partial q_{ijk}} &= T_{ijk}\left(\frac{R_d}{R_\nu}-1\right).
\end{aligned} \qquad (6.5.18)$$

Производные от давления на полуцелых уровнях по поверхностному давлению определяются вертикальными координатами:

$$\frac{\partial P_{i+\frac{1}{2},jk}}{\partial P_{s,jk}} = B_{i+\frac{1}{2}}. \tag{6.5.19}$$

Для производных от полуцелых уровней геопотенциальной высоты можно записать рекуррентную формулу:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi_{i-\frac{1}{2},jk}}{\partial T_{\nu,ijk}} &= \frac{\partial \phi_{i+\frac{1}{2},jk}}{\partial T_{\nu,ijk}} + R_d \ln\left(\frac{P_{i+\frac{1}{2},jk}}{P_{i-\frac{1}{2},jk}}\right), \\
\frac{\partial \phi_{i-\frac{1}{2},jk}}{\partial P_{s,jk}} &= \frac{\partial \phi_{i+\frac{1}{2},jk}}{\partial P_{i+\frac{1}{2},jk}} + \frac{R_d T_{\nu,ijk}}{P_{i+\frac{1}{2},jk}} B_{i+\frac{1}{2}} - \frac{R_d T_{\nu,ijk}}{P_{i-\frac{1}{2},jk}} B_{i-\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{6.5.20}$$

Производные от геопотенциальной высоты поверхности Земли $\phi_{i_{\max}+\frac{1}{2},jk} = \phi_{s,jk}$ равны нулю. Производные от целых геопотенциальных уровней задаются формулами

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi_{ijk}}{\partial P_{s,jk}} &= \frac{\partial \phi_{i+\frac{1}{2},jk}}{\partial P_{s,jk}} + \frac{\partial \alpha_{ijk}}{\partial P_{s,jk}} R_d T_{\nu,ijk}, \\
\frac{\partial \phi_{ijk}}{\partial T_{\nu,ijk}} \phi_{ijk} &= \frac{\partial \phi_{i+\frac{1}{2},jk}}{\partial T_{\nu,ijk}} + \alpha_{ijk} R_d.
\end{aligned} \tag{6.5.21}$$

Для производных от коэффициентов $\alpha_{ijk}$ имеем следующие формулы:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \alpha_{ijk}}{\partial P_{s,jk}} = 0, \qquad i = 1, \\
&\frac{\partial \alpha_{ijk}}{\partial P_{s,jk}} = \frac{P_{i+\frac{1}{2},jk} - P_{i-\frac{1}{2},jk} - P_{i+\frac{1}{2},jk} \ln\left(\frac{P_{i+\frac{1}{2},jk}}{P_{i-\frac{1}{2},jk}}\right)}{\left(P_{i+\frac{1}{2},jk} - P_{i-\frac{1}{2},jk}\right)^2 P_{i+\frac{1}{2},jk}} \left(P_{i+\frac{1}{2},jk} B_{i-\frac{1}{2}} - P_{i-\frac{1}{2},jk} B_{i+\frac{1}{2}}\right), \quad i > 1.
\end{aligned} \tag{6.5.22}$$

Производная геометрической высоты $z$ по геопотенциальной высоте $\phi$ задается формулой

$$\frac{\partial z}{\partial \phi} = \frac{g_s R_0^2}{\left(g_s R_0 - \phi\right)}. \tag{6.5.23}$$

Формулы (6.5.18)–(6.5.23) позволяют вычислить производные от геометрических высот над стандартным эллипсоидом по модельным переменным.

Рассмотрим теперь производные сеточного поля показателя преломления. Для них получаются следующие формулы:

$$\frac{\partial n_{ijk}}{\partial P_{s,jk}} = \left( c_1 \frac{1}{T_{ijk}} + c_2 \frac{q_{ijk}}{T_{ijk}^2 \left[ \frac{R_d}{R_v} + \left( 1 - \frac{R_d}{R_v} \right) q_{ijk} \right]} \right) \frac{B_{i+\frac{1}{2}} + B_{i-\frac{1}{2}}}{2}, \tag{6.5.24}$$

$$\frac{\partial n_{ijk}}{\partial T_{ijk}} = -c_1 \frac{P_{ijk}}{T_{ijk}^2} - c_2 \frac{2}{T_{ijk}^3} \frac{q_{ijk} P_{ijk}}{\frac{R_d}{R_v} + \left( 1 - \frac{R_d}{R_v} \right) q_{ijk}}, \tag{6.5.25}$$

$$\frac{\partial n_{ijk}}{\partial q_{ijk}} = c_2 \frac{1}{T_{ijk}^2} \frac{R_d}{R_v} \frac{P_{ijk}}{\left( \frac{R_d}{R_v} + \left( 1 - \frac{R_d}{R_v} \right) q_{ijk} \right)^2}. \tag{6.5.26}$$

Эти формулы можно дополнить элементарным соотношением

$$\frac{\partial \ln N}{\partial N} = \frac{1}{N}, \tag{6.5.27}$$

поскольку интерполируется логарифм индекса рефракции.

**1-мерная линеаризованная модель угла рефракции**

1-мерная модель угла рефракции основана на приближении сферической симметрии и некоторых дальнейших упрощениях [9]. Угол рефракции равен

$$\varepsilon(p) = -2 \int_p^\infty \frac{d \ln n}{dx} \frac{p dx}{\sqrt{x^2 - p^2}} \approx -\sqrt{2p} \int_p^\infty \frac{dN}{dx} \frac{dx}{\sqrt{x - p}}. \tag{6.5.28}$$

Запишем это выражение в дискретной форме. Для этого будем считать, что интеграл вычисляется в некотором узле ($j$, $k$) широтно-долготной сетки. Имеется высотная сетка $z_i$ и значения индекса рефракции $N_{i,j,k}$, где индексы ($j$, $k$) имеют фиксированные значения и их мы будем опускать. Считая, что $\ln N(x)$ представляется кусочно-линейной функцией, можем записать (6.5.28) в дискретной форме:

$$\begin{aligned} \varepsilon(p) &= \sqrt{2p} \sum N_i b_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\exp\left( -b_i \left( x - x_i \right) \right) dx}{\sqrt{x - p}}, \\ b_i &= \frac{\ln\left( N_i / N_{i+1} \right)}{x_{i+1} - x_i}. \end{aligned} \tag{6.5.29}$$

Вычисляя интегралы, получаем следующее выражение:

$$\varepsilon(p)=\sum\sqrt{2pb_i}N_i\exp\left(-b_i\left(x_i-p\right)\right)\left[\operatorname{erf}\left(\sqrt{b_i\left(x_{i+1}-p\right)}\right)-\operatorname{erf}\left(\sqrt{b_i\left(x_i-p\right)}\right)\right], \tag{6.5.30}$$

которое обозначим

$$\varepsilon(p)=\sum\Delta\varepsilon_i, \tag{6.5.31}$$

Далее понадобятся производные:

$$\begin{aligned}&\frac{d\Delta\varepsilon_i}{dN_i}=\frac{\partial\Delta\varepsilon_i}{\partial N_i}+\frac{\partial\Delta\varepsilon_i}{\partial b_i}\frac{\partial b_i}{\partial N_i},\quad \frac{d\Delta\varepsilon_i}{dN_{i+1}}=\frac{\partial\Delta\varepsilon_i}{\partial b_i}\frac{\partial b_i}{\partial N_{i+1}},\\ &\frac{d\Delta\varepsilon_i}{dz_i}=\frac{d\Delta\varepsilon_i}{dx_i}\frac{dx_i}{dz_i}=\frac{d\Delta\varepsilon_i}{dx_i}\left(1+N_i\right),\quad \frac{d\Delta\varepsilon_i}{dz_{i+i}}=\frac{d\Delta\varepsilon_i}{dx_{i+1}}\left(1+N_{i+1}\right).\end{aligned} \tag{6.5.32}$$

Пользуясь производными $z_i$ и $N_i$ по метеопараметрам (6.5.23), (6.5.21), (6.5.17) , в конечном счете приходим к производным наблюдаемой величины $\varepsilon(p)$ по модельным переменным.

Одномерная модель достаточно проста в реализации и не требует больших численных затрат. Ее недостатком является то, что ошибки оператора наблюдений $F$, отвечающие пренебрежению горизонтальными градиентами показателя преломления, в нижней тропосфере оказываются значительными. Ковариационная матрица ошибок оператора наблюдений устанавливается на основе численного моделирования. На рис. 21 приводятся ошибки восстановления индекса рефракции в приближении локальной сферической симметрии. Ошибки вычислены по результатам численного моделирования с полями метеопараметров Европейского Центра среднесрочных прогнозов погоды (European Centre for Medium Range Weather Forecast, ECMWF). Разрешение полей составляет около 100 км по горизонтали и от 50 м на самых нижних уровнях до нескольких километров на высотах около 60 км. Ошибки максимальны в тропиках, что связано со сложной структурой поля влажности. Случайные ошибки здесь достигают 1.5%, что примерно соответствует 5 градусам по температуре.

Систематические ошибки в тропиках также связаны с горизонтальными градиентами индекса рефракции. Как мы видели в разделе 5.1, в присутствии горизонтальных градиентов, прицельный параметр $p$ не является инвариантом луча. Эффективный прицельный параметр, вычисляемый из доплеровского сдвига частоты, при этом уже не является однозначной координатой лучевого многообразия. Это будет приводить к нарушению условий применимости методов восстановления лучевой структуры, описанных в разделе 6.3. Разумеется, сам подход, основанный на применении техники интегральных операторов Фурье, остается применимым. Однако в присутствии сильных горизонтальных градиентов заранее нельзя найти координату фазового пространства, реализующую однозначную проекцию лучевого многообразия. Достаточно общие методы анализа лучевого поля, не требующие малости горизонтальных градиентов, основаны на теории нелинейных представлений и квантовых плотностей, которые будем разбирать в главе 7.

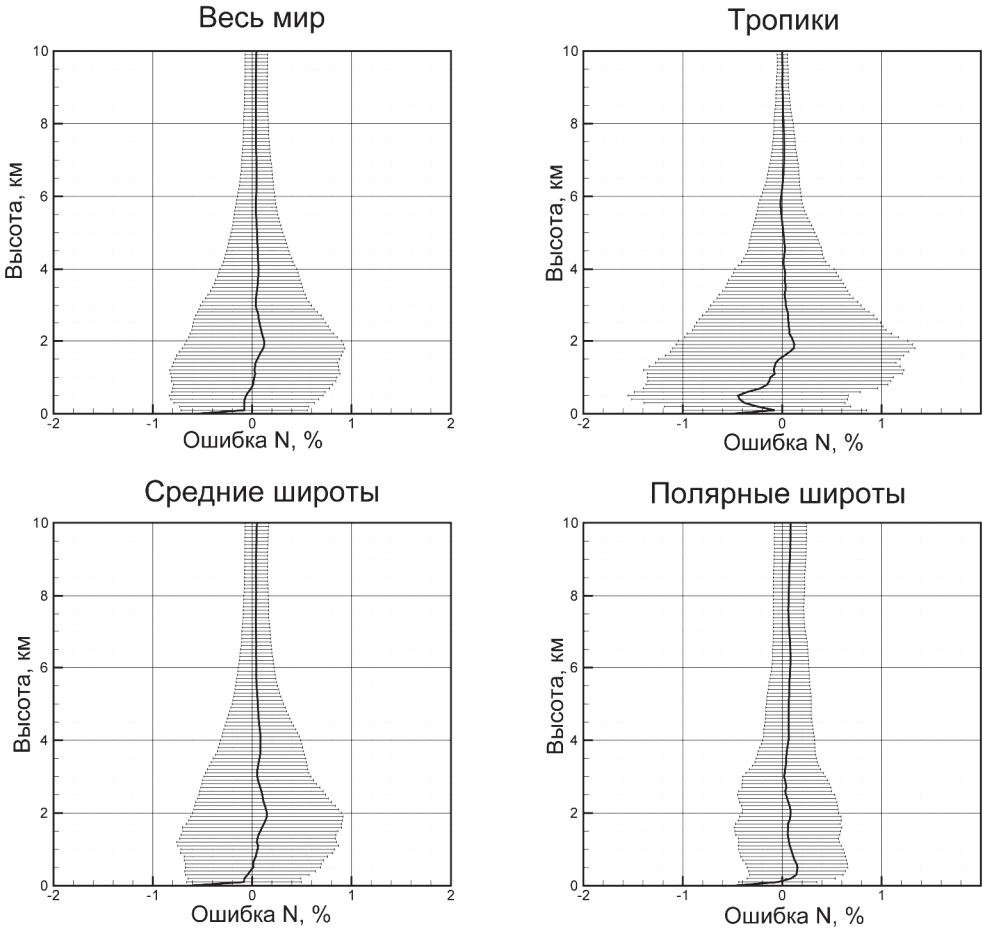



**Рис. 21.** Ошибки восстановления индекса рефракции в приближении локальной сферической симметрии по результатам численного моделирования с полями Европейского Центра среднесрочных прогнозов погоды (ECMWF)

**3-мерная линеаризованная модель угла рефракции**

Рассмотрим 3-мерную модель угла рефракции. Сначала вычислим чувствительность лучевой геометрии к вариациям показателя преломления и его градиента. Это делается на основе рассмотрения дискретной численной схемы интегрирования уравнений лучей.

Луч описывается динамическими переменными – вектором координат **x** и его производной $\mathbf{u} = \dot{\mathbf{x}}$ по параметру траектории $\tau$ ($d\tau = ds / n$). Динамические переменные объединим в 6-компонентный вектор $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix}$. Уравнение луча записывается в виде

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{F}(\mathbf{z}), \qquad (6.5.33)$$

где правая часть определяется равенством

$$\mathbf{F}(\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ n\nabla n(\mathbf{x}) \end{pmatrix}. \tag{6.5.34}$$

Вектор $\mathbf{u}$ равен $n\dfrac{d\mathbf{x}}{ds}$, и поэтому $\mathbf{u}^2 = n^2$. Это значит, что величина $\dfrac{\mathbf{u}^2}{n^2} = 1$ является динамическим инвариантом уравнения (6.5.33). В самом деле, несложно вывести уравнение

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\mathbf{u}^2}{n^2}\right) = 2\frac{\langle \mathbf{u}\nabla n\rangle}{n}\left(1 - \frac{\mathbf{u}^2}{n^2}\right). \tag{6.5.35}$$

Это уравнение показывает, что если в силу ошибок дискретизации величина $\dfrac{\mathbf{u}^2}{n^2}$ отклоняется от 1, то при $\langle \mathbf{u}\nabla n\rangle < 0$ эта ошибка будет экспоненциально возрастать. Мы будем вводить коррекцию этой ошибки на каждом шаге численного интегрирования. Пользуясь стандартной схемой Рунге–Кутты, и дополняя ее процедурой нормировки вектора $\mathbf{u}$, можем записать следующие уравнения для каждого шага численного интегрирования:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^1_{n-1} &= \mathbf{F}(\mathbf{z}_{n-1}), \\ \mathbf{K}^2_{n-1} &= \mathbf{F}\left(\mathbf{z}_{n-1} + \frac{\Delta\tau}{2}\mathbf{K}^1_{n-1}\right), \\ \mathbf{K}^3_{n-1} &= \mathbf{F}\left(\mathbf{z}_{n-1} + \frac{\Delta\tau}{2}\mathbf{K}^2_{n-1}\right), \\ \mathbf{K}^4_{n-1} &= \mathbf{F}\left(\mathbf{z}_{n-1} + \Delta\tau\mathbf{K}^3_{n-1}\right), \end{aligned} \tag{6.5.36}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{z}'_n &= \frac{\Delta\tau}{6}\left(\mathbf{K}^1_{n-1} + 2\mathbf{K}^2_{n-1} + 2\mathbf{K}^3_{n-1} + \mathbf{K}^4_{n-1}\right) + \mathbf{z}_{n-1}, \\ \mathbf{z}_n &= \begin{pmatrix} \mathbf{x}'_n \\ n(\mathbf{x}'_n)\mathbf{u}'_n / \left|\mathbf{u}'_n\right| \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{6.5.37}$$

Таким образом, на каждом шаге интегрирования вычисление $\mathbf{z}_n$ зависит от значений правой части $\mathbf{F}^\mu_{n-1}$ в точках $\mathbf{z}^\mu_{n-1}, \mu = 1..4$, определяемых равенствами:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}^1_{n-1} &= \mathbf{z}_{n-1}, \\ \mathbf{z}^2_{n-1} &= \mathbf{z}_{n-1} + \frac{\Delta\tau}{2}\mathbf{K}^1_{n-1}, \\ \mathbf{z}^3_{n-1} &= \mathbf{z}_{n-1} + \frac{\Delta\tau}{2}\mathbf{K}^2_{n-1}, \\ \mathbf{z}^4_{n-1} &= \mathbf{z}_{n-1} + \Delta\tau\mathbf{K}^3_{n-1}. \end{aligned} \tag{6.5.38}$$

Полные вариации значений правой части $\mathbf{F}^\mu_{n-1}$ можно записать в виде

$$\delta\mathbf{F}^{\mu}_{n-1} = \mathbf{B}^{\mu}_{n}\delta\mathbf{z}^{\mu}_{n-1} + \overline{\delta}\mathbf{F}^{\mu}_{n-1}. \tag{6.5.39}$$

Здесь $\mathbf{B}^{\mu}_{n}$ значения производных $\mathbf{F}^{\mu}_{n-1}$ по $\mathbf{z}$

$$\mathbf{B}^{\mu}_{n} \equiv \frac{\partial\mathbf{F}^{\mu}_{n-1}}{\partial\mathbf{z}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \nabla\otimes\nabla n^2(\mathbf{x}^{\mu}_{n-1})/2 & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \tag{6.5.40}$$

где $\mathbf{0}$ и $\mathbf{I}$ – нулевая и единичная матрицы размерности $3\times 3$. Через $\overline{\delta}\mathbf{F}^{\mu}_{n-1}$ обозначены вариации формы правой части за счет вариации атмосферных параметров.

Дифференцируя численную схему (6.5.36), можно записать выражение для вариаций $\mathbf{z}'_n$

$$\delta\mathbf{z}'_n = \mathbf{B}'_n\delta\mathbf{z}'_{n-1} + \sum_{\mu}\mathbf{C}^{\mu}_{n}\,\overline{\delta}\mathbf{F}^{\mu}_{n-1}, \tag{6.5.41}$$

где матрицы $\mathbf{B}'_n$ и $\mathbf{C}^{\mu}_{n}$ определяются следующими равенствами:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}'_n = \mathbf{I} &+ \frac{\Delta\tau}{6}\left(\mathbf{B}^1_n + 2\mathbf{B}^2_n + 2\mathbf{B}^3_n + \mathbf{B}^4_n\right) + \\ &+ \frac{\Delta\tau^2}{6}\left(\mathbf{B}^2_n\mathbf{B}^1_n + \mathbf{B}^3_n\mathbf{B}^2_n + \mathbf{B}^4_n\mathbf{B}^3_n\right) + \\ &+ \frac{\Delta\tau^3}{12}\left(\mathbf{B}^3_n\mathbf{B}^2_n\mathbf{B}^1_n + \mathbf{B}^4_n\mathbf{B}^3_n\mathbf{B}^2_n\right) + \\ &+ \frac{\Delta\tau^4}{24}\mathbf{B}^4_n\mathbf{B}^3_n\mathbf{B}^2_n\mathbf{B}^1_n, \end{aligned} \tag{6.5.42}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^1_n &= \frac{\Delta\tau}{6}\mathbf{I} + \frac{\Delta\tau^2}{6}\mathbf{B}^2_n + \frac{\Delta\tau^3}{12}\mathbf{B}^3_n\mathbf{B}^2_n + \frac{\Delta\tau^4}{24}\mathbf{B}^4_n\mathbf{B}^3_n\mathbf{B}^2_n, \\ \mathbf{C}^2_n &= \frac{\Delta\tau}{3}\mathbf{I} + \frac{\Delta\tau^2}{6}\mathbf{B}^3_n + \frac{\Delta\tau^3}{12}\mathbf{B}^4_n\mathbf{B}^3_n, \\ \mathbf{C}^3_n &= \frac{\Delta\tau}{3}\mathbf{I} + \frac{\Delta\tau^2}{6}\mathbf{B}^4_n, \\ \mathbf{C}^4_n &= \frac{\Delta\tau}{6}\mathbf{I}. \end{aligned} \tag{6.5.43}$$

Обозначим параметры, от которых зависит лучевая траектория на $n$-ом шаге интегрирования, через $\boldsymbol{\alpha}^{\mu}_{n-1} = n\nabla n(\mathbf{x}^{\mu}_{n-1})$. Их можно объединить в один 12-компонентный вектор $\mathbf{a}_{n-1}$. Тогда для вариаций формы правой части можно записать выражение

$$\overline{\delta}\mathbf{F}^{\mu}_{n-1} = \mathbf{A}^{\mu}\,\delta\mathbf{a}_{n-1}, \tag{6.5.44}$$

где матрицы $\mathbf{A}^{\mu}$ определяются формулами

$$\mathbf{A}^1 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{A}^3 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^4 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}. \tag{6.5.45}$$

Рассмотрим теперь операцию перенормировки вектора $\mathbf{u}'_n$:

$$\delta\mathbf{u}'_n = \left\langle \nabla n(\mathbf{x}'_n), \delta\mathbf{x}'_n \right\rangle \frac{\mathbf{u}'_n}{|\mathbf{u}'_n|} + n(\mathbf{x}'_n) \left[ \frac{\delta\mathbf{u}'_n}{|\mathbf{u}'_n|} - \frac{\mathbf{u}'_n \left( \mathbf{u}'_n, \delta\mathbf{u}'_n \right)}{\mathbf{u}'^2_n} \right]. \tag{6.5.46}$$

Вариацию вектора **z** можно поэтому переписать в виде

$$\delta\mathbf{z}_n = \mathbf{R}_n \, \delta\mathbf{z}'_n, \tag{6.5.47}$$

где матрица $\mathbf{R}_n$ определена следующим образом на основании формулы (6.5.46):

$$\mathbf{R}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \dfrac{\mathbf{u}'_n \otimes \nabla n(\mathbf{x}'_n)}{|\mathbf{u}'_n|} & \dfrac{n(\mathbf{x}'_n)}{|\mathbf{u}'_n|} \left[ \mathbf{I} - \dfrac{\mathbf{u}'_n \otimes \mathbf{u}'_n}{|\mathbf{u}'_n|} \right] \end{pmatrix}. \tag{6.5.48}$$

Собирая все описанные выше преобразования, получаем уравнение для вариаций вектора **z**:

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{z}_n &= \mathbf{R}_n \, \mathbf{B}'_n \, \delta\mathbf{z}_{n-1} + \mathbf{R}_n \sum_{\mu} \mathbf{C}_n^{\mu} \, \mathbf{A}^{\mu} \, \delta\mathbf{a}_{n-1} \equiv \\ &\equiv \mathbf{B}_n \, \delta\mathbf{z}_{n-1} + \mathbf{C}_n \, \delta\mathbf{a}_{n-1}. \end{aligned} \tag{6.5.49}$$

Отсюда получаем выражения для производных, необходимых для вычисления вариаций угла рефракции:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathbf{z}_N}{\partial\mathbf{z}_0} &= \mathbf{B}_N \mathbf{B}_{N-1} \ldots \mathbf{B}_1, \\ \frac{\partial\mathbf{z}_N}{\partial\mathbf{a}_{n-1}} &= \mathbf{B}_N \mathbf{B}_{N-1} \ldots \mathbf{B}_{n+1} \mathbf{C}_n. \end{aligned} \tag{6.5.50}$$

Мы будем рассматривать зависимость профиля угла рефракции ε(*p*) от лучевой геометрии с учетом того, что угол рефракции вычисляется через доплеровский сдвиг частоты. Этот подход позволяет исключить ошибки, связанные с горизонтальными градиентами, поскольку оператор наблюдений включает в себя такое же определение наблюдаемой величины, какое используется для обработки экспериментальных данных. Прицельный параметр рассматривается здесь как независимая переменная. При этом будем предполагать, что имеется только один луч с заданным прицельным параметром. В этом случае несложно написать численный алгоритм итеративного поиска такого луча, что будет показано ниже. Условие уникальности прицельных параметров лучей *p* может нарушаться в присутствии сильных систематиче-

ских горизонтальных градиентов в самой нижней тропосфере (например, при наличии сильного атмосферного фронта). Тем не менее, как показывают численные эксперименты, такие ситуации достаточно редки.

Угол рефракции определяется доплеровской частотой, и можно было бы строить схему усвоения доплеровского сдвига частоты как функции координат спутников. Этот подход, однако, наталкивается на существенные трудности, связанные с многолучевым распространением. В нижней тропосфере доплеровский сдвиг, вычисленный в лучевом приближении, оказывается многозначной функцией координат. А доплеровский сдвиг частоты, вычисленный по экспериментальным данным в многолучевой области, содержит сильные интерференционные осцилляции, а также эффекты дифракции. Поэтому усвоение профиля $\varepsilon(p)$ оказывается гораздо удобнее, чем усвоение доплеровского сдвига частоты как функции координат спутников. При этом предварительная радиоголографическая обработка экспериментальных данных позволяет удалить эффекты многолучевого распространения и дифракции.

Мы будем предполагать, что задана геометрия радиозахода, которую всегда можем привести к вертикальной с неподвижным источником. Далее, будем считать, что для заданного значения прицельного параметра $p$ можем найти соответствующий луч с некоторыми начальными условиями $\mathbf{x}_0$ , $\mathbf{u}_0$ у источника, заканчивающийся в некоторой точке $\mathbf{x}_N$ и имеющий направление $\mathbf{u}_N$ на орбите принимающего спутника. Доплеровский сдвиг для этого луча может быть тогда вычислен стандартным образом:

$$d = \frac{\mathbf{V}_{\mathrm{GPS}} \cdot \mathbf{u}_0 - \mathbf{V}_{\mathrm{LEO}} \cdot \mathbf{u}_N}{c}. \tag{6.5.51}$$

Тогда для определения угла рефракции и прицельного параметра можно записать систему уравнений:

$$\begin{aligned} &\frac{\mathbf{V}_{\mathrm{GPS}} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_0 - \mathbf{V}_{\mathrm{LEO}} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_N}{c} = d, \\ &\mathbf{x}_N \times \tilde{\mathbf{u}}_N - \mathbf{x}_0 \times \tilde{\mathbf{u}}_0 = 0, \\ &\tilde{\mathbf{u}}_N^2 = 1, \\ &\tilde{\mathbf{u}}_0^2 = 1, \end{aligned} \tag{6.5.52}$$

где $\tilde{\mathbf{u}}_0$ и $\tilde{\mathbf{u}}_N$ – некоторые эффективные направления лучей, сосчитанные в предположении сферической симметрии. Это нелинейная система относительно шести неизвестных компонент векторов $\tilde{\mathbf{u}}_0$ и $\tilde{\mathbf{u}}_N$ . Ее можно решать итеративным методом Ньютона, пользуясь матрицей линеаризованной системы. Угол рефракции и прицельный параметр определяются затем из решения этой системы:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}_0 \times \mathbf{x}_N}{\left|\mathbf{x}_0 \times \mathbf{x}_N\right|},$$
$$\varepsilon = \arctan\left(\frac{\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{u}}_0 \cdot \tilde{\mathbf{u}}_N}{\tilde{\mathbf{u}}_0 \cdot \tilde{\mathbf{u}}_N}\right), \qquad (6.5.53)$$
$$p = \mathbf{x}_N \times \tilde{\mathbf{u}}_N,$$

где **n** – вспомогательный вектор нормали к плоскости радиозахода. Отметим также, что координаты спутников берутся в системе центра локальной кривизны.

Динамические переменные луча **x** и **u** можно объединить в единый 6-компонентный вектор $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix}$. Тогда решение системы (6.5.52) с учетом соотношений (6.5.53) можно записать в общем виде:

$$\varepsilon = \varepsilon\left(\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_N\right),$$
$$p = p\left(\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_N\right). \qquad (6.5.54)$$

При этом конечное условие $\mathbf{z}_N$ зависит от начального условия $\mathbf{z}_0$, а также от дискретного набора некоторых параметров **a**, используемых в численном интегрировании и определяемых атмосферой. В нашем случае это будут значения $n\nabla n$ в дискретных точках, используемых в численной схеме интегрирования дифференциальных уравнений лучей. Поэтому можно записать

$$\mathbf{z}_N = \mathbf{z}_N\left(\mathbf{z}_0, \mathbf{a}\right). \qquad (6.5.55)$$

Теперь полные вариации угла рефракции и прицельного параметра можно записать в следующем виде:

$$\delta\varepsilon = \frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{z}_0}\delta\mathbf{z}_0 + \frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{z}_N}\frac{\partial\mathbf{z}_N}{\partial\mathbf{z}_0}\delta\mathbf{z}_0 + \frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{z}_N}\frac{\partial\mathbf{z}_N}{\partial\mathbf{a}}\delta\mathbf{a},$$
$$\delta p = \frac{\partial p}{\partial\mathbf{z}_0}\delta\mathbf{z}_0 + \frac{\partial p}{\partial\mathbf{z}_N}\frac{\partial\mathbf{z}_N}{\partial\mathbf{z}_0}\delta\mathbf{z}_0 + \frac{\partial p}{\partial\mathbf{z}_N}\frac{\partial\mathbf{z}_N}{\partial\mathbf{a}}\delta\mathbf{a}. \qquad (6.5.56)$$

Нас интересуют вариации угла рефракции за счет атмосферных параметров **a** при заданном прицельном параметре $p$, поэтому накладываем условие $\delta p = 0$, откуда получаем

$$\left(\frac{\partial p}{\partial\mathbf{z}_0} + \frac{\partial p}{\partial\mathbf{z}_N}\frac{\partial\mathbf{z}_N}{\partial\mathbf{z}_0}\right)\delta\mathbf{z}_0 = -\frac{\partial p}{\partial\mathbf{z}_N}\frac{\partial\mathbf{z}_N}{\partial\mathbf{a}}\delta\mathbf{a}. \qquad (6.5.57)$$

Мы будем рассматривать лишь вариации начального направления луча в вертикальной плоскости, что позволяет наложить дополнительные условия:

$$\delta\mathbf{x}_0 = 0,$$
$$\delta\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{x}_0 \times \mathbf{x}_N = 0, \qquad (6.5.58)$$
$$\delta\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{u}_0 = 0.$$

Уравнения (6.5.57) и (6.5.58) представляют собой линейную систему из шести уравнений (3 скалярных и одно векторное) относительно шести компонент вектора $\delta\mathbf{z}_0$. Решение этой системы мы запишем в условном виде:

$$\delta\mathbf{z}_0 = -\frac{d\mathbf{z}_0}{dp}\frac{\partial p}{\partial \mathbf{z}_N}\frac{\partial \mathbf{z}_N}{\partial \mathbf{a}}\delta\mathbf{a}. \qquad (6.5.59)$$

С учетом этой производной можно записать полную вариацию угла рефракции:

$$\delta\varepsilon = \left[ -\left( \frac{\partial\varepsilon}{\partial \mathbf{z}_0} + \frac{\partial\varepsilon}{\partial \mathbf{z}_N}\frac{\partial \mathbf{z}_N}{\partial \mathbf{z}_0} \right)\frac{d\mathbf{z}_0}{dp}\frac{\partial p}{\partial \mathbf{z}_N} + \frac{\partial\varepsilon}{\partial \mathbf{z}_N} \right]\frac{\partial \mathbf{z}_N}{\partial \mathbf{a}}\delta\mathbf{a} \equiv \frac{d\varepsilon}{d\mathbf{z}_N}\frac{\partial \mathbf{z}_N}{\partial \mathbf{a}}\delta\mathbf{a}. \qquad (6.5.60)$$

Введенная здесь полная производная $\dfrac{d\varepsilon}{d\mathbf{z}_N}$ описывает чувствительность угла рефракции по отношению к лучевой геометрии.

Таким образом, мы получили формулы позволяющие вычислять производные профиля угла рефракции $\varepsilon(p)$ по многомерному вектору **a**, составленного из величин $n\nabla n(\mathbf{x}_{n-1}^{\mu})$, где точки $\mathbf{x}_{n-1}^{\mu}$ определяются численной схемой интегрирования невозмущенной траектории луча. Производные **a** по метеопараметрам строятся на основе линеаризованной присоединенной модели показателя преломления.

3-мерная линеаризованная модель, описанная нами, является максимально точной. Ее условие применимости совпадает с условием применимости используемых методов восстановления лучевой структуры волнового поля: прицельный параметр $p$ должен являться однозначной координатой лучевого многообразия. Ее недостаток состоит в том, что она требует достаточно больших вычислительных затрат. Простейшая оптимизация вычислений состоит в том, чтобы использовать 3-мерную схему усвоения лишь на тех высотах, где существенны ошибки приближения локальной сферической симметрии, т.е. до до 4–6 км, а выше – применять 1-мерную схему.

**Другие подходы к усвоению**

Помимо 1-мерного усвоения углов рефракции можно строить 1-мерное усвоение восстановленных профилей индекса рефракции [10, 11]. В этом случае оператор наблюдений упрощается и включает фактически только интерполяцию между модельными уровнями. Принципы построения линеаризованной модели остаются теми же, что описаны выше. В литературе также описаны приближенные подходы, позволяющие строить 3-мерные (или нелокальные) схемы усвоения [12, 13].

## Литература


1. *Eyre J.R.* Assimilation of radio occultation measurements into a numerical prediction system / European Centre for Medium-Range Weather Forecast. Technical Memo No. 199. UK, Reading, 1994. 87 p.

2. *Zou X., Kuo Y.-H., Guo Y.-R.* Assimilation of atmospheric radio refractivity using a nonhydrostatic mesoscale model // Monthly Weather Review. 1995. V. 123. P. 2229–2249.

3. *Zou X., Vandenberghe F., Wang B., Gorbunov M.E., Kuo Y.-H., Sokolovskiy S., Chang J.C., Sela J.G., Anthes R.A.* A ray-tracing operator and its adjoint for the use of GPS/MET refraction angle measurements // Journal of Geophysical Research. 1999. V. 104, No. D18. P. 22301–22318.

4. *Hoffman R.N., Louis J.-F., Nehrkorn T.* A method for implementing adjoint calculations in discrete case. Technical Memorandum No. 184. European Centre for Medium-Range Weather Forecast, 1992. 57 p.

5. *Bengtsson L., Gorbunov M.E., Sokolovskiy S.V.* Space refractive tomography of the atmosphere, modeling of direct and inverse problems / Max-Planck Institute for Meteorology. Report No. 210. Hamburg, 1996. 59 p.

6. *Gorbunov M.E., Kornblueh L.* Principles of variational assimilation of GNSS radio occultation data / Max-Planck Institute for Meteorology. Report No. 350. Hamburg, 2003. 34 p.

7. *Liu H., Zou X.* Improvements to a GPS radio occupation ray-tracing model and their impacts on assimilation of bending angle // Journal of Geophysical Research. 2003. V. 108, No. D17. 4548. doi: 10.1029/2002JD003160

8. *Healy S.B.* Radio occultation bending angle and impact parameter errors caused by horizontal refractive index gradients in the troposphere: A simulation study // Journal of Geophysical Research. 2001. V. 106, No. D11. P. 11875–11890.

9. *Healy S.B., Thépaut J.-N.* Assimilation experiments with CHAMP GPS radio occultation measurements // Q. J. R. Meteorol. Soc. 2006. V. 132. P. 605–623. doi: 10.1256/qj.04.182

10. *Цырульников М.Д., Свиренко П.И., Горин В.Е., Горбунов М.Е., Климова Е.Г.* Создание системы трёхмерного вариационного усвоения данных в Гидрометцентре России, Научная конференция «175 лет Гидрометслужбе России – научные проблемы и пути их решения» с участием НГМС стран СНГ, 26–27 мая 2009 г., Москва.

11. *Цырульников М.Д., Свиренко П.И., Горбунов М.Е., Ордин А.Л., Гайфулин Д.Р.* Оперативное усвоение данных спутниковых наблюдений в Гидрометцентре России. «Применение космических технологий для развития северных территорий», Архангельск, 17–19 сентября 2013. С. 87.

12. *Sokolovskiy S., Kuo Y.-H., Wang W.* Assessing the accuracy of a linearized observation operator for assimilation of radio occultation data: Case simulations with a high-resolution weather model // Monthly Weather Review. 2005, August. V. 133. P. 2200–2212.

13. *Sokolovskiy S., Kuo Y.-H., Wang W.* Evaluation of a linear phase observation operator with CHAMP radio occultation data and high-resolution regional analysis // Monthly Weather Review. 2005, October. V. 133. P. 3053– 3059.

# 7. Нелинейные представления волновых полей

## 7.1. Волновое поле и связанное с ним фазовое пространство

В данной монографии мы последовательно развиваем подход, основанный на деквантовании волновых полей, т.е. на восстановлении их геометрооптической лучевой структуры. Фазовое пространство было введено в 4-й главе, посвященной асимптотическим методам решения волновых задач и основанной на лучевых представлениях. Была последовательно проведена параллель между гамильтоновой системой, описывающей распространение лучей в неоднородной среде, и волновым уравнением, описывающим распространение волновых полей. В фазовом пространстве вводится каноническая система координат, включающая «физические» координаты и «идеальные» импульсы. Импульсы описывают направления лучей. Идеальными мы их называем, поскольку лучи являются идеализацией процесса распространения волн. Начальные условия определяют конфигурацию лучей в пространстве и структуру лучевого многообразия. Геометрооптическое решение строится на лучевом многообразии. Аппарат интегральных операторов Фурье позволяет проецировать это решение в физическое пространство и получать асимптотическое решение волновой задачи. Этот подход оказался чрезвычайно плодотворным в решении обратных задач зондирования атмосферы.

Однако на фазовое пространство можно посмотреть с другой точки зрения. Можно отвлечься от динамических уравнений распространения волн в пространстве и изучать структуру волнового поля, являющегося быстроосциллирующей функцией пространственных координат. Поле может иметь сложную структуру. Но если зафиксировать некоторую точку пространства и ее достаточно малую окрестность, то может оказаться, что поле является суперпозицией небольшого числа простых полей, например сферических волн. Каждую такую волну можем связать с волновым фронтом каждого из интерферирующих в данной точке лучей. В простейшем случае в каждой точке имеется лишь один луч. В этом случае волновое поле можно представить в виде $u(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x})\exp(ik\,\Psi(\mathbf{x}))$, где амплитуда $A(\mathbf{x})$ и эйконал $\Psi(\mathbf{x})$ являются гладкими функциями координат. Направление луча задается направлением градиента эйконала $\nabla\Psi(\mathbf{x})$. Аналогично рассматривается случай, когда измеряется срез волнового поля вдоль траектории спутника $u(t) = A(t)\exp(ik\,\Psi(t))$. В этом случае направление единственного луча связано с мгновенной доплеровской частотой, определяемой производной $\dot{\Psi}(t)$. В случае многолучевого распространения поле $u(t)$ представляется в виде суперпозиции нескольких сигналов с плавно меняющимися амплитудами и фазами.

Как мы знаем из предыдущей главы, при помощи аппарата интегральных операторов Фурье можно восстановить лучевую структуру волнового поля в случае, когда в каждой точке имеется несколько интерферирующих лучей. Для этого мы использовали априорную информацию о лучевом многообразии: предполагалось, что известна каноническая система координат, в которой лучевой многообразие имеет однозначную проекцию. Это предположение было основано на том, что атмосфера Земли достаточно близка с сферически-слоистой, и для каждого луча можно ввести величину прицельного параметра $p$, которая и будет служить такой координатой. Тем не менее в реальной атмосфере условие, что прицельный параметр $p$ является однозначной координатой лучевого многообразия, может нарушаться в присутствии достаточно сильных горизонтальных градиентов показателя преломления.

В этой главе обратимся к достаточно общим методам восстановления лучевой структуры волновых полей. Они носят общее название пространственно-временного анализа [1, 2] и широко используются в цифровой обработке сигналов. Однако эти методы берут начало в физике [3, 4], где они напрямую связаны с фазовым пространством в стандартном определении. Их идея заключается в том, что с осциллирующим измеряемым сигналом связывается фазовое пространство, где импульс связан с мгновенной частотой сигнала или одной из компонент сигнала. Основная задача пространственно-временного анализа заключается в построении распределений энергии в фазовом пространстве. Таким образом, исходя из быстро-осциллирующего $u(t)$ строится плотность (или псевдо-плотность) энергии на фазовом пространстве $W(t, \omega)$. В каждый фиксированный момент времени $t$ эта функция распределения имеет максимумы, соответствующие мгновенным частотам компонент сигнала. В этой главе будем разбирать различные способы определения таких плотностей на фазовом пространстве.

### Литература


1. *Cohen L.* Time-Frequency Distribution // A Review, Proceedings of the IEEE. 1989. V. 77, No. 7. P. 941–981.
2. Time Frequency Signal Analysis and Processing. A Comprehensive Reference / Ed. by Boualem Boashash. Amsterdam: Elsevier, 2003. 744 p.
3. *Zachos C.K., Fairlie D.B., Curtright T.L.* (Eds.) Quantum mechanics in phase space: An overview with selected papers. Vol. 34. World Scientific Series in 20th Century Physics. World Sci. Singapore. 2005.
4. Lecture notes in physics. Vol. 278. The physics of phase space. Nonlinear dynamics and chaos, geometric quantization, and Wigner-function // Proceedings of the First Int. Conf. on the Physics of Phase Space. University of Maryland, College Park, Maryland, May 20–23, 1986 / Ed. by H. Araki et al. New York: Springer, 1986. P. 179–199.


## 7.2. Спектрограмма как плотность на фазовом пространстве

Радиооптический метод, известный также под названием радиоголографического или скользяще-спектрального (sliding spectrum) метода, применялся

еще в 1980-е годы для интерпретации данных зондирования планетных атмосфер [1]. Этот метод широко используется для обработки данных радиозатменного зондирования атмосферы Земли [2–8] и ионосферы [9–11]. В частности, он позволил обнаружить в радиозатменных данных наличие лучей, отраженных от поверхности Земли [4, 5].

Метод основан на выделении в измеренном волновом поле физических мод, соответствующих геометрооптическим лучам. В геометрической оптике можно рассматривать каждый луч по отдельности. В волновой оптике физический луч является частью волны с некоторым волновым фронтом, и лучу соответствует френелевский объем. Внутри этого объема лучи могут быть представлены как плоские или сферические волны. Радиооптический метод использует разложение поля по базисным функциям, описывающим физические лучи, в скользящих апертурах. Иными словами, анализируются локальные пространственные спектры волнового поля.

С вычислением локальных скользящих спектров мы уже встречались в разделе 6.4, где спектральная ширина поля, преобразованного в представление прицельного параметра $p$, выступала в качестве меры неопределенности угла рефракции. В данном разделе будем рассматривать вычисление скользящих спектров исходного измеренного поля $u(t)$ с целью выделения лучей.

Для простоты будем рассматривать вертикальную геометрию радиозахода. В плоскости радиозахода введем координаты $x$, $y$ с осью $x$, направленной вдоль направления падающей волны, и перпендикулярной ей осью $y$. Волновое поле регистрируется на расстоянии $x$ от лимба планеты.

Для лучей, приходящих в точку наблюдения ($x$, $y$), можно записать соотношение между углом рефракции $\varepsilon$ и прицельным параметром $p$:

$$x\sin\varepsilon + y\cos\varepsilon = p. \qquad (7.2.1)$$

Для простоты мы считаем, что источник расположен существенно дальше от лимба планеты, чем приемник. Это соотношение одновременно является уравнением прямой, касательной к лучу в точке наблюдения в координатах $x$, $y$, если зафиксировать $\varepsilon$ и $p$, и, с другой стороны, представлением точки наблюдения $x, y$ пучком проходящих через нее прямых в лучевых (проективных) координатах $\varepsilon$, $p$.

Если высота низкоорбитального спутника над поверхностью Земли $h_{LEO} = 720$ км, то расстояние наблюдения $x \approx \sqrt{2r_E h_{LEO}} \approx 3000$ км. Углы рефракции в атмосфере Земли могут достигать величины 0.05 рад. Поскольку при этом $x\varepsilon \gg \dfrac{y\varepsilon^2}{2} \approx \dfrac{r_E\varepsilon^2}{2}$, можно приближенно записать

$$x\varepsilon + y = p. \qquad (7.2.2)$$

Пользуясь этим уравнением, можно ввести геометрическую зависимость угла рефракции от прицельного параметра и точки наблюдения (рис. 22):

$$\varepsilon_G(x, y, p) \approx \frac{p - y}{x}. \qquad (7.2.3)$$

Если задан атмосферный профиль угла рефракции $\varepsilon(p)$, то лучи, приходящие в данную точку наблюдения, определяются из уравнения $\varepsilon_G(x, y, p) = \varepsilon(p)$.

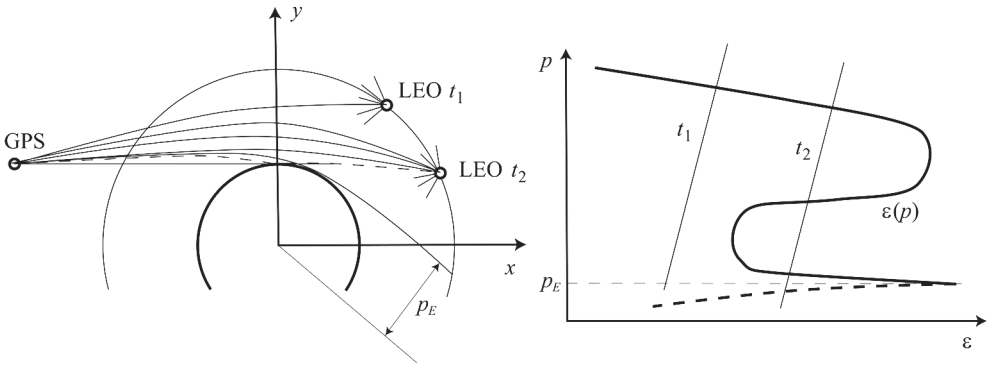



**Рис. 22.** Геометрия радиозахода. Каждая точка наблюдения на орбите низкоорбитального спутника (LEO) характеризуется набором виртуальных лучей, проходящих через точку. Отраженный луч показан пунктиром. В плоскости (ε, *p*) каждая точка наблюдения представляется линией виртуальных лучей. Истинные лучи, проходящие через заданную точку, соответствуют пересечению этих линий с графиком зависимости ε(*p*). Ветвь функции ε(*p*), соответствующая отраженным лучам, показана пунктиром

Радиооптический метод основан на анализе измеренного волнового поля $u(t)$ с использованием некоторого опорного сигнала $u_m(t)$. К опорному сигналу предъявляются следующие требования: 1) для опорного сигнала должна быть известна геометрооптическая лучевая структура; 2) опорный сигнал должен соответствовать ситуации однолучевого распространения. В частности, можно задавать некоторую достаточно гладкую модель показателя преломления $n_m(r)$ и вычислять опорный сигнал на основании прямого моделирования радиозахода. Поскольку в однолучевой области амплитуда поля является гладкой функцией, опорный сигнал часто задается в виде

$$u_m(t) = \exp(ik\,\Psi_m(t)). \qquad (7.2.4)$$

Мы пользуемся опорным сигналом, вычисленным для климатологической модели атмосферы MSIS, дополненной простой моделью влажности: ниже 15 км относительная влажность принимается всюду равной 80%. Точность такой модели оказывается достаточной. Методы вычисления эйконала $\Psi_m(t)$ по заданному вертикальному профилю показателя преломления для заданной геометрии наблюдений обсуждались в разделе 5.1.

Рассмотрим некоторый момент времени $t_0$. Приемник LEO находится в точке $(x(t_0), y(t_0))$. Зададим апертуру на траектории наблюдения, соответствующую интервалу времени от $t_0 - \dfrac{\Delta T}{2}$ до $t_0 + \dfrac{\Delta T}{2}$, где $\Delta T$ – время когерентной обработки данных. Удобно ввести вертикальный размер апертуры $a$. Внутри этой апертуры рассмотрим комплексное поле:

$$u(t) = A(t)\exp(ik\,\Psi(t)), \qquad (7.2.5)$$

где $a(t)$ – амплитуда, $\varphi(t)$ – накопленная фаза. Далее рассматривается отношение измеренного и опорного сигналов, т.е. комплексное поле с пониженной пространственной частотой [3–7]:

$$\Delta u(t) = \frac{u(t)}{u_m(t)} = a(t)\exp\left(ik\left(\Psi(t) - \Psi_m(t)\right)\right). \tag{7.2.6}$$

Радиус кривизны волнового фронта, пользуясь соотношением (7.2.2), можно оценить следующим образом:

$$R = -\frac{dy}{d\varepsilon} = x - \frac{1}{\varepsilon'_p}. \tag{7.2.7}$$

В нижней тропосфере величина $x\varepsilon'_p$ может достигать 100, поэтому радиусы кривизны волновых фронтов разных лучей можно считать одинаковыми и близкими к расстоянию наблюдения $x$. Таким образом, кривизна волновых фронтов интерферирующих лучей примерно равна кривизне волнового фронта опорного сигнала. В сигнале $\Delta u(t)$ общая кривизна волновых фронтов будет убрана, и в каждой скользящей апертуре его можно рассматривать как сумму плоских волн. Представим это поле в виде суммы Фурье-гармоник:

$$\begin{gathered}\Delta u\left(t\right) w\left(t - t'\right) = \sum_j \tilde{u}_j \exp\left(i\omega_j t\right), \\ \omega_j = \frac{2\pi j}{T}.\end{gathered} \tag{7.2.8}$$

Здесь $t'$ – центр скользящей апертуры, $w(t - t')$ – оконная функция апертуры шириной $T$, которую мы выбирали в следующей форме:

$$w\left(t\right) = \begin{cases} \cos^2\left(\pi\dfrac{t}{T}\right), & |t| < \dfrac{T}{2}, \\ 0, & |t| \geq \dfrac{T}{2}. \end{cases} \tag{7.2.9}$$

Оценки оптимального размера апертуры, определяющего ширину окна $T$, получены ниже. Каждая гармоника соответствует лучу с амплитудой $\tilde{u}_j$ и относительным доплеровским сдвигом частоты

$$d_j = -\frac{1}{\omega_{GPS}}\left(\frac{\dot{\Psi}_m(t)}{k} - \omega_j\right). \tag{7.2.10}$$

Роль опорного сигнала очень важна для улучшения разрешения. Опорный сигнал корректирует среднюю кривизну волнового фронта и, таким образом, фокусирует синтезированную апертуру на лимбе планеты. Применение спектрального анализа в скользящих апертурах непосредственно к измеренному сигналу $u(t)$ дает существенно худшие результаты, поскольку лучи примерно соответствуют сферическим волнам, и их плосковолновой спектр размыт.

Пользуясь таким разложением поля в скользящих апертурах, из одномерного сигнала $u(t)$ получаем функцию двух переменных $\tilde{u}\left(t, \omega\right)$. Эта функция называется спектрограммой. Поскольку каждая частота $\omega$ соответствует определенному направлению луча, эта функция фактически задана на лучевом, или фазовом пространстве.

Пользуясь геометрооптическими соотношениями раздела 5.1 или 5.3, можно определить угол рефракции и прицельный параметр как функции от точки наблюдения и доплеровской частоты $\varepsilon(t, \omega)$ и $p(t, \omega)$. Они определяются уравнениями

$$\dot{\Psi}_m(t) - k\omega = \\ = \dot{\theta}(t)\, p(t,\omega) + \frac{\dot{r}_L(t)}{r_L(t)}\sqrt{r_L^2(t) - p(t,\omega)^2} + \frac{\dot{r}_G(t)}{r_G(t)}\sqrt{r_G^2(t) - p(t,\omega)^2}, \quad (7.2.11)$$

$$\epsilon(t,\omega) = \theta(t) - \arccos\frac{p(t,\omega)}{r_L(t)} - \arccos\frac{p(t,\omega)}{r_G(t)}.$$

Для фиксированного момента времени $t$ эти функции являются параметрической формой записи геометрической зависимости $\varepsilon_G(t, p)$. Поэтому модуль пространственного спектра $\left|\tilde{u}(t,\omega)\right|$ для данной точки наблюдения можно изобразить в лучевых координатах вдоль кривой $\varepsilon_G(t, p)$ (рис. 23). При этом ожидается, что этот спектр будет иметь максимумы, соответствующие лучам, т.е. в точках пересечения кривых $\varepsilon_G(t, p)$ и $\varepsilon(p)$. Спектры $\left|\tilde{u}(t,\omega)\right|$ для разных точек наблюдения, соответствующих разным моментам времени $t$, будут при этом покрывать всю плоскость лучевых координат, и их максимумы будут расположены вдоль кривой $\varepsilon(p)$.

Таким образом, из функции $\tilde{u}(t,\omega)$ строим функцию $\tilde{u}(p,\varepsilon)$, где сохраняем то же обозначение для функции в новых координатах. Подобное преобразование является реализацией канонического преобразования от координат $\left(t, \dot{\Psi}_m - k\omega\right)$ к координатам $(p, -\varepsilon)$, описанного в разделе 5.3. Построенная функция $\tilde{u}(p,\varepsilon)$ является плотностью распределения энергии на фазовом пространстве, и максимум плотности лежит на лучевом многообразии. В дальнейшем рассмотрим широкий класс таких плотностей и их свойства и увидим, что правильнее их следует называть псевдо-плотностями. В силу того что канонические преобразования сохраняют элемент фазового объема, естественно считать, что плотность энергии остается инвариантной при канонических преобразованиях.

Размер синтезированной апертуры не должен быть слишком большим. Иначе апертура охватит большое количество физических лучей с разными пространственными частотами, что приведет к размытию спектра. При выборе слишком малого размера апертуры ухудшается спектральное разрешение. Таким образом, должна существовать оптимальная величина скользящей апертуры, которую мы сейчас оценим.

Разрешение по углу рефракции и прицельному параметру оценивается следующим образом:

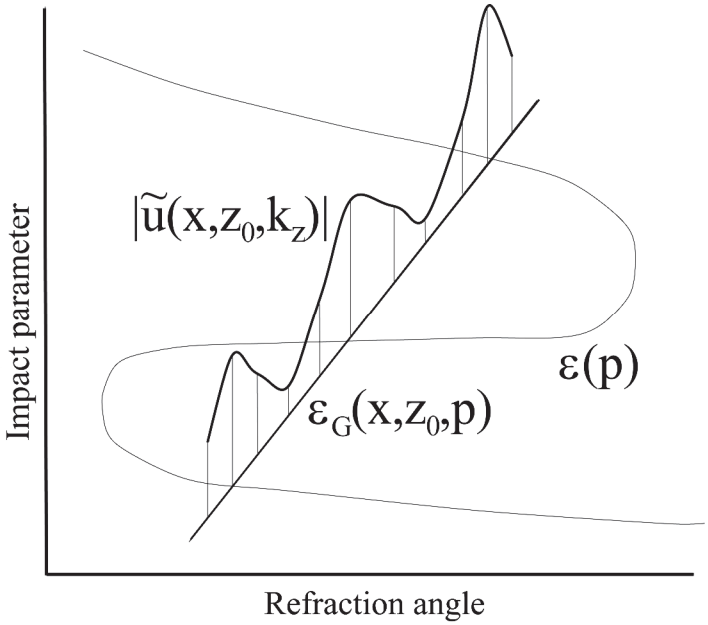



**Рис. 23.** Геометрия вычисления локального пространственного спектра волнового поля в лучевых координатах

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon &= \frac{\lambda}{a}, \\ \Delta p &= \left|\frac{dp}{dy}\right| a = \frac{a}{\zeta}, \end{aligned} \tag{7.2.12}$$

где $\zeta = 1 - x\dfrac{d\varepsilon}{dp}$. Поскольку угол рефракции и прицельный параметр должны также удовлетворять геометрическому соотношению (7.2.2), их неопределенности можно оценить следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta p^2 &= \Delta p^2 + x^2\Delta\varepsilon^2 = \frac{a^2}{\zeta^2} + \frac{x^2\lambda^2}{a^2}, \\ \delta\varepsilon^2 &= \Delta\varepsilon^2 + \frac{\Delta\varepsilon^2}{x^2} = \frac{a^2}{x^2\zeta^2} + \frac{\lambda^2}{a^2}. \end{aligned} \tag{7.2.13}$$

Оптимальный размер апертуры тогда равен

$$a = \sqrt{\zeta x\lambda}. \tag{7.2.14}$$

Эта оценка совпадает с размером зоны Френеля в плоскости наблюдения, т.е. с физическим размером луча, как и следовало ожидать. Для неопределенностей угла рефракции и прицельного параметра тогда получаются оценки

$$\delta\varepsilon = \sqrt{\frac{\lambda}{\zeta x}}, \quad \delta p = \sqrt{\frac{\lambda x}{\zeta}}. \tag{7.2.15}$$

Для их произведения имеем соотношение неопределенностей

$$\delta p \cdot \delta\varepsilon = \frac{\lambda}{\zeta}. \tag{7.2.16}$$

Для случая слабой рефракции ($\zeta \approx 1$), расстояния наблюдения 3000 км и длины волны 20 см получаем, что неопределенность угла рефракции составляет $2.6\times10^{-4}$ рад, а неопределенность прицельного параметра – около 800 м. Для целей численного прогноза погоды необходимо восстанавливать температуру с точностью 1 К (0.3%) и давление с точностью 1 гПа (0.1%) поэтому точность определения угла рефракции должна быть около 0.1%. В нижней тропосфере точность угла рефракции должна быть около $2\times10^{-5}$ рад. Эта величина экспоненциально убывает с высотой. Точность определения геопотенциальных высот должна быть около 10 м, поэтому примерно такой же должна быть точность определения прицельного параметра. В нижней тропосфере, где существенны эффекты многолучевого распространения, величина неопределенностей может значительно снижаться за счет увеличения фактора $\zeta$. Так, если $\zeta = 100$, что является типичным значением в численных экспериментах с глобальными полями ECMWF, то неопределенности угла рефракции и прицельного параметра уменьшатся в 10 раз.

Оценки разрешения, приведенные выше, понимаются как оценки возможности разделения множественных интерферирующих лучей. При анализе однолучевых сигналов сам измеряемый сигнал (с небольшим сглаживанием фазы и амплитуды для удаления шумов) удовлетворяет требованиям, предъявляемым к опорному сигналу. В частности, из него можно непосредственно определить профиль угла рефракции, пользуясь формулами. Поэтому применение радиооптического анализа в однолучевых зонах приводит к очень узким пространственным спектрам с шириной около 70 м [6]. Однако в однолучевой области применение радиооптического анализа не дает новой информации. С другой стороны, в многолучевых областях получаемые спектры имеют значительно большую ширину, примерно соответствующую нашим оценкам. В частности, в нижнетропосферных спектрах, приведенных в [6], ширина максимума главного луча составляет около 1 км.

Отметим, что для применения этого метода необходимо знать величину $\zeta$, от которой зависит величина скользящей апертуры. При этом $\zeta$ сама зависит от неизвестного профиля угла рефракции. В численном моделировании, описанном ниже, мы оцениваем $\zeta$, вычисляя профиль угла рефракции из измеренной фазы с сильным сглаживанием.

Ограничение на разрешение вследствие неопределенностей угла рефракции и прицельного параметра не является единственным ограничением радиооптического метода. Более существенное ограничение возникает вследствие того, что метод основан на лучевых представлениях. Однако в окрестностях каустик эти представления не работают, и максимумы пространственных спектров волнового поля нельзя, вообще говоря, связывать с лучами.

Опыт применения радиооптического анализа показывает, что, хотя радиооптический метод может помочь определить лучевую структуру волнового поля в многолучевых зонах, его прямое применение к восстановлению зависимости $\varepsilon(p)$ наталкивается на определенные трудности. Не все максимумы пространственных спектров в прикаустических зонах могут отождествляться с лучами. При этом проблемы обработки данных в прикаустических зонах связаны не только с дифракционными эффектами. Удаление тренда из фазы (7.2.6), позволяющее скорректировать кривизны волновых фронтов, основано на том, что кривизны интерферирующих волновых фронтов близки, что верно лишь, если $x\varepsilon'_p \gg 1$. На каустиках это соотношение не имеет места, как показывает рис. 23. Неточная коррекция квадратичного тренда в фазах различных лучей приводит к размыванию пространственных спектров. Трудность эта носит принципиальный характер, поскольку структура каустик и кривизна волновых фронтов заранее неизвестны.

Предпринимались попытки строить разложение поля по более сложному набору базисных функций, состоящему из волн с разной кривизной волновых фронтов, при помощи метода MUSIC (Multiple Signal Classification) [3, 5, 12]. Однако эти попытки не дали улучшения точности.

Другое неудобство применения радиооптического метода для восстановления профилей угла рефракции состоит в том, что для каждого момента времени $t_k$ этот метод дает, вообще говоря, множественные пары $(\varepsilon_{k,\,I}\,,\ p_{k,\,i})$ (индекс $k$нумерует моменты времени, а индекс $i$ – лучи). Для получения профиля $\varepsilon(p)$ их нужно сортировать по прицельным параметрам. Однако среди выявленных максимумов спектра некоторые могут оказаться не связанными с геометрооптическими лучами. Это будет приводить к существенным ошибкам в полученном профиле $\varepsilon(p)$.

Мы видим, что радиооптический метод имеет существенные ограничения по разрешению и точности, а также по удобству применения для оперативной обработки данных. Тем не менее этот метод является очень важным инструментом анализа волновых полей, регистрируемых в радиозатменных экспериментах. В частности, это удобное средство визуализации данных, которое позволяет легко выявлять различные проблемы. Ниже это будет показано на примере анализа данных GPS/MET и CHAMP.

## Литература


1. *Lindal G.F., Lyons J.R., Sweetnam D.N., Eshleman R., Hinson D.P., Tyler G.L.* The atmosphere of Uranus: Results of radio occultation measurements with Voyager 2 // Journal of Geophysical Research. 1987. V. 92, No. A13. P. 14987–15001.

2. *Павельев А.Г.* О возможности радиоголографического исследования радиополей вблизи зоны радиотени на трассах спутник–спутник // Радиотехника и электроника. 1998. Т. 43, № 8. С. 875–879.

3. *Hocke K., Pavelyev A.G., Yakovlev O.I., Barthes L., Jakowski N.* Radio occultation data analysis by the radioholographic method // Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics. 1999. V. 61, No. 15. P. 1169–1177.

4. *Beyerle G., Hocke K.* Observation and simulation of direct and reflected GPS signals in radio occultation experiments // Geophysical Research Letters. 2001. V. 28, No. 9. P. 1895–1898.

5. *Beyerle G., Hocke K., Wickert J., Schmidt T., Marquardt C., Reigber C.* GPS radio occultations with CHAMP: A radio holographic analysis of GPS signal propagation in the troposphere and surface reflections // Journal of Geophysical Research. 2002. V. 107, No. D24. P. 27-1–27-14. doi: 10.1029/2001JD001402

6. *Pavelyev A., Igarashi K., Reigber C., Hocke K., Wickert J., Beyerle G., Matyugov S., Kucherjavenkov A., Pavelyev D., Yakovlev O.* First application of the radioholographic method to wave observations in the upper atmosphere // Radio Science. 2002. V. 37, No. 3. P. 15-1–15-11. doi: 10.1029/2000RS002501

7. *Pavelyev A., Tsuda T., Igarashi K., Liou Y. A., Hocke K.* Wave structures in the electron density profile in the ionospheric D- and E-layers observed by radio holography analysis of the GPS/MET radio occultation data // Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics. 2003. V. 65, No. 1. P. 59–70.

8. *Sokolovskiy S.V.* Modeling and inverting radio occultation signals in the moist troposphere // Radio Science. 2001. V. 36, No. 3. P. 441–458.

9. *Hocke K., Igarashi K., Pavelyev A.* Irregularities of the topside ionosphere observed by GPS/MET radio occultation // Radio Science. 2002. V. 37, No. 6. P. 13-1–13-11. doi: 10.1029/2001RS002599

10. *Hocke K., Igarashi K., Nakamura M., Wilkinson P., Wu J., Pavelyev A., Wickert J.* Global sounding of sporadic E layers by the GPS/MET radio occultation experiment // Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics. 2001. V. 63, No. 18. P. 1973–1980.

11. *Igarashi K., Pavelyev A., Wickert J., Hocke K., Pavelyev D.* Application of radio holographic method for observation of altitude variations of the electron density in the mesosphere/Lower Thermosphere Using GPS/MET Radio Occultation Data // Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics. 2002. V. 64, No. 8–11. P. 959–969.

12. *Schmidt R.O.* Multiple emitter location and signal parameter estimation // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 1986. V. 34, No. 3. P. 276–280.

## 7.3. Общий подход к фазовым плотностям осциллирующих сигналов

Вопросы построения плотностей осциллирующих сигналов на соответствующих фазовых пространствах принадлежат к частотно-временному анализу [1, 2]. В этом разделе рассмотрим некоторые исходные соображения, позволяющие строить такие распределения.

Рассмотрим быстро-осциллирующий сигнал $u(t)$. Фурье-преобразование этого сигнала обозначим $\tilde{u}(\omega)$. Как и ранее в данной монографии, пользуемся нормировкой Фурье-преобразования, сохраняющей энергию. Как мы знаем, глобальное преобразование Фурье не позволяет ничего сказать о мгновенных частотах сигнала в заданные моменты времени. Нас интересует распределение энергии $P(t, \omega)$ на фазовой плоскости, которое позволяет определять мгновенный спектральный состав сигнала. Поскольку предполагается, что величина $P(t, \omega)$ является плотностью распределения энергии, общая энергия должна равняться

$$E = \iint P(t,\omega)\, dt\, d\omega. \tag{7.3.1}$$

С другой стороны, общая энергия сигнала равна

$$E = \int |u(t)|^2\, dt = \int |\tilde{u}(\omega)|^2\, d\omega. \tag{7.3.2}$$

Это позволяет сделать следующие выводы: 1) распределение $P(t, \omega)$ выражается квадратичным функционалом от сигнала $u(t)$ и 2) распределение $P(t, \omega)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\int P(t,\omega)\,dt = \left|\tilde{u}(\omega)\right|^2, \qquad \int P(t,\omega)\,d\omega = \left|u(t)\right|^2. \tag{7.3.3}$$

Указанные условия не дают однозначного определения функции распределения $P(t, \omega)$. Очевидным примером распределения, удовлетворяющего этим условиям, является следующая функция:

$$K(t,\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} u(t)\tilde{u}^*(\omega)\exp(-it\omega). \tag{7.3.4}$$

На первый взгляд, это распределение не имеет практической пользы, поскольку оно является просто прямым произведением сигнала на его преобразование Фурье, с точностью до некоторого фазового множителя. Однако ниже мы увидим, что это не так, и это распределение действительно может играть важную роль в изучении плотностей на фазовом пространстве. Это распределение носит имя Кирквуда [3] и было введено в квантовой статистике. Распределение Кирквуда является примером псевдо-плотности энергии, поскольку в силу осциллирующего характера как самого сигнала, так и его Фурье-преобразования эта функция является знакопеременной. Однако, если рассматривать это ядро в качестве обобщенной функции, оно будет ядром линейного функционала вида

$$\iint K(t,\omega)\varphi(t,\omega)\,dt\,d\omega, \tag{7.3.5}$$

где $\varphi(t, \omega)$ – достаточно гладкая основная функция. Этот функционал выражается осциллирующим интегралом, основной вклад в который дает множество стационарной фазы, которое совпадает с окрестностью носителя микроканонического распределения (в терминах квантовой физики) или лучевого многообразия (в терминах волновой оптики). Детально это будет рассмотрено в дальнейших разделах.

Поскольку сформулированных выше условий недостаточно для однозначного определения функции распределения, необходимо привлекать дополнительные соображения. Одно из таких соображений существенным образом опирается на понятие канонического преобразования. Мы можем потребовать инвариантности функции распределения относительно некоторой группы симметрий, реализуемой группой канонических преобразований. Идея такого построения заключается в том, что если имеется каноническое преобразование $(t, \omega) \to (t', \omega')$, то можно потребовать инвариантности плотности энергии относительно него:

$$P'(t',\omega') = P\left(t(t',\omega'),\omega(t',\omega')\right). \tag{7.3.6}$$

Это требование является вполне естественным в силу того, что каноническое преобразование сохраняет элемент площади $dt \wedge d\omega$. Кроме того, можно потребовать, чтобы условия (7.3.3) также были инвариантны относительно этой

группы симметрий. Ниже мы покажем, что эти требования приводят к однозначному определению плотности. В частности, рассмотрение группы вращений плоскости ($t$, ω) приводит к плотности вида

$$W(t,\omega)=\frac{1}{2\pi}\int \exp(-i\omega s)\, u\left(t+\frac{s}{2}\right)\overline{u}\left(t-\frac{s}{2}\right)ds. \qquad (7.3.7)$$

Эта плотность имеет важнейшее значение как в физике, так и при цифровой обработке сигналов. В физике эта плотность была введена в работах основоположников квантовой механики Дирака, Вейля, Гейзенберга и Вигнера [4–7]. Первым ее смысл понял именно Вигнер, чье имя она и носит. В физике квантовая плотность Вигнера была введена в связи с рассмотрением оператора плотности, являющегося обобщением волновой функции в тех случаях, когда систему невозможно описать волновой функцией [8]. Плотность Вигнера появляется как символ оператора плотности, т.е. его классический аналог, соответствующий плотности распределения частиц в фазовом пространстве. Плотность Вигнера содержит ту же информацию, что и исходная волновая функция, что позволяет построить вигнеровское представление квантовой механики [9]. Этот подход мы детально опишем в следующих разделах. В цифровой обработке сигналов эта плотность носит название спектров Вигнера–Вилля [10]. Плотность Вигнера, называемая также лучевой плотностью, применяется в статистической радиофизике [11] и акустике океана [12].

## Литература


1. *Cohen L.* Time-Frequency Distribution // A Review, Proceedings of the IEEE. 1989/ V. 77, No. 7. P. 941–981.
2. Time frequency signal analysis and processing. A comprehensive reference / Ed. by Boualem Boashash. Amsterdam: Elsevier, 2003. 744 p.
3. *Kirkwood J.G.* Quantum statistics of almost classical assemblies // Phys. Rev. July 1933. V. 44 . P. 31−37.
4. *Dirac P.A.M.* Note on exchange phenomena in the Thomas atom // Proc. Camb. Phil. Soc. 1930. V. 26. P. 376−395.
5. *Weyl H.* The theory of groups and quantum mechanics. Dover, New York, 1931.
6. *Heisenberg W*. Über die inkohärente Streuung von Röntgenstrahlen // Physik. Zeitschr. 1931. V. 32. P. 737−740.
7. *Wigner E.P*. On the quantum correction for thermodynamic equilibrium // Phys. Rev. June 1932. V. 40. P. 749 −759.
8. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика (нерелятивистская теория). Изд. 4-е. М.: Наука, 1989. 768 с. («Теоретическая физика». Т. III).
9. *Татарский В.И.* Вигнеровское представление квантовой механики // Успехи физических наук. 1983. Т. 139, № 4. С. 587–619.
10. *Ville J.* Théorie et applications de la notion de signal analytique, cables et transmission. 1948. V. 2A. P. 61−74.
11. *Кляцкин В.И.* Стохастические уравнения. Теория и ее приложения к акустике, гидродинамике и радиофизике. В 2 т. М.: Физматлит, 2008.
12. *Вировлянский А.Л.* Лучевая теория дальнего распространения звука в океане. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 2006. 164 с.

## 7.4. Плотности и наблюдаемые в классической механике

В классической механике динамика каждой частицы описывается гамильтоновой системой. Пусть $x$ – координата частицы, $\xi$ – ее импульс, $H(x$б $\xi)$ – функция Гамильтона. Уравнения динамики имеют следующий вид:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \xi}, \quad \dot{\xi} = -\frac{\partial H}{\partial x}. \tag{7.4.1}$$

Рассмотрим ансамбль частиц, описываемых плотностью $\rho(x, \xi)$ в фазовом пространстве. Зададим меру Лиувилля $dx \wedge d\xi$. Рассмотрим динамику частиц в течение бесконечно малого интервала времени $\delta t$:

$$x_{\delta t} = x_0 + \frac{\partial H}{\partial \xi}\delta t; \quad \xi_{\delta t} = \xi_0 - \frac{\partial H}{\partial x}\delta t. \tag{7.4.2}$$

Для дифференциалов координат имеем соотношения

$$\begin{aligned} dx_{\delta t} &= dx_0 + \delta t\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x\,\partial \xi}dx_0 + \frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2}d\xi_0\right), \\ d\xi_{\delta t} &= d\xi_0 - \delta t\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x\,\partial \xi}d\xi_0 + \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}dx_0\right). \end{aligned} \tag{7.4.3}$$

Тогда мера преобразуется следующим образом:

$$dx_{\delta t} \wedge d\xi_{\delta t} = dx_0 \wedge d\xi_0\left(1 + \frac{\partial^2 H}{\partial x\,\partial \xi}\delta t - \frac{\partial^2 H}{\partial x\,\partial \xi}\delta t\right) = dx_0 \wedge d\xi_0. \tag{7.4.4}$$

Этим доказано, что в каждый момент времени производная меры Лиувилля равна 0, следовательно, гамильтонов поток сохраняет меру Лиувилля. Поскольку сохраняются число частиц в элементе объема и мера элемента объема фазового пространства, полная производная плотности вдоль траекторий гамильтоновой системы равна 0:

$$\frac{d\rho_t}{dt} = \frac{\partial \rho_t}{\partial t} + \frac{\partial \rho_t}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial \rho_t}{\partial \xi}\dot{\xi} = \frac{\partial \rho_t}{\partial t} + \frac{\partial \rho_t}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial \xi} - \frac{\partial \rho_t}{\partial \xi}\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial \rho_t}{\partial t} + \{\rho_t, H\} = 0, \tag{7.4.5}$$

где $\{\cdot,\cdot\}$ – скобки Пуассона. Плотность удовлетворяет уравнению Лиувилля:

$$\frac{\partial \rho_t}{\partial t} = -\{\rho_t, H\}. \tag{7.4.6}$$

Наблюдаемой называется функция от координат и импульсов $B(x, \xi)$, описывающая результаты физических экспериментов. Рассмотрим картину Шредингера, в которой наблюдаемые не меняются, а плотность меняется в соответствии с уравнением Лиувилля. Среднее значение наблюдаемой в момент времени $t$ равно

$$\overline{B}_t = \int B(x,\xi)\rho_t(x,\xi)\,dx\,d\xi. \tag{7.4.7}$$

Определим оператор $\hat{D}_H$ как

$$\hat{D}_H F = \{F, H\}. \tag{7.4.8}$$

В картине Шредингера плотность со временем меняется следующим образом:

$$\rho_t = \exp\left(-t\hat{D}_H\right)\rho_0. \tag{7.4.9}$$

Рассмотрим два потока частиц с плотностями $\rho'$ и $\rho''$, переносимых одним и тем же гамильтоновым потоком. В силу сохранения потоком фазового объема и равенства 0 полных производных плотностей вдоль траектории можно записать

$$\int \rho'_t\rho''_t\,dx_0\,d\xi_0 = \int \rho'_t\rho''_t\,dx_t\,d\xi_t = \int \rho'_0\rho''_0\,dx_0\,d\xi_0. \tag{7.4.10}$$

С другой стороны, этот интеграл равен следующему выражению:

$$\int \exp\left(-t\hat{D}_H\right)\rho'_0 \exp\left(-t\hat{D}_H\right)\rho''_0\,dx\,d\xi = \int \rho'_0 \exp\left(-t\hat{D}^*_H\right)\exp\left(-t\hat{D}_H\right)\rho''_0\,dx\,d\xi. \tag{7.4.11}$$

Таким образом, $\exp\left(-t\hat{D}^*_H\right)\exp\left(-t\hat{D}_H\right) = \hat{I}$, т.е. оператор $\exp\left(-tD_H\right)$ унитарен, и $\hat{D}^*_H = -\hat{D}_H$, оператор $\hat{D}_H$ кососимметричен.

Среднее значение наблюдаемой можно записать в виде

$$\overline{B}_t = \int B(x,\xi)\exp\left(-t\hat{D}_H\right)\rho(x,\xi)\,dx\,d\xi = \int \exp\left(t\hat{D}_H\right)B(x,\xi)\rho(x,\xi)\,dx\,d\xi = \\ = \int B_t(x,\xi)\rho(x,\xi)\,dx\,d\xi. \tag{7.4.12}$$

Это соответствует представлению Гейзенберга, в котором плотность частиц не меняется, а наблюдаемые меняются в соответствии с уравнением Гейзенберга:

$$\frac{\partial B_t}{\partial t} = \{B_t, H\}. \tag{7.4.13}$$

Таким образом, в классической механике, аналогично квантовой, можно также ввести две эквивалентные картины описания динамической системы, являющейся ансамблем частиц, – картину Шредингера и картину Гейзенберга [1]. Соответственно этому вводятся два класса объектов: плотности и наблюдаемые, являющиеся двойственными по отношению друг к другу.

## Литература

1. *Глимм Дж., Джаффе А.* Математические методы квантовой физики. Подход с использованием функциональных интегралов. М.: Мир, 1984. 448 с.

## 7.5. Исчисление функций от некоммутирующих операторов

**Принцип соответствия классической и квантовой механики**

В квантовой механике состояние системы описывается волновой функцией, которую можно представить в виде суперпозиции плоских волн

$$\psi_t(x) = \exp\left[\frac{i}{\hbar}(x\xi - Et)\right], \tag{7.5.1}$$

описывающих в координатном представлении состояние частицы с наблюдаемым значением импульса $\xi$ и наблюдаемым значением энергии $E$. Это позволяет определить операторы импульса $\hat{\xi} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$, энергии $\hat{E} = -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}$ и координаты $\hat{x} = x$. В импульсном представлении координата будет дифференциальным оператором, а импульс – мультипликатором.

Принцип соответствия классической и квантовой механики утверждает, что классические соотношения и уравнения сохраняются в квантовой механике с подстановкой квантовых операторов координаты, импульса и энергии вместо классических величин. Это правило дополняется определением функций от операторов [1–3].

**Экспоненциальные функции от операторов**

Определение функций от операторов опирается на разложение произвольных функций по базису, состоящему из функций вида $\exp\left(\frac{i}{\hbar}\tilde{x}\,\hat{\xi}\right)$ и $\exp\left(\frac{i}{\hbar}\tilde{\xi}\,\hat{x}\right)$. В общем случае экспоненциальная функция от оператора $\exp\left(t\hat{A}\right)$ задает решение задачи Коши:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f_t}{\partial t} = \hat{A}\, f_t, \\ &f_t = \exp\left(t\hat{A}\right) f_0. \end{aligned} \tag{7.5.2}$$

Для оператора импульса в координатном представлении формулы упрощаются:

$$\exp\left(\frac{i}{\hbar}\tilde{x}\,\hat{\xi}\right) f(x) = \exp\left(\tilde{x}\,\frac{\partial}{\partial x}\right) f(x) = f(x + \tilde{x}). \tag{7.5.3}$$

В дальнейшем будем пользоваться формулой Кэмпбелла–Хаусдорфа, являющейся частным случаем формулы Дынкина [1, 4, 5]

$$\exp\left(\hat{R} + \hat{S}\right) = \exp\hat{R}\,\exp\hat{S}\,\exp\left(-\frac{1}{2}\left[\hat{R}, \hat{S}\right]\right), \tag{7.5.4}$$

справедливой, если $\left[\hat{R},\hat{S}\right]=\alpha\hat{I}$. Из этой формулы можно вывести:

$$\exp\hat{R}\exp\hat{S}=\exp\left(\hat{R}+\hat{S}\right)\exp\left(\frac{1}{2}\left[\hat{R},\hat{S}\right]\right)=\exp\hat{S}\exp\hat{R}\exp\left[\hat{R},\hat{S}\right]. \quad (7.5.5)$$

$$\exp\left(\hat{R}+\hat{S}\right)=\exp\left(\frac{\hat{R}}{2}+\left(\hat{S}+\frac{\hat{R}}{2}\right)\right)=\exp\frac{\hat{R}}{2}\exp\left(\hat{S}+\frac{\hat{R}}{2}\right)\exp\left(-\frac{1}{4}\left[\hat{R},\hat{S}\right]\right)=$$

$$=\exp\frac{\hat{R}}{2}\exp\left(\hat{S}\right)\exp\left(\frac{\hat{R}}{2}\right)\exp\left(-\frac{1}{4}\left[\hat{S},\hat{R}\right]\right)\exp\left(-\frac{1}{4}\left[\hat{R},\hat{S}\right]\right)=\exp\frac{\hat{R}}{2}\exp\hat{S}\exp\frac{\hat{R}}{2}. \quad (7.5.6)$$

Вычислим следующее выражение:

$$\exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(\tilde{\xi}\,\hat{x}+\tilde{x}\,\hat{\xi}\right)\right]f\left(x\right)=\exp\left(\frac{i}{\hbar}\tilde{x}\,\hat{\xi}\right)\exp\left(\frac{i}{\hbar}\tilde{\xi}\,\hat{x}\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{i}{\hbar}\tilde{x}\frac{i}{\hbar}\tilde{\xi}\left[\hat{\xi},\hat{x}\right]\right)f\left(x\right). \quad (7.5.7)$$

Коммутатор операторов импульса и координаты равен

$$\left[\hat{\xi},\hat{x}\right]=\left[\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x},x\right]=\frac{\hbar}{i}. \quad (7.5.8)$$

Поэтому выражение (7.5.7) преобразуется к следующему виду:

$$\exp\left(\tilde{x}\frac{\partial}{\partial x}\right)\exp\left[\frac{i}{\hbar}\tilde{\xi}\left(x-\frac{1}{2}\tilde{x}\right)\right]f\left(x\right)=\exp\left[\frac{i}{\hbar}\tilde{\xi}\left(x+\frac{1}{2}\tilde{x}\right)\right]f\left(x+\tilde{x}\right). \quad (7.5.9)$$

**Вейлевские и упорядоченные символы операторов**

Рассмотрим алгебраическую функцию $F(x, \xi)$ и ее Фурье-образ:

$$\tilde{F}\left(\tilde{\xi},\tilde{x}\right)=\left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^2\int F\left(x,\xi\right)\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\left(x\tilde{\xi}+\xi\tilde{x}\right)\right]dx\,d\xi. \quad (7.5.10)$$

Упорядоченная функция от операторов задается соотношением

$$F\left(\overset{2}{\hat{x}},\overset{1}{\hat{\xi}}\right)=\int\tilde{F}\left(\tilde{\xi},\tilde{x}\right)\exp\left(\frac{i}{\hbar}\tilde{\xi}\,\hat{x}\right)\exp\left(\frac{i}{\hbar}\tilde{x}\,\hat{\xi}\right)d\tilde{x}\,d\tilde{\xi}. \quad (7.5.11)$$

Вейлевская функция от операторов задается соотношением

$$F\left(\overset{\omega}{\hat{x}},\overset{\omega}{\hat{\xi}}\right)=\int\tilde{F}\left(\tilde{\xi},\tilde{x}\right)\exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(\tilde{\xi}\,\hat{x}+\tilde{x}\,\hat{\xi}\right)\right]d\tilde{x}\,d\tilde{\xi}. \quad (7.5.12)$$

Функция $F(x, \xi)$ называется упорядоченным или вейлевским символом оператора (7.5.11) или (7.5.12) соответственно.

**Асимптотические формулы для символа коммутатора двух операторов**

Рассмотрим выражение

$$F\left(\overset{2}{\hat{x}},\overset{1}{\hat{\xi}}\right)G\left(\overset{2}{\hat{x}},\overset{1}{\hat{\xi}}\right)=\iint\tilde{F}\left(\tilde{\xi}',\tilde{x}'\right)\tilde{G}\left(\tilde{\xi}'',\tilde{x}''\right)\times$$
$$\times\exp\left(\frac{i}{\hbar}\tilde{\xi}'\,\hat{x}\right)\exp\left(\frac{i}{\hbar}\tilde{x}'\,\hat{\xi}\right)\exp\left(\frac{i}{\hbar}\tilde{\xi}''\,\hat{x}\right)\exp\left(\frac{i}{\hbar}\tilde{x}''\,\hat{\xi}\right)d\tilde{x}'\,d\tilde{\xi}'\,d\tilde{x}''\,d\tilde{\xi}''. \tag{7.5.13}$$

Воспользовавшись формулой (7.5.5), преобразуем выражение

$$\exp\left(\frac{i}{\hbar}\tilde{x}'\,\hat{\xi}\right)\exp\left(\frac{i}{\hbar}\tilde{\xi}''\,\hat{x}\right)=\exp\left(\frac{i}{\hbar}\tilde{\xi}''\,\hat{x}\right)\exp\left(\frac{i}{\hbar}\tilde{x}'\,\hat{\xi}\right)\exp\left(\frac{i}{\hbar}\tilde{x}'\frac{i}{\hbar}\tilde{\xi}''\left[\hat{\xi},\hat{x}\right]\right). \tag{7.5.14}$$

Рассмотрим следующее приближение:

$$\exp\left(\frac{i}{\hbar}\tilde{x}'\frac{i}{\hbar}\tilde{\xi}''\left[\hat{\xi},\hat{x}\right]\right)=1+\frac{i}{\hbar}\tilde{x}'\frac{i}{\hbar}\tilde{\xi}''\frac{\hbar}{i}. \tag{7.5.15}$$

Поскольку $\tilde{F}\left(\tilde{\xi}',\tilde{x}'\right)\frac{i}{\hbar}\tilde{x}'$ соответствует $\frac{\partial F(x,\xi)}{\partial\xi}$ и, аналогично, $\tilde{G}\left(\tilde{\xi}'',\tilde{x}''\right)\frac{i}{\hbar}\tilde{\xi}''$ соответствует $\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x}$, символ оператора (7.5.13) равен с точностью до членов следующего порядка по $\hbar$:

$$F(x,\xi)G(x,\xi)+\frac{\hbar}{i}\frac{\partial F(x,\xi)}{\partial\xi}\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x''}. \tag{7.5.16}$$

Поэтому символ коммутатора $\left[F\left(\overset{2}{\hat{x}},\overset{1}{\hat{\xi}}\right),G\left(\overset{2}{\hat{x}},\overset{1}{\hat{\xi}}\right)\right]$ равен $-\frac{\hbar}{i}\{F,G\}$.

При рассмотрении вейлевского символа оператора $F\left(\overset{\omega}{\hat{x}},\overset{\omega}{\hat{\xi}}\right)G\left(\overset{\omega}{\hat{x}},\overset{\omega}{\hat{\xi}}\right)$ получим интеграл, аналогичный (7.5.13), в котором будет содержаться следующее выражение:

$$\exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(\tilde{\xi}'\,\hat{x}+\tilde{x}'\,\hat{\xi}\right)\right]\exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(\tilde{\xi}''\,\hat{x}+\tilde{x}''\,\hat{\xi}\right)\right]. \tag{7.5.17}$$

Пользуясь формулой (7.5.4), преобразуем его следующим образом:

$$\exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(\left(\tilde{\xi}'+\tilde{\xi}''\right)\hat{x}+\left(\tilde{x}'+\tilde{x}''\right)\hat{\xi}\right)\right]\exp\left(\frac{1}{2}\left[\frac{i}{\hbar}\left(\tilde{\xi}'\,\hat{x}+\tilde{x}'\,\hat{\xi}\right),\frac{i}{\hbar}\left(\tilde{\xi}''\,\hat{x}+\tilde{x}''\,\hat{\xi}\right)\right]\right). \tag{7.5.18}$$

Второй множитель приближенно равен

$$1+\frac{1}{2}\frac{i}{\hbar}\tilde{\xi}'\frac{i}{\hbar}\tilde{x}''\left[\hat{x},\hat{\xi}\right]+\frac{1}{2}\frac{i}{\hbar}\tilde{x}'\frac{i}{\hbar}\tilde{\xi}''\left[\hat{\xi},\hat{x}\right]=$$
$$=1+\frac{1}{2}\left(-\frac{i}{\hbar}\tilde{\xi}'\frac{i}{\hbar}\tilde{x}''+\frac{i}{\hbar}\tilde{x}'\frac{i}{\hbar}\tilde{\xi}''\right)\frac{\hbar}{i}. \tag{7.5.19}$$

Это соответствует символу

$$F(x,\xi)G(x,\xi)-\frac{1}{2}\frac{\hbar}{i}\{F,G\}. \tag{7.5.20}$$

Таким образом, и в случае вейлевского упорядочения операторов символ коммутатора $\left[F\left(\overset{\omega}{\hat{x}},\overset{\omega}{\hat{\xi}}\right),G\left(\overset{\omega}{\hat{x}},\overset{\omega}{\hat{\xi}}\right)\right]$ с точностью до членов следующих порядков по $\hbar$ равен $-\frac{\hbar}{i}\{F,G\}$.

**Связь между ядром и символом**

Ядро оператора зависит от представления, а символ зависит от упорядочения операторов. Далее проводим вычисления в координатном представлении. Получим формулы, позволяющие восстанавливать символ оператора по его ядру.

Ядро оператора $K_F(b,a)$ равно $\left(\hat{F}\delta(x-a),\delta(x-b)\right)$. Пользуясь формулой (7.5.6), рассмотрим оператор с вейлевским символом:

$$\hat{F}\delta(x-a)=\int\tilde{F}\left(\tilde{\xi},\tilde{x}\right)\exp\left(\frac{i}{\hbar}\frac{\tilde{\xi}}{2}x\right)\exp\left(\tilde{x}\frac{\partial}{\partial x}\right)\exp\left(\frac{i}{\hbar}\frac{\tilde{\xi}}{2}x\right)\delta(x-a)\,d\tilde{x}\,d\tilde{\xi}=$$
$$=\int\tilde{F}\left(\tilde{\xi},\tilde{x}\right)\exp\left(\frac{i}{\hbar}\frac{\tilde{\xi}}{2}x\right)\exp\left[\frac{i}{\hbar}\frac{\tilde{\xi}}{2}(x+\tilde{x})\right]\delta(x+\tilde{x}-a)\,d\tilde{x}\,d\tilde{\xi}= \tag{7.5.21}$$
$$=\int\tilde{F}\left(\tilde{\xi},a-x\right)\exp\left[\frac{i}{\hbar}\frac{\tilde{\xi}}{2}(x+a)\right]d\tilde{\xi}.$$

Отсюда получаем выражение для ядра оператора $K_F(b,a)$:

$$K_F(b,a)=\int\tilde{F}\left(\tilde{\xi},a-b\right)\exp\left[\frac{i}{\hbar}\tilde{\xi}\frac{(a+b)}{2}\right]d\tilde{\xi}. \tag{7.5.22}$$

Задавая $a=x+\frac{\tilde{x}}{2}$ и $b=x-\frac{\tilde{x}}{2}$, получаем выражение символа через ядро:

$$\int K_F\left(x-\frac{\tilde{x}}{2},x+\frac{\tilde{x}}{2}\right)\exp\left(\frac{i}{\hbar}\tilde{x}\tilde{\xi}\right)d\tilde{x}=$$
$$=\int\tilde{F}\left(\tilde{\xi},\tilde{x}\right)\exp\left(\frac{i}{\hbar}\tilde{\xi}x+\frac{i}{\hbar}\tilde{x}\tilde{\xi}\right)d\tilde{\xi}\,d\tilde{x}=F(x,\xi). \tag{7.5.23}$$

Обращая эту формулу, получаем выражение ядра через символ:

$$K_F(b,a)=\frac{1}{2\pi\hbar}\int F\left(\frac{b+a}{2},\xi\right)\exp\left[-\frac{i}{\hbar}(a-b)\xi\right]d\xi. \qquad (7.5.24)$$

Для вычисления ядра оператора с упорядоченным символом снова рассмотрим выражение

$$\begin{aligned}\hat{F}\delta(x-a)&=\int\tilde{F}(\tilde{\xi},\tilde{x})\exp\left(\frac{i}{\hbar}\tilde{\xi}\,x\right)\exp\left(\tilde{x}\frac{\partial}{\partial x}\right)\delta(x-a)\,d\tilde{x}\,d\tilde{\xi}=\\&=\int\tilde{F}(\tilde{\xi},\tilde{x})\exp\left(\frac{i}{\hbar}\tilde{\xi}\,x\right)\delta(x+\tilde{x}-a)\,d\tilde{x}\,d\tilde{\xi}=\\&=\int\tilde{F}(\tilde{\xi},a-x)\exp\left(\frac{i}{\hbar}\tilde{\xi}\,x\right)d\tilde{\xi}.\end{aligned} \qquad (7.5.25)$$

Отсюда получаем выражение для ядра оператора $K_F(b,a)$:

$$K_F(b,a)=\int\tilde{F}(\tilde{\xi},a-b)\exp\left(\frac{i}{\hbar}\tilde{\xi}\,b\right)d\tilde{\xi}. \qquad (7.5.26)$$

Задавая $a=x+\tilde{x}$ и $b=x$, получаем выражение символа через ядро:

$$\begin{aligned}&\int K_F(x,x+\tilde{x})\exp\left(\frac{i}{\hbar}\tilde{x}\xi\right)d\tilde{x}=\\&=\int\tilde{F}(\tilde{\xi},\tilde{x})\exp\left(\frac{i}{\hbar}\tilde{\xi}x+\frac{i}{\hbar}\tilde{x}\xi\right)d\tilde{\xi}=F(x,\xi).\end{aligned} \qquad (7.5.27)$$

Обращая эту формулу, получаем выражение ядра через символ:

$$K_F(b,a)=\frac{1}{2\pi\hbar}\int F(b,\xi)\exp\left[-\frac{i}{\hbar}(a-b)\xi\right]d\xi. \qquad (7.5.28)$$

**Связь между вейлевским и упорядоченным символами**

Рассмотрим оператор с упорядоченным символом $F^{x\xi}\left(\overset{2}{\hat{x}},\overset{1}{\hat{\xi}}\right)$. В координатном представлении его можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned}F^{x\xi}\left(\overset{2}{\hat{x}},\overset{1}{\hat{\xi}}\right)f(x)&=\iint\tilde{F}^{x\xi}(\tilde{\xi},\tilde{x})\exp\left(\frac{i}{\hbar}\tilde{\xi}\,x\right)\exp\left(\tilde{x}\frac{\partial}{\partial x}\right)d\tilde{x}\,d\tilde{\xi}\int\tilde{f}(\xi)\exp\left(\frac{i}{\hbar}\xi\,x\right)d\xi=\\&=\iiint\tilde{F}^{x\xi}(\tilde{\xi},\tilde{x})\exp\left(\frac{i}{\hbar}\tilde{\xi}\,x\right)\tilde{f}(\xi)\exp\left(\frac{i}{\hbar}\xi\,x\right)\exp\left(\frac{i}{\hbar}\xi\,\tilde{x}\right)d\xi\,d\tilde{x}\,d\tilde{\xi}=\\&=\int F^{x\xi}(\xi,x)\,\tilde{f}(\xi)\exp\left(\frac{i}{\hbar}\xi\,x\right)d\xi.\end{aligned} \qquad (7.5.29)$$

Аналогично рассмотрим оператор с вейлевским символом $F^W\left(\overset{\omega}{\hat{x}},\overset{\omega}{\hat{\xi}}\right)$:

$$F^W\left(\overset{\omega}{\hat{x}},\overset{\omega}{\hat{\xi}}\right)f(x)=\iint\tilde{F}^W\left(\tilde{\xi},\tilde{x}\right)\exp\left(\frac{i}{\hbar}\frac{\tilde{\xi}\,x}{2}\right)\exp\left(\tilde{x}\frac{\partial}{\partial x}\right)\exp\left(\frac{i}{\hbar}\frac{\tilde{\xi}\,x}{2}\right)d\tilde{x}\,d\tilde{\xi}\int\tilde{f}(\xi)\exp\left(\frac{i}{\hbar}\xi\,x\right)d\xi=$$

$$=\iiint\tilde{F}^W\left(\tilde{\xi},\tilde{x}\right)\exp\left(\frac{i}{\hbar}\tilde{\xi}\,x\right)\exp\left(\frac{i}{\hbar}\frac{\tilde{\xi}\,\tilde{x}}{2}\right)\tilde{f}(\xi)\exp\left(\frac{i}{\hbar}\xi\,x\right)\exp\left(\frac{i}{\hbar}\xi\,\tilde{x}\right)d\xi\,d\tilde{x}\,d\tilde{\xi}=$$

$$=\int F^{x\xi}(\xi,x)\,\tilde{f}(\xi)\exp\left(\frac{i}{\hbar}\xi\,x\right)d\xi=F^{x\xi}\left(\overset{2}{\hat{x}},\overset{1}{\hat{\xi}}\right)f(x),\qquad(7.5.30)$$

где $F^{x\xi}$ – упорядоченный символ, соответствующий вейлевскому символу $F^W$. Упорядоченный символ можно выразить следующим образом:

$$F^{x\xi}(\xi,x)=\iint\tilde{F}^W\left(\tilde{\xi},\tilde{x}\right)\exp\left(\frac{i}{\hbar}\tilde{\xi}\,x+\frac{i}{\hbar}\xi\,\tilde{x}\right)\exp\left(\frac{i}{\hbar}\frac{\tilde{\xi}\,\tilde{x}}{2}\right)d\tilde{x}\,d\tilde{\xi}=$$

$$=\frac{1}{4\pi^2\hbar^2}\iint\iint F^W\left(x',\xi'\right)\exp\left(\frac{i}{\hbar}\tilde{\xi}\left(x-x'\right)+\frac{i}{\hbar}\left(\xi-\xi'\right)\tilde{x}\right)\exp\left(\frac{i}{\hbar}\frac{\tilde{\xi}\,\tilde{x}}{2}\right)dx'\,d\xi'\,d\tilde{x}\,d\tilde{\xi}=$$

$$=F^W\left(x,\xi\right)*T_W^{x\xi}\left(x,\xi\right),\qquad(7.5.31)$$

где функция $T_W^{x\xi}\left(x,\xi\right)$ равна обратному преобразованию Фурье от $\exp\left(\frac{i}{\hbar}\frac{\tilde{\xi}\,\tilde{x}}{2}\right)$:

$$T_W^{x\xi}\left(x,\xi\right)=\frac{1}{4\pi^2\hbar^2}\iint\exp\left(\frac{i}{\hbar}\tilde{\xi}\,x+\frac{i}{\hbar}\xi\,\tilde{x}+\frac{i}{\hbar}\frac{\tilde{\xi}\,\tilde{x}}{2}\right)d\tilde{x}\,d\tilde{\xi}=$$

$$=\frac{1}{2\pi\hbar}\int\delta\left(x+\frac{\tilde{x}}{2}\right)\exp\left(\frac{i}{\hbar}\xi\,\tilde{x}\right)d\tilde{x}=\qquad(7.5.32)$$

$$=\frac{1}{\pi\hbar}\exp\left(-\frac{2i\,\xi\,x}{\hbar}\right).$$

Аналогично можно записать

$$F^W\left(x,\xi\right)=F^{x\xi}\left(x,\xi\right)*T_{x\xi}^W\left(x,\xi\right),$$

$$T_{x\xi}^W\left(x,\xi\right)=\frac{1}{\pi\hbar}\exp\left(\frac{2i\,\xi\,x}{\hbar}\right).\qquad(7.5.33)$$

Разложим $\tilde{T}_W^{x\xi}\left(\tilde{\xi},\tilde{x}\right)$ в ряд:

$$\tilde{T}_W^{x\xi}\left(\tilde{\xi},\tilde{x}\right)=\exp\left(\frac{i}{\hbar}\frac{\tilde{\xi}\,\tilde{x}}{2}\right)=1+\frac{1}{2}\frac{\hbar}{i}\frac{i}{\hbar}\tilde{\xi}\frac{i}{\hbar}\tilde{x}. \tag{7.5.34}$$

Таким образом, свертки (7.5.31) и (7.5.33) можно приближенно записать в следующей форме:

$$\begin{aligned} F^{x\xi}\left(\xi,x\right)&=\left(\hat{I}+\frac{1}{2}\frac{\hbar}{i}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial\xi}\right)F^W\left(x,\xi\right),\\ F^W\left(\xi,x\right)&=\left(\hat{I}-\frac{1}{2}\frac{\hbar}{i}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial\xi}\right)F^{x\xi}\left(x,\xi\right). \end{aligned} \tag{7.5.35}$$

При $\hbar\to 0$ асимптотически $T_W^{x\xi}\left(x,\xi\right)\to\delta\left(x\right)\delta\left(\xi\right)$ и $T_{x\xi}^W\left(x,\xi\right)\to\delta\left(x\right)\delta\left(\xi\right)$.

**Примеры**

Рассмотрим простые примеры применения исчисления функций от некоммутирующих операторов. Вычислим вейлевский и упорядоченный символы оператора $x\hat{\xi}$. Поскольку $\hat{\xi}=\dfrac{\hbar}{i}\dfrac{\partial}{\partial x}$, ядро этого оператора имеет вид

$$K\left(b,a\right)=\frac{\hbar}{i}b\,\delta'\left(b-a\right). \tag{7.5.36}$$

Подставляя ядро в формулу (7.5.27), получаем упорядоченный символ:

$$\int K\left(x,x+\tilde{x}\right)\exp\left(\frac{i}{\hbar}\tilde{x}\xi\right)d\tilde{x}=\frac{\hbar}{i}x\int\delta'\left(-\tilde{x}\right)\exp\left(\frac{i}{\hbar}\tilde{x}\xi\right)d\tilde{x}=x\xi. \tag{7.5.37}$$

Этот ответ является ожидаемым. Подставляя ядро в формулу (7.5.23), получаем вейлевский символ:

$$\begin{aligned} \int K\left(x-\frac{\tilde{x}}{2},x+\frac{\tilde{x}}{2}\right)\exp\left(\frac{i}{\hbar}\tilde{x}\xi\right)d\tilde{x}&=\frac{\hbar}{i}\int\left(x-\frac{\tilde{x}}{2}\right)\delta'\left(-\tilde{x}\right)\exp\left(\frac{i}{\hbar}\tilde{x}\xi\right)d\tilde{x}=\\ &=x\xi-\frac{1}{2}\frac{\hbar}{i}=x\xi-\frac{1}{2}\left[\hat{\xi},x\right]. \end{aligned} \tag{7.5.38}$$

Теперь зададим символ $x\xi$. Считая его упорядоченным, построим соответствующий оператор. Применим формулу (7.5.28):

$$\frac{1}{2\pi\hbar}\int b\xi\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\left(a-b\right)\xi\right]d\xi=\frac{\hbar}{i}b\,\delta'\left(b-a\right). \tag{7.5.39}$$

Этот ответ также является ожидаемым, поскольку это ядро соответствует оператору $x\hat{\xi}$.

Считая символ $x\xi$ вейлевским, применим формулу (7.5.24) и получим

$$\frac{1}{2\pi\hbar}\int\frac{b+a}{2}\xi\exp\left[-\frac{i}{\hbar}(a-b)\xi\right]d\xi=\frac{\hbar}{i}\frac{b+a}{2}\delta'(b-a). \qquad (7.5.40)$$

Это ядро соответствует оператору:

$$\frac{x\hat{\xi}+\hat{\xi}x}{2}. \qquad (7.5.41)$$

Такой ответ также является ожидаемым, поскольку вейлевское упорядочение симметрично по операторам $x$ и $\hat{\xi}$. С учетом этого рассмотрим вейлевский символ (7.5.38). Снова видим, что он соответствует оператору $x\hat{\xi}$:

$$\frac{x\hat{\xi}+\hat{\xi}x}{2}-\frac{\hat{\xi}x-x\hat{\xi}}{2}=x\hat{\xi}. \qquad (7.5.42)$$

### Литература


1. *Карасев М.В., Маслов В.П.* Нелинейные скобки Пуассона. Геометрия и квантование. М.: Наука, 1991. 368 с.
2. *Маслов В.П.* Асимптотические методы решения псевдодифференциальных уравнений. М.: Наука, 1987. 408 с.
3. *Березин Ф.А.* Метод вторичного квантования. М.: Наука, 1986.
4. *Славнов А.А., Фаддев Л.Д.* Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М.: Наука, 1988. 272 с.
5. *Постников М.М.* Лекции по геометрии. Семестр V. Группы и алгебры Ли. М.: Наука, 1982. 448 с.


## 7.6. Плотность и наблюдаемые в квантовой механике

**Оператор плотности**

Учитывая, что функция Гамильтона выражает энергию через координату и импульс, мы получаем уравнение Шредингера, описывающее динамику волновой функции:

$$\hat{E}\psi_t=H\left(\hat{x},\hat{\xi}\right)\psi_t. \qquad (7.6.1)$$

В картине Шредингера меняется волновая функция, а наблюдаемые $\hat{B}=B\left(\hat{x},\hat{\xi}\right)$ неподвижны. Эволюция волновой функции задается уравнением

$$\psi_t=\exp\left(-\frac{i}{\hbar}t\hat{H}\right)\psi_0. \qquad (7.6.2)$$

Средние значения наблюдаемых выражаются следующей квадратичной формой:

$$\overline{B}_t=\left(\hat{B}\psi_t,\psi_t\right). \qquad (7.6.3)$$

В картине Гейзенберга волновая функция неподвижна, а наблюдаемые меняются так, чтобы их средние значения оставались теми же, что и в картине Шредингера:

$$\overline{B}_t = \left( \exp\left(\frac{i}{\hbar} t\hat{H}\right) \hat{B} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} t\hat{H}\right) \psi_0, \psi_0 \right). \tag{7.6.4}$$

Наблюдаемые выражаются следующим образом:

$$\hat{B}_t = \exp\left(\frac{i}{\hbar} t\hat{H}\right) \hat{B} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} t\hat{H}\right), \tag{7.6.5}$$

и их динамика описывается операторным дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial \hat{B}_t}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} \hat{H}\hat{B}_t - \hat{B}_t \frac{i}{\hbar} \hat{H} = -\frac{i}{\hbar} \left[ \hat{B}_t, \hat{H} \right], \tag{7.6.6}$$

что является аналогом классического уравнения Гейзенберга (7.4.13) с заменой скобок Пуассона $\{\cdot,\cdot\}$ на коммутатор $-\frac{i}{\hbar}[\cdot,\cdot]$, что согласуется с приведенными выше результатами исчисления функций от операторов (псевдодифференциальных операторов).

Классическая плотность $\rho(x, \xi)$ является символом квантового оператора плотности $\rho\left(\hat{x}, \hat{\xi}\right)$. В рамках картины Шредингера оператор плотности удовлетворяет уравнению Лиувилля:

$$\frac{\partial \hat{\rho}_t}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} \left[ \hat{\rho}_t, \hat{H} \right] = -\frac{i}{\hbar} \hat{H}\hat{\rho}_t + \frac{i}{\hbar} \hat{\rho}_t \hat{H}. \tag{7.6.7}$$

Это уравнение позволяет установить связь оператора плотности с волновой функцией. Из уравнения (7.6.3) следует, что оператор $\hat{\rho}_t$ квадратичен по волновой функции $\psi_t$ и эрмитов, поэтому в общем виде можно записать

$$\hat{\rho}_t \varphi = U\left(\psi_t \otimes \overline{\psi}_t \otimes \varphi\right), \tag{7.6.8}$$

где $U$ – некоторый линейный функционал. В силу уравнения Шредингера

$$\frac{\partial \hat{\rho}_t \varphi}{\partial t} = U\left( -\frac{i}{\hbar} \hat{H}\psi_t \otimes \overline{\psi}_t \otimes \varphi \right) + U\left( \psi_t \otimes \left( \frac{i}{\hbar} \overline{\hat{H}\psi_t} \right) \otimes \varphi \right). \tag{7.6.9}$$

Сравнивая два члена этого выражения с (7.6.7), видим, что первый член должен быть равен $-\frac{i}{\hbar} \hat{H}\hat{\rho}_t \varphi$, следовательно, $\hat{\rho}_t \varphi = \psi_t U'\left(\overline{\psi}_t \otimes \varphi\right)$. Второй член должен быть равен $\frac{i}{\hbar} \hat{\rho}_t \hat{H} \varphi = \psi_t U'\left( \overline{\psi}_t \otimes \frac{i}{\hbar} \hat{H} \varphi \right)$, следовательно, $\hat{\rho}_t \varphi = \alpha \psi_t \left(\varphi, \psi_t\right)$, где $\alpha$ – нормировочная константа. Ядро этого оператора равно $K(b,a) = \alpha\, \psi(b) \overline{\psi}(a)$.

**Символ оператора плотности и средние значения наблюдаемых**

Пользуясь формулой (7.5.23) и выбирая нормировочную константу $\alpha = 1/2\pi\hbar$ так, чтобы $\iint \rho_t^W(x,\xi)\,dx\,d\xi = \int |\psi_t(x)|^2 dx$, получаем выражение для вейлевского символа оператора плотности:

$$\rho_t^W(x,\xi) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int \psi_t\left(x-\frac{\tilde{x}}{2}\right)\bar{\psi}_t\left(x+\frac{\tilde{x}}{2}\right)\exp\left(\frac{i}{\hbar}\tilde{x}\xi\right)d\tilde{x}. \qquad (7.6.10)$$

Это выражение называется квантовой плотностью Вигнера или функцией Вигнера. Среднее значение наблюдаемой равно

$$\begin{aligned}
\bar{B}_t &= \iint K_B(x',x'')\,\psi_t(x'')\,\bar{\psi}_t(x')\,dx'\,dx'' = \\
&= \iint \frac{1}{2\pi\hbar}\int B\left(\frac{x'+x''}{2},\xi'\right)\exp\left[-\frac{i}{\hbar}(x''-x')\xi'\right]d\xi' \times \\
&\quad \times \int \rho_t^W\left(\frac{x''+x'}{2},\xi''\right)\exp\left[-\frac{i}{\hbar}(x'-x'')\xi''\right]d\xi''\,dx'\,dx'' = \\
&= \frac{1}{2\pi\hbar}\iint\iint \exp\left[\frac{i}{\hbar}(x''-x')(\xi'-\xi'')\right]\times \\
&\quad \times B\left(\frac{x'+x''}{2},\xi'\right)\rho_t^W\left(\frac{x'+x''}{2},\xi''\right)d\xi'\,d\xi''\,dx'\,dx'' = \\
&= \iint B(x',\xi')\,\rho_t^W(x',\xi')\,d\xi'\,dx'.
\end{aligned} \qquad (7.6.11)$$

Это выражение для средних совпадает с классическим.

Рассмотрим волновую функцию в форме $\psi_t(x) = A_t(x)\exp\left(\frac{i}{\hbar}S_t(x)\right)$. Предположим, что лучевое многообразие имеет однозначную проекцию на оси $x$ и $\xi$. Тогда его уравнение можно записать в виде $\xi_S(x) = \frac{\partial S}{\partial x}$, и существует обратная функция $x_S(\xi)$. Выполнив разложение по $\tilde{x}$ в окрестности $x$, приближенно запишем функцию Вигнера в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\rho_t^W(x,\xi) &= \frac{1}{2\pi\hbar}\int A_t\left(x-\frac{\tilde{x}}{2}\right)A_t\left(x+\frac{\tilde{x}}{2}\right)\exp\left(\frac{i}{\hbar}S_t\left(x-\frac{\tilde{x}}{2}\right)-\frac{i}{\hbar}S_t\left(x+\frac{\tilde{x}}{2}\right)+\frac{i}{\hbar}\tilde{x}\xi\right)d\tilde{x} = \\
&= \frac{1}{2\pi\hbar}\int A_t^2(x)\exp\left(\frac{i}{\hbar}\tilde{x}\left(\xi-S_t'(x)\right)\right)d\tilde{x} = A_t^2(x)\,\delta\left(\xi-\xi_S(x)\right).
\end{aligned} \qquad (7.6.12)$$

Таким образом, функция Вигнера асимптотически равна микроканоническому распределению.

Получим теперь выражение для упорядоченного символа оператора плот-

ности, пользуясь формулой (7.5.27):

$$\rho_t^{x\xi}(x,\xi)=\frac{1}{2\pi\hbar}\psi_t(x)\int\bar{\psi}_t(x+\tilde{x})\exp\left(\frac{i}{\hbar}\tilde{x}\xi\right)d\tilde{x}=$$

$$=\frac{1}{2\pi\hbar}\psi_t(x)\int\bar{\psi}_t(\tilde{x})\exp\left[\frac{i}{\hbar}(\tilde{x}-x)\xi\right]d\tilde{x}= \qquad (7.6.13)$$

$$=\sqrt{\frac{-i}{2\pi\hbar}}\psi_t(x)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}x\xi\right)\sqrt{\frac{i}{2\pi\hbar}}\int\bar{\psi}_t(\tilde{x})\exp\left(\frac{i}{\hbar}\tilde{x}\xi\right)d\tilde{x}.$$

Это выражение сводится к произведению волновой функции на ее комплексно-сопряженный Фурье-образ. Такая плотность называется плотностью Кирквуда. Этот символ, в отличие от вейлевского, не обязательно вещественен. Несмотря на это, упорядоченный символ оператора плотности обладает свойствами, аналогичными свойствам вейлевского символа.

Вычислим среднее значение наблюдаемой, пользуясь упорядоченными символами операторов:

$$\bar{B}_t=\iint K_B(x',x'')\,\psi_t(x'')\,\bar{\psi}_t(x')\,dx'\,dx''$$

$$=\iint\frac{1}{2\pi\hbar}\int B(x',\xi')\exp\left[-\frac{i}{\hbar}(x''-x')\xi'\right]d\xi'\times$$

$$\times\int\rho_t^{x\xi}(x'',\xi'')\exp\left[-\frac{i}{\hbar}(x'-x'')\xi''\right]d\xi''\,dx'\,dx''= \qquad (7.6.14)$$

$$=\iint B(x',\xi')\,\rho_t^{x\xi}(x',\xi')\,d\xi'\,dx'.$$

Это выражение также совпадает с классическим.

Снова рассмотрим волновую функцию в форме $\psi_t(x)=A_t(x)\exp\left(\frac{i}{\hbar}S_t(x)\right)$ при тех же предположениях. Тогда можно приближенно записать

$$\sqrt{\frac{i}{2\pi\hbar}}\int\bar{\psi}_t(\tilde{x})\exp\left(\frac{i}{\hbar}\tilde{x}\xi\right)d\tilde{x}=\sqrt{\frac{i}{2\pi\hbar}}\int A_t(\tilde{x})\exp\left(-\frac{i}{\hbar}S_t(\tilde{x})+\frac{i}{\hbar}\tilde{x}\xi\right)d\tilde{x}. \qquad (7.6.15)$$

Точка стационарной фазы этого интеграла равна $x_S(\xi)$, и интеграл приближенно равен

$$\frac{A_t(x_S(\xi))}{\sqrt{S_t''(x_S(\xi))}}\exp\left(-\frac{i}{\hbar}S_t(x_S(\xi))+\frac{i}{\hbar}x_S(\xi)\xi\right). \qquad (7.6.16)$$

Поэтому плотность можно переписать в следующем виде:

$$\rho_t^{x\xi}(x,\xi)=\sqrt{\frac{-i}{2\pi\hbar}}A_t(x)\frac{A_t\left(x_S(\xi)\right)}{\sqrt{S_t''\left(x_S(\xi)\right)}}\exp\left(\frac{i}{\hbar}\left(S_t(x)-S_t\left(x_S(\xi)\right)\right)+\frac{i}{\hbar}\left(x_S(\xi)-x\right)\xi\right). \tag{7.6.17}$$

Рассмотрим интеграл (7.6.14). При каждом $\xi$, выполняя интегрирование по $x$ и считая, что основной вклад в интеграл дает окрестность точки стационарной фазы, получим следующее выражение:

$$\int B\left(x_S(\xi),\xi\right)\frac{A_t^2\left(x_S(\xi)\right)}{\left|S_t''\left(x_S(\xi)\right)\right|}d\xi=\int B(x,\xi)\,A_t^2(x)\,\delta\left(\xi-S_t'(x)\right)dx\,d\xi= \tag{7.6.18}$$

$$=\int B(x,\xi)\,A_t^2(x)\,\delta\left(\xi-\xi_S(x)\right)dx\,d\xi.$$

Таким образом, интегрирование по фазовому пространству сводится к интегрированию по лучевому многообразию произведения символа наблюдаемой на микроканоническое распределение.

Мы заключаем, что введенные выше два символа оператора плотности: вейлевский $\rho_t^W(x,\xi)$ и упорядоченный $\rho_t^{x\xi}(x,\xi)$ обладают аналогичными асимптотическими свойствами. Тем не менее вейлевский символ $\rho_t^W(x,\xi)$ существенно удобнее для приложений, поскольку он оказывается близок к микроканоническому распределению при непосредственном вычислении, тогда как упорядоченный символ $\rho_t^{x\xi}(x,\xi)$ всегда включает «квантовые осцилляции» на всей фазовой плоскости, которые исчезают лишь при усреднении.

**Матрица плотности и нелинейные представления**

В квантовой механике чаще всего используется не оператор плотности в общем виде, а его матричное представление, т.е. матрица плотности. Запишем оператор плотности в виде

$$\hat{\rho}=|\psi\rangle\langle\psi|, \tag{7.6.19}$$

где нормировочный множитель $\alpha$ полагаем равным единице. Если задан дискретный базис состояний $|\psi_i\rangle$ и разложение волновой функций по этому базису

$$|\varphi\rangle=\sum_j|\psi_j\rangle\langle\psi_j|\varphi\rangle, \tag{7.6.20}$$

то

$$\langle\psi_i|\hat{\rho}\varphi\rangle=\langle\psi_i|\psi\rangle\langle\psi|\varphi\rangle=\sum_j\langle\psi_i|\psi\rangle\langle\psi|\psi_j\rangle\langle\psi_j|\varphi\rangle, \tag{7.6.21}$$

поэтому матрица плотности равна:

$$\rho_{ij}=\langle\psi_i|\psi\rangle\langle\psi|\psi_j\rangle. \tag{7.6.22}$$

Через матрицу плотности выражается среднее значение наблюдаемой:

$$\overline{B} = \langle \psi | B\psi \rangle = \sum_{ij} \langle \psi | \psi_i \rangle \langle \psi_i | B\psi_j \rangle \langle \psi_j | \psi \rangle = \sum_{ij} B_{ij} \rho_{ji} = \mathrm{Tr}\left( \hat{B}\hat{\rho} \right). \quad (7.6.23)$$

Матрицу плотности можно определять как для заданной волновой функции, так и в тех случаях, когда волновая функция неизвестна. Поэтому матрица плотности позволяет описывать смешанные состояния квантовой системы, когда она не может быть описана волновой функцией, дающей полное описание чистого состояния. В смешанных состояниях не задан полный набор независимых физических величин, определяющих состояние системы, а определены лишь вероятности нахождения системы в базисных квантовых состояниях. Динамика матрицы плотности описывается дискретным представлением квантового уравнения Лиувилля (7.6.7).

К описанию квантовых систем при помощи матрицы плотности примыкает вигнеровское представление квантовой механики [3], в котором используется не волновая функция, а псевдо-плотность в фазовом пространстве $\rho_t^W \left( x, \xi \right)$. Это представление интересно тем, что оно содержит лишь те понятия, которые являются общими для классической и квантовой механики. Хотя квантовая плотность выражается через волновую функцию, ее динамика описывается классическим уравнением Лиувилля (7.4.6). Квантовый характер задачи будет выражаться не в динамическом уравнении, а в самой функции плотности и ее начальных условиях.

В предыдущих главах мы пользовались линейными представлениями волновых полей. Основой этих представлений являются канонические преобразования и связанные с ними интегральные операторы Фурье. Как мы видели, канонические преобразования реализуют представления классического лучевого уравнения, а интегральные операторы Фурье – представления волнового или квантово-механического динамического уравнения (уравнения Гельмгольца или Шредингера). Описания на основе матрицы плотности или символа оператора плотности (квантовой плотности) реализуют нелинейные (квадратичные) представления. В основе этих описаний лежит квантовое или классическое уравнение Лиувилля.

### Литература


1. *фон Нейман Дж.* Математические основы квантовой механики. М.: Наука, 1964. 368 с.
2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика (нерелятивистская теория). Изд. 4-е. М.: Наука, 1989. 768 с. («Теоретическая физика». Т. III).
3. *Татарский В.И.* Вигнеровское представление квантовой механики // Успехи физических наук. 1983. Т. 139, № 4. С. 587–619.


## 7.7. Томографическое определение плотности

Теперь покажем, как можно прийти к плотности Вигнера, пользуясь аппаратом канонических преобразований и интегральными операторами Фурье. Рассмотрим группу вращений фазовой плоскости. При этом будут заданы

различные представления волновой функции. Пусть имеются координаты фазового пространства ($x$, $\xi$). Преобразование вращения ($x$, $\xi$) → ($y$, $\eta$) в фазовом пространстве является каноническим и имеет вид

$$\begin{aligned} y &= x\cos\alpha + \xi\sin\alpha \\ \eta &= -x\sin\alpha + \xi\cos\alpha\,. \end{aligned} \tag{7.7.1}$$

Как мы уже знаем из раздела 4.7, это преобразование описывает динамику гармонического осциллятора, и точное решение для динамики волновой функции имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \psi_\alpha(y) &= \int K_\alpha(y,x)\,\psi_0(x)\,dx, \\ K_\alpha(y,x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi i\sin\alpha}}\exp\left(i\frac{y^2\cos\alpha - 2xy + x^2\cos\alpha}{2\sin\alpha}\right). \end{aligned} \tag{7.7.2}$$

Здесь примем другой взгляд на это преобразование. Будем считать, что оно реализует различные представления волновой функции в зависимости от выбора координат фазового пространства. Каждому такому представлению соответствует некоторая плотность $W_\alpha(y, \eta)$. Потребуем, чтобы $W_\alpha(y, \eta)$ сохраняло форму исходной плотности $W(x, \xi)$ с подстановкой новых координат:

$$W_\alpha(y,\eta) = W\left(y\cos\alpha - \eta\sin\alpha,\, y\sin\alpha + \eta\cos\alpha\right). \tag{7.7.3}$$

Это требование является естественным, поскольку элемент меры фазового пространства сохраняется при каноническом преобразовании: $dx \wedge d\xi = dy \wedge d\eta$, поэтому такое определение автоматически будет сохранять полную энергию. Далее воспользуемся вторым условием из (7.3.3): при любом значении угла $\alpha$ интегралы от плотности $W_\alpha(y, \eta)$ по импульсу $\eta$ должны равняться $\left|\psi_\alpha(y)\right|^2$. Достаточно лишь одного этого условия, поскольку второе будет выполнено автоматически в силу того, что поворот плоскости на $\pi / 2$ соответствует преобразованию Фурье.

Это построение проиллюстрировано рис. 24. При каждом повороте на любой угол $\alpha$ вычисляем представление волновой функции $\psi_\alpha(y)$, а ее плотность энергии относительно координаты $y$, равная $\left|\psi_\alpha(y)\right|^2$, представляет собой интегралы от $W(x, \xi)$ по прямым, перпендикулярным оси $y$. Эта ситуация соответствует классической томографии [2, 3], и каждый такой набор интегралов по семейству параллельных прямых называется ракурсом. Математически это записывается в следующей форме:

$$\int W(x,\xi)\,\delta\left(x\cos\alpha + \xi\sin\alpha - y\right)dx\,d\xi = \left|\psi_\alpha(y)\right|^2. \tag{7.7.4}$$

Таким образом, $\left|\psi_\alpha(y)\right|^2$ как функция ($y$, $\alpha$) является преобразованием, носящим имя австрийского математика Иоганна Радона [2–4], от $W(x, \xi)$. Чтобы

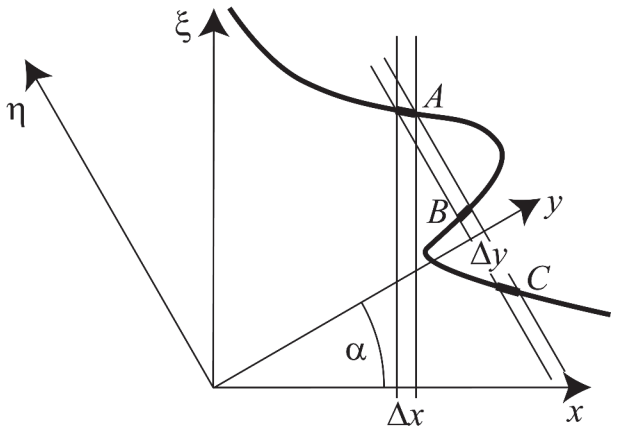



**Рис. 24.** Геометрия томографического определения плотности. Жирной кривой показано лучевое многообразие. Участок А проецируется в отрезок $\Delta x$ в исходном представлении и в отрезок $\Delta y$ при повороте координатных осей на угол α. В исходном представлении участок А относится к однолучевой области, тогда как при повороте на угол α от оказывается в многолучевой области, т.к. его проекция перекрывается также участками В и С лучевого многообразия

прийти к формуле обращения, следует воспользоваться симметриями по отношению к сдвигам и вращениям фазовой плоскости. В частности, при α = 0

$$\int W(x,\xi)\, d\xi = \left|\psi_0(x)\right|^2 . \qquad (7.7.5)$$

Обозначим через $\tilde{W}(\tilde{x},\tilde{\xi})$ двумерное Фурье-преобразование от $W(x, \xi)$. Тогда из (7.7.5) следует, что 1-мерное Фурье-преобразование от $\left|\psi_0(x)\right|^2$ равно $\tilde{W}(\tilde{x},\tilde{\xi}=0)$ вдоль оси $\tilde{x}$. В силу симметрии по отношению к вращениям аналогично ракурс при любом значении угла α будет задавать Фурье-образ неизвестной функции $W(x, \xi)$ вдоль луча на частотной плоскости $(\tilde{x},\tilde{\xi})$, проходящего через точку (0, 0) под углом α к оси $\tilde{x}$. Это позволяет получить Фурье-образ неизвестной функции на всей частотной плоскости и в конечном счете получить явную формулу обращения. Мы предлагаем читателю выполнить эту выкладку в качестве упражнения. Численный алгоритм восстановления Фурье-образа на отдельных лучах и его интерполяции на прямоугольную сетку часто применяются в компьютерной томографии.

В оригинальной работе Радона [4] приводится простой вывод формулы обращения методом усреднения. Рассмотрим начало координат фазовой плоскости и вращения вокруг этой точки. Усредним ракурсы $\left|\psi_\alpha(y)\right|^2$ по всем углам α и обозначим полученную функцию через $f(y)$. В силу симметрии усредненная функция будет равна интегралам от усредненной по вращениям

$W(x, \xi)$. Обозначим через $r = \sqrt{x^2 + \xi^2}$ радиальную координату и через $W'(r)$ усредненную функцию $W(x, \xi)$. Очевидно, что $W'(0) = W(0, 0)$. Задача восстановления сферически-симметричной функции по ее интегралам вдоль прямых, как мы знаем, решается при помощи преобразования Абеля. Воспользовавшись самым первым вариантом формулы (6.2.21), запишем

$$W(0,0) = W'(0) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{df}{dy}\frac{dy}{y} = -\frac{1}{(2\pi)^2}\int d\alpha \int \frac{dy}{y}\frac{d}{dy}\left|\psi_\alpha(y)\right|^2. \qquad (7.7.6)$$

Поскольку $f(-y) = f(y)$, производная $df / dy$ обращается в 0 при $y = 0$ и компенсирует полюс $1 / y$. Чтобы получить общую формулу обращения, достаточно заметить, что в силу симметрий по отношению к сдвигам начало отсчета можно переместить в произвольную точку. Это позволяет немедленно записать

$$\begin{aligned} W(x,\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int d\alpha \int \frac{dy}{x\cos\alpha + \xi\sin\alpha - y}\frac{d}{dy}\left|\psi_\alpha(y)\right|^2 = \\ &= \frac{-1}{(2\pi)^2}\int d\alpha \int \frac{dy}{(x\cos\alpha + \xi\sin\alpha - y)^2}\left|\psi_\alpha(y)\right|^2. \end{aligned} \qquad (7.7.7)$$

Интеграл по $y$, имеющий неинтегрируемую особенность, понимается в смысле главного значения [3].

Получим явное выражение для плотности энергии:

$$\begin{aligned} \left|\psi_\alpha(y)\right|^2 &= \iint K_\alpha(y,x')\,\bar{K}_\alpha(y,x'')\,\psi(x')\,\bar{\psi}(x'')\,dx'\,dx'' = \\ &= \frac{1}{2\pi\left|\sin\alpha\right|}\iint \exp\left(i\frac{(x'^2 - x''^2)\cos\alpha - 2(x' - x'')y}{2\sin\alpha}\right)\psi(x')\,\bar{\psi}(x'')\,dx'\,dx''. \end{aligned} \qquad (7.7.8)$$

Запишем в общем виде связь плотности с волновой функцией:

$$W(x,\xi) = \iint U(x,\xi;x',x'')\,\psi(x')\,\bar{\psi}(x'')\,dx'\,dx'', \qquad (7.7.9)$$

где ядро оператора определено следующей формулой:

$$\begin{aligned} &U(x,\xi;x',x'') = \\ &= \frac{-1}{(2\pi)^2}\int d\alpha \int \frac{dy}{(x\cos\alpha + \xi\sin\alpha - y)^2}\frac{1}{2\pi\left|\sin\alpha\right|}\exp\left(i\frac{(x'^2 - x''^2)\cos\alpha - 2(x' - x'')y}{2\sin\alpha}\right) = \\ &= \frac{-1}{(2\pi)^3}\int \frac{d\alpha}{\left|\sin\alpha\right|}\exp\left(i\frac{(x'^2 - x''^2)\cos\alpha}{2\sin\alpha}\right)\int \frac{dy}{(x\cos\alpha + \xi\sin\alpha - y)^2}\exp\left(i\frac{-(x' - x'')y}{\sin\alpha}\right). \end{aligned} \qquad (7.7.10)$$

Рассмотрим интеграл по $y$:

$$\frac{-1}{(2\pi)^3}\int\frac{dy}{(x\cos\alpha+\xi\sin\alpha-y)^2}\exp\left(i\frac{-(x'-x'')y}{\sin\alpha}\right)=$$

$$=\frac{1}{8\pi^2}\exp\left(i\frac{-(x'-x'')}{\sin\alpha}(x\cos\alpha+\xi\sin\alpha)\right)\left|\frac{x'-x''}{\sin\alpha}\right|= \qquad (7.7.11)$$

$$=\frac{1}{8\pi^2|\sin\alpha|}\exp\left(-i\frac{(x'-x'')x\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\exp\left(-i\xi(x'-x'')\right)|x'-x''|.$$

Выражение

$$\frac{1}{8\pi^2}\exp\left(-i\xi(x'-x'')\right)|x'-x''| \qquad (7.7.12)$$

вынесем из-под знака интеграла по α. Оставшийся интеграл преобразуем следующим образом:

$$\int\frac{d\alpha}{\sin^2\alpha}\exp\left(i\frac{(x'^2-x''^2)\cos\alpha}{2\sin\alpha}-i\frac{(x'-x'')x\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)=$$

$$=\int\frac{d\alpha}{\sin^2\alpha}\exp\left(i\frac{(x'-x'')\left(\frac{x'+x''}{2}-x\right)\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)=2\int dv\exp\left(i(x'-x'')\left(\frac{x'+x''}{2}-x\right)v\right), \qquad (7.7.13)$$

где сделана замена переменной интегрирования $v$ = ctg α. Таким образом, данный интеграл равен

$$4\pi\delta\left((x'-x'')\left(\frac{x'+x''}{2}-x\right)\right). \qquad (7.7.14)$$

Ядро оператора плотности равно произведению выражений (7.7.12) и (7.7.14):

$$U(x,\xi;x',x'')=\frac{1}{2\pi}\exp\left(-i\xi(x'-x'')\right)|x'-x''|\delta\left((x'-x'')\left(\frac{x'+x''}{2}-x\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\exp\left(-i\xi(x'-x'')\right)\delta\left(\frac{x'+x''}{2}-x\right). \qquad (7.7.15)$$

Это позволяет записать плотность в следующей форме:

$$W(x,\xi)=\frac{1}{2\pi}\iint\exp\left(-i\xi(x'-x'')\right)\delta\left(\frac{x'+x''}{2}-x\right)\psi(x')\,\bar{\psi}(x'')\,dx'\,dx''. \qquad (7.7.16)$$

Обозначим $s = x' - x''$, преобразуем интеграл к координатам ($s$, $x''$) и выполним интегрирование по $x''$:

$$W(x,\xi)=\frac{1}{2\pi}\int \exp(-i\xi s)\,\psi\left(x+\frac{s}{2}\right)\bar{\psi}\left(x-\frac{s}{2}\right)ds. \qquad (7.7.17)$$

Выше мы пользовались безразмерными координатами и импульсами. В общем случае определим плотность с учетом волнового числа $k$:

$$W(x,\xi)=\frac{k}{2\pi}\int \exp(-ik\xi s)\,\psi\left(x+\frac{s}{2}\right)\bar{\psi}\left(x-\frac{s}{2}\right)ds. \qquad (7.7.18)$$

Эта формула совпадает с полученным в разделе 7.6 определением плотности Вигнера для вейлевского упорядочения операторов координаты и импульса. В следующем разделе детально обсудим свойства и применение плотности Вигнера для анализа радиозатменных данных и проведем ее сравнение со спектрограммой.

### Литература


1. *Bertrand J., Bertrand P.* Tomographic procedure for constructing phase space representations // Lecture Notes in Physics. 1987. V. 278. The Physics of Phase Space. Nonlinear Dynamics and Chaos, Geometric Quantization, and Wigner Function: Proceedings of the First International Conference on the Physics of Phase Space, Held at the University of Maryland, College Park, Maryland, May 20–23, 1986 / Ed. by H. Araki et al. New York: Springer, P. 208–210.
2. *Хегласон С.* Преобразование Радона. М.: Мир, 1983. 151 с.
3. *Гельфанд И.М., Граев М.И., Виленкин Н.Я.* Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. М.: Гос. изд-во физико-математической литературы, 1962. 656 с.
4. *Radon J.* Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten // Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig. Math. Nat. Kl. 1917. V. 69. P. 262–277.


## 7.8. Приложение к радиозатменным данным

### Свойства квантовой плотности Вигнера

1. Значения плотности Вигнера всегда действительны, как следует из (7.7.18).

2. Значение плотности Вигнера не обязательно положительно. Поэтому ее называют псевдо-плотностью.

3. Плотность Вигнера, как правило, принимает положительные значения в окрестности лучевого многообразия, а в остальной области фазового пространства присутствует осциллирующая компонента («квантовые осцилляции»). В классическом пределе ($k \to \infty$) положительная компонента стремится к δ-образному микроканоническому распределению, сконцентрированному на лучевом многообразии [1], при этом частота «квантовых осцилляций» стремится к бесконечности. При интегрировании произведения $W(x, \xi)$ и гладкой функции $\varphi(x, \xi)$ вклад «квантовых осцилляций» будет стремиться к 0, и асимптотически интеграл сведется к интегралу от $\varphi(x, \xi)$ по лучевому многообразию. Таким образом, «квантовые осцилляции» стремятся к 0 в смысле теории обобщенных функций. С томографической точки зрения «квантовые осцилляции» являются томографическим артефактом, который является следствием того, вклады интенсивностей разных ветвей лучевого многообра-

зия, проецирующихся в одну точку (т.е. разных интерферирующих лучей), вообще говоря, не равны локальной интенсивности волнового поля. Такое равенство может быть установлено лишь приближенно для пространственно-усредненных интенсивностей.

4. Плотность Вигнера содержит полную информацию о волновом поле. Вычисляя ее обратное Фурье-преобразование по $\xi$ и обозначая $x_1 = x + s / 2$ и $x_2 = x - s / 2$, мы получаем $u_0(x_1)\overline{u}_0(x_2) = f(x_1, x_2)$. Волновую функцию $u_0(x)$ можно, таким образом, восстановить с точностью до постоянного сдвига фазы $\varphi$ следующим образом: $f(x, x_2)\exp(i\varphi) / f(x_2, x_2)^{1/2}$, где $x_2$ – произвольная точка, фаза принимается равной $\varphi$.

5. Если $u_0(x) = \exp(iax + ibx^2 / 2)$, т.е. мгновенная частота меняется со временем линейно $\xi = a + bx$, плотность Вигнера оказывается равной $\delta(\xi - (a+bx))$. Если задана суперпозиция двух сигналов $u_0(x) = \exp(ia_1x) + \exp(ia_2x)$, плотность Вигнера будет равна $\delta(\xi - a_1) + \delta(\xi - a_2) + 2\cos((a_1 - a_2)x)$, где последний (перекрестный) член представляет собой «квантовые осцилляции». Эти простые примеры демонстрируют существенное различие между плотностью Вигнера и спектрограммой. Плотность Вигнера в случае бесконечной апертуры может точно восстановить линейный тренд мгновенной частоты. У спектрограммы при конечной апертуре будет конечная ширина спектра, возрастающая с ростом апертуры. Соотношение неопределенностей определяет период «квантовых осцилляций»: во втором примере $\Delta x \Delta a \sim 2\pi$, тогда как две $\delta$-функции корректно воспроизводятся плотностью Вигнера.

Интересное обсуждение связи между спектрограммой и плотностью Вигнера имеется в [2]. В частности, там показано, что можно ввести общий класс пространственно-временных распределений, который включает как плотность Вигнера, так и спектрограмму. С другой стороны, спектрограмма эквивалентна плотности Вигнера, свернутой с пространственно-временным распределением окна спектрограммы.

6. Томографическое определение плотности Вигнера показывает, что эта функция не имеет предпочтительного направления на фазовой плоскости. Это делает ее очень полезной для анализа волновых полей в многолучевых областях. Как обсуждалось в [4, 5], горизонтальные градиенты могут приводить к сложной структуре лучевого многообразия, такой, что однолучевая проекция может быть заранее не известной. Стандартный подход, реализованный в методе канонических преобразований, требует существования однозначной проекции лучевого многообразия на определенную координатную ось (ось эффективного прицельного параметра). Подход, основанный на плотности Вигнера, не использует этого предположения, поэтому в его рамках можно восстанавливать произвольную структуру лучевого многообразия.

7. Функция Вигнера асимптотически инвариантна по отношению к каноническим преобразованиям. Это следует из того, что плотность или псевдоплотность энергии должна быть инвариантна по отношению к преобразованиям, сохраняющим любой элемент фазового объема [3].

**Оконная плотность Вигнера**

Для уменьшения эффекта «квантовых осцилляций» выполним свертку плотности Вигнера с заданной оконной функцией импульса ξ [6, 2]. Свертка в частотном пространстве эквивалентна умножению в координатном пространстве. В частности, гауссов фильтр с шириной Δξ будет эквивалентен следующему определению оконной плотности Вигнера:

$$\tilde{W}(x,\xi) = \frac{k}{2\pi}\int \exp(-ik\xi s)\, u\left(x+\frac{s}{2}\right)\overline{u}\left(x-\frac{s}{2}\right)\exp\left(-k^2\Delta\xi^2 s^2\right) ds. \quad (7.8.1)$$

**Приложение к радиозатменным данным**

При применении функции Вигнера для анализа радиозатменных данных мы пользуемся сигналом $\Delta u(t)$ с частотой, пониженной при помощи модели фазовой задержки $\Psi_m(t)$, аналогично тому, как это делается при построении спектрограммы. Для сигнала $\Delta u(t)$ вычисляем стандартную или оконную плотность Вигнера, которая изначально является функцией времени $t$, играющего роль координаты $x$, и импульса $\xi = -\omega / k$, где ω – отклонение доплеровской частоты от модели. Время и импульс пересчитываются в угол рефракции $\epsilon$ и прицельный параметр $p$ при помощи тех же соотношений, что используются для спектрограммы. Таким образом, функция $W(t, \xi)$ или $\tilde{W}(t,\xi)$ пересчитывается в функцию $W(\epsilon, p)$ или $\tilde{W}(\epsilon, p)$, которая будет визуализацией профиля угла рефракции даже в ситуациях с сильными горизонтальными градиентами, когда $\epsilon$ становится многозначной функцией $p$. Для наглядности вычитаем локальный радиус кривизны Земли $r_E$ из прицельного параметра $p$ и используем прицельную высоту в качестве вертикальной координаты $p - r_E$.

**Обработка искусственных данных**

На рис. 25 приведены результаты обработки искусственного радиозахода. Данные были получены при помощи метода фазовых экранов. Для моделирования использовались глобальные поля операционных анализов Европейского Центра среднесрочных прогнозов погоды (ECMWF) с широтно-долготным разрешением около 1 градуса и 91 вертикальным уровнем (с давлением 0.01 гПа на самом верхнем уровне). На рис. 25 результаты вычисления оконной плотности Вигнера сравниваются со спектрограммой. Окно для вычисления скользящих спектров было около 1.7 с [10], а окно для вычисления плотности Вигнера выбрано около 16 с. В отличие от спектрограммы, которая положительна всегда, плотность Вигнера является знакопеременной. Рисунок 25 показывает, что плотность Вигнера обеспечивает более высокое разрешение, сравнимое с методом канонических преобразований. Плотность Вигнера визуализирует лучевое многообразие с гораздо лучшим разрешением по сравнению со спектрограммой. Это согласуется с аналогичным утверждением [12].

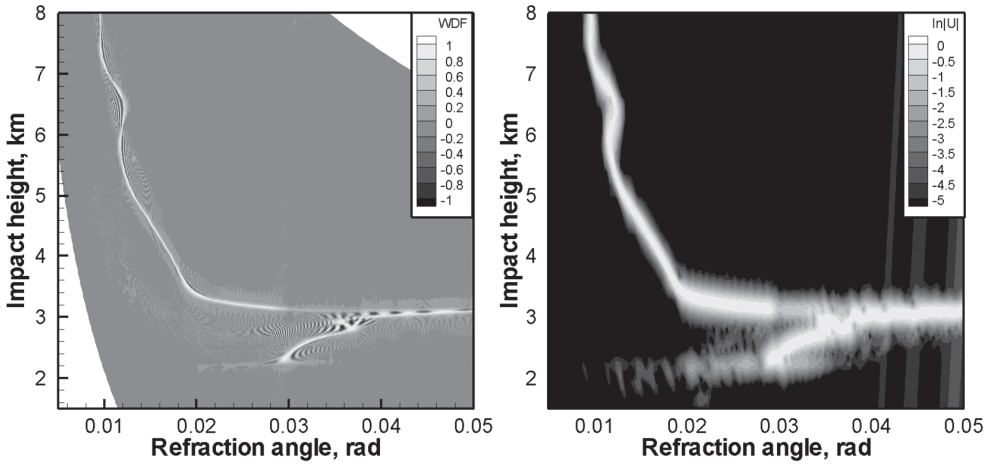



**Рис. 25.** Искусственный радиозаход UTC 00:20, 30 октября 2007 г. 24.59ºN 26.70ºW. Слева: Плотность Вигнера сигнала в канале L1. Справа спектрограмма сигнала в канале L1

На рис. 26 дан еще один пример искусственного радиозахода в присутствии сильных горизонтальных градиентов, обсуждавшийся в [11]. Здесь угол рефракции является многозначной функцией прицельного параметра, и поэтому его нельзя восстановить методом канонических преобразований. Профиль угла рефракции обладает острым пиком, проекция которого на ось прицельного параметра вследствие горизонтального градиента показателя преломления перекрывается с другой ветвью профиля. Уравнение, описывающее возмущение прицельного параметра, было получено в [9]. Как плотность Вигнера, так и спектрограмма в данном случае позволяют идентифицировать сильные горизонтальные градиенты. Тем не менее плотность Вигнера позволяет различить верхнюю и нижнюю ветви профиля угла рефракции, образующие пик, тогда как на спектрограмме их различить нельзя.

Рисунок 27 иллюстрирует эффект оконной фильтрации плотности Вигнера. На левой панели приводится плотность Вигнера с окном 8 с. «Квантовые осцилляции» минимальны, но и разрешение несколько ухудшено. На средней панели приводится плотность Вигнера с окном 16 с. Увеличение окна улучшает разрешение, но и увеличивает «квантовые осцилляции», хотя они и не накладываются на профиль угла рефракции. На правой панели приведена плотность Вигнера без оконной фильтрации. «Квантовые осцилляции» накладываются на лучевое многообразие, которое становится труднее выделить. Для наглядности мы используем логарифмический масштаб плотности Вигнера.

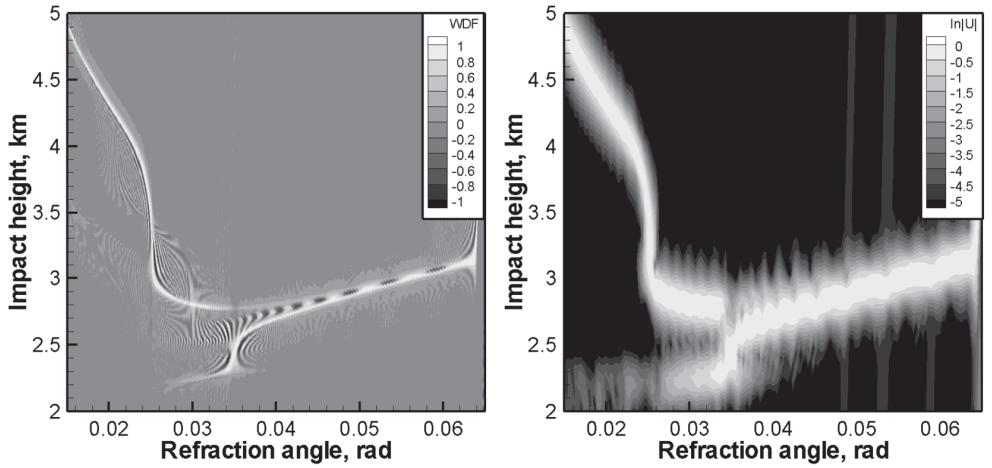



**Рис. 26.** Искусственный радиозаход UTC 0:00, 30 октября 2007 г. 10.86ºN 171.51ºW. Слева: Плотность Вигнера сигнала в канале L1. Справа спектрограмма сигнала в канале L1

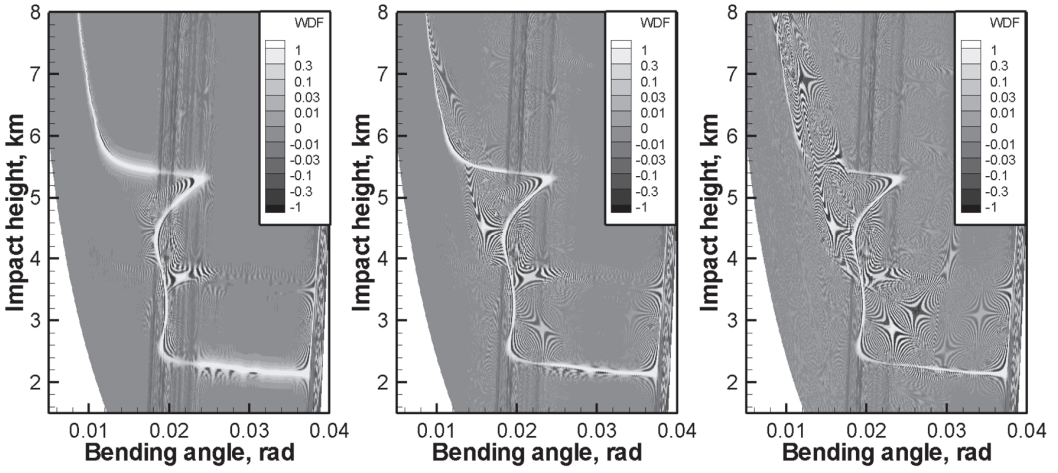



**Рис. 27.** Искусственный радиозаход UTC 12:42, 30 октября 2007 г. 23.92ºN 71.85ºW. Слева: Плотность Вигнера сигнала в канале L1. Ширина окна 8 с. В центре: Плотность Вигнера сигнала в канале L1. Ширина окна 16 с. Справа: Плотность Вигнера сигнала в канале L1. Ширина окна 24 с

## Обработка экспериментальных данных

На рис. 28–31 показаны примеры обработки радиозатменных данных, полученных в эксперименте COSMIC. Ширина окна спектрограммы около 1.7 с, ширина окна для сглаживания плотности Вигнера около 4 с. Плотность Вигнера дает более детальную информацию о структуре измеренного сигнала.

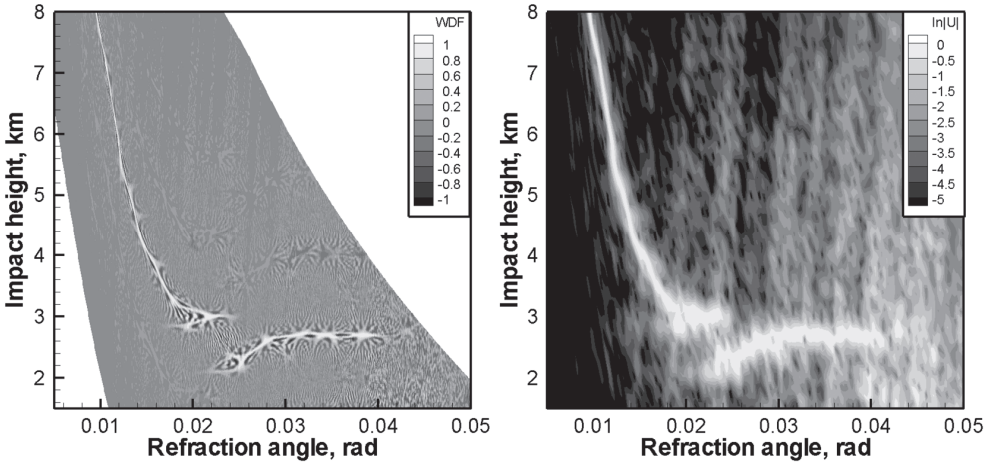



**Рис. 28.** Радиозаход COSMIC, UTC 0:00, 15 декабря 2008 г., 48.51ºN 33.04ºE. Слева: Плотность Вигнера сигнала в канале L1. Справа спектрограмма сигнала в канале L1

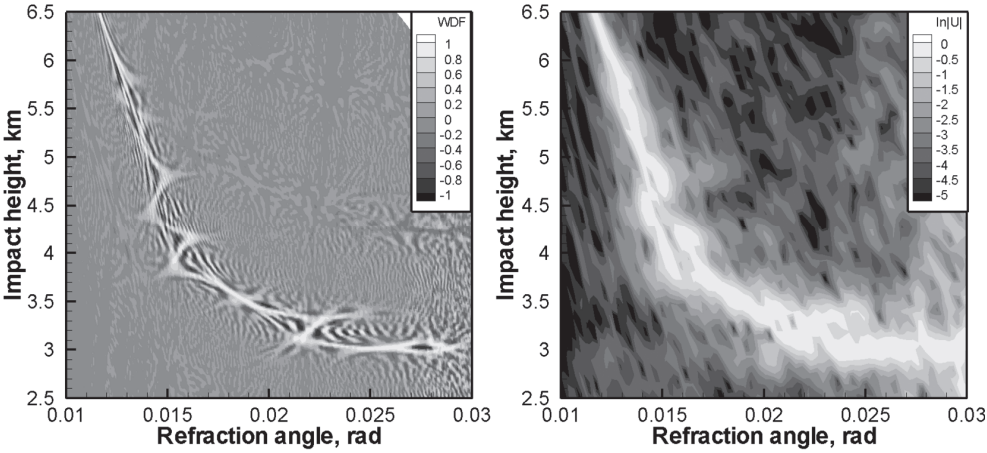



**Рис. 29.** Радиозаход COSMIC, UTC 0:01, 1 января 2007 г., 46.16ºN 112.87ºE. Слева: Плотность Вигнера сигнала в канале L1. Справа спектрограмма сигнала в канале L1

На рис. 28 видна четкая многолучевая структура, которая близка к численным примерам. Видны два фрагмента лучевого многообразия, но очень слабые лучи на верхней границе острого пика профиля угла рефракции на высоте около 2.7 км не видны ни на спектрограмме, ни в плотности Вигнера. Пик угла рефракции имеет интересную структуру. Угол рефракции достигает 0.04 рад, но часть пика между углами 0.032 и 0.04 накладывается на оставшуюся часть пика. Это является указанием на горизонтальные градиенты показателя преломления.

На рис. 29 показан пример с множественными максимумами и минимумами, очень четко просматривающимися в плотности Вигнера. Спектрограмма воспроизводит эту структуру достаточно грубо, локальные максимумы смазаны.

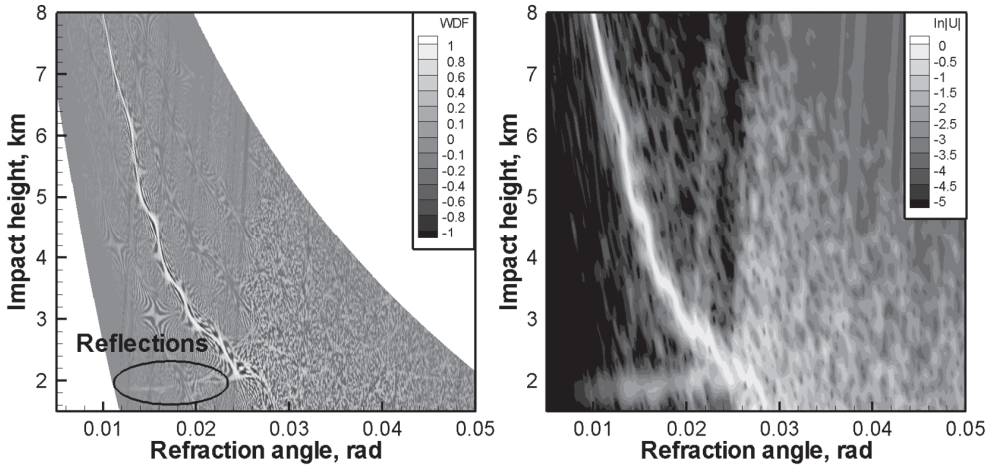



**Рис. 30.** Радиозаход COSMIC, UTC 0:44, 15 декабря 2008 г., 64.75ºN 164.80ºE. Слева: Плотность Вигнера сигнала в канале L1. Справа спектрограмма сигнала в канале L1

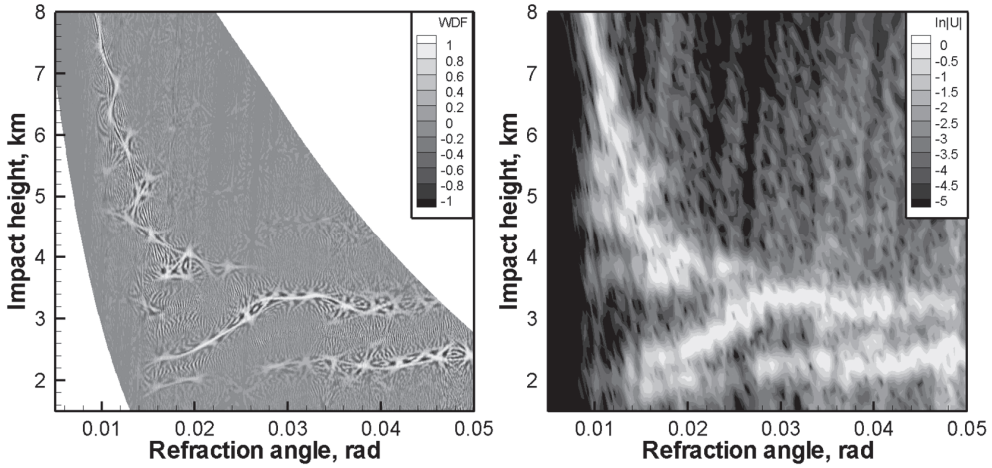



**Рис. 31.** Радиозаход COSMIC, UTC 0:27, 1 января 2007 г., 43.74ºN 141.31ºE. Слева: Плотность Вигнера сигнала в канале L1. Справа спектрограмма сигнала в канале L1

На рис. 30 показан полярный радиозаход с отраженными лучами [11], отмеченными на графике. Отраженный луч четко локализован в плотности Вигнера.

На рис. 31 приведен другой пример из тропиков. Ниже 3.2 км на профиле просматриваются ясные признаки наличия сильных горизонтальных градиентов показателя преломления. В интервалах высот 3–3.2 и 2.2–2.4 км профиль угла рефракции многозначен.

Мы видим, что плотность Вигнера хорошо дополняет методы анализа волновых полей, основанные на интегральных операторах Фурье. Плотность Вигнера позволяет идентифицировать многозначные профили угла рефрак-

ции, которые не удается восстановить, пользуясь стандартными предположениями. Многозначные профили угла рефракции являются следствием наличия горизонтальных градиентов показателя преломления. Техника интегральных операторов Фурье использует предположение о том, что лучевое многообразие обладает однозначной проекцией на ось прицельного параметра. Как показано в [13], острые выбросы профиля угла рефракции в присутствии горизонтальных градиентов могут искажаться так, что проекция лучевого многообразия становится многозначной. Подобные острые выбросы соответствуют слабым сигналам, поскольку малая часть энергии, сосредоточенная в узком интервале прицельных параметров, распределяется по большой области пространства. В результате такие выбросы накладываются на другую ветвь профиля угла рефракции, соответствующую более сильным сигналам, и теряются при восстановлении методами, основанными на интегральных операторах Фурье. Этот эффект должен приводить к систематической недооценке восстановленных углов рефракции. Тем самым нарушение сферической симметрии атмосферы приводит к систематической отрицательной ошибке восстановленных углов рефракции. Это может частично объяснять систематическую отрицательную ошибку восстановленных углов рефракции и показателя преломления атмосферы [14].

## Литература


1. *Карасев М.В., Маслов В.П.* Нелинейные скобки Пуассона. Геометрия и квантование. М.: Наука, 1991. 368 с.
2. *Cohen L.* Time-frequency distributions: A review // Proc. IEEE. 1989. V. 77. P. 941–981.
3. *Moshinsky M., Sharma A.* Canonical transformations for time evolution and their representation in Wigner distribution phase space // Annals of Physics. 2000. V. 282. P. 138− 153. doi:10.1006aphy.2000.6038
4. *Gorbunov M.E*. Canonical transform method for processing GPS radio occultation data in lower troposphere // Radio Sci. 2002a. V. 37(5). P. 1076. doi:10.1029/2000RS002592
5. *Gorbunov M.E., Lauritsen K.B.* Error estimate of bending angles in the presence of strong horizontal gradients // New Horizons in Occultation Research / Ed. by A. Steiner et al. Heidelberg, Germany: Springer, 2009. P. 17–26.
6. *Choi H., Williams W.J.* Improved time-frequency representation of multicomponent signals using exponential kernels // IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process. 1989. V. 38. P. 862–871.
7. *Sokolovskiy S., Rocken C., Hunt D., Schreiner W., Johnson J., Masters D., Esterhuizen S.* GPS profiling of the lower troposphere from space: Inversion and demodulation of the open-loop radio occultation signals // Geophys. Res. Lett. 2006. V. 33. L14815. doi:10.1029 /2006GL026214
8. *Igarashi K., Pavelyev A., Hocke K., Pavelyev D., Kucherjavenkov I.A., Matyugov S., Zakharov A., Yakovlev O.* Radio holographic principle for observing natural processes in the atmosphere and retrieving meteorological parameters from radio occultation data // Earth Planets Space. 2000. V. 52. P. 893–899.
9. *Gorbunov M.E., Kornblueh L.* Analysis and validation of GPS/MET radio occultation data // J. Geophys. Res. 2001. V. 106, No. 17. P. 161–169.
10. *Gorbunov M.E.* Radio-holographic analysis of Microlab-1 radio occultation data in the lower troposphere // J. Geophys. Res. 2002b. V. 107(D12). 4156. doi:10.1029/2001JD000889
11. *Gorbunov M.E.* Radiohолographic analysis of radio occultation data in multipath zones // Radio Sci. 2002c. V. 37(1). 1014. doi:10.1029/2000RS002577
12. *Szu H.* Signal processing using bilinear and nonlinear time-frequency-joint- representations //

Lecture Notes in Physics. V. 278. The Physics of Phase Space. Nonlinear Dynamics and Chaos, Geometric Quantization, and Wigner-Function: Proceedings of the First International Conference on the Physics of Phase Space, the University of Maryland, College Park, Maryland, May 20–23, 1986 / Ed. by H. Araki et al. New York: Springer, 1987. P. 179–199.

13. *Gorbunov M.E.* Canonical transform method for processing GPS radio occultation data in lower troposphere // Radio Sci. 2002a. V. 37(5). 1076. doi:10.1029/2000RS002592

14. *Sokolovskiy S., Rocken C., Schreiner W., Hunt D.* On the uncertainty of radio occultation inversions in the lower troposphere // J. Geophys. Res. 2010. V. 115. D22111. doi:10.1029/2010JD014058

# Заключение

Автор надеется, что данная монография на тему радиозатменного зондирования не является последней. Существует ряд аспектов проблемы, которые не нашли отражения в данной книге. Это, в первую очередь, касается статистического подхода, основанного на понятиях случайной среды и случайного волнового поля, хотя, на первый взгляд, теория распространения волн в случайных средах развивалась давно и даже является достаточно законченной дисциплиной. Тем не менее не все развитые методы хорошо работают для решения задач радиозатменного зондирования, в которых играют роль большие масштабы, на которых среда не является статистически однородной, а с другой стороны, эффекты регулярной рефракции могут существенно влиять на картину флуктуаций. Возможно, что со временем удастся достаточно глубоко исследовать этот круг вопросов и выпустить монографию, посвященную радиозатменному зондированию как задаче статистической радиофизики.

**Научное издание**

**Горбунов Михаил Евгеньевич**

# Физические и математические принципы спутникового радиозатменного зондирования атмосферы Земли

Ответственный редактор академик *Г.С. Голицын*

Редактор издательства *Л.В. Филиппова*

Макет *Н.П. Кураленко*

Подписано к печати 04.02.2019.
Формат 70×100 1/16. Бумага офсетная 80 г/м$^2$. Уч. изд. л. 24,0. Тираж 300 экз.

ООО «Издательство ГЕОС»
119017, Москва, Пыжевский пер., 7, к. 332. Тел./факс: (495) 959-35-16, 8-926-222-30-91
e mail: geos-books@yandex.ru www.geos-books.ru

Отпечатано в полном соответствии с представленным электронным оригинал-макетом в ОАО «Альянс “Югполиграфиздат”», ООО ИПК «Панорама». 400001, г. Волгоград, ул. КИМ, 6