На правах рукописи

Аракелян Екатерина Мовсесовна

МОДЕЛЬ КОМПОЗИТНОГО ВИХРЯ БОЛЬШОГО КРАСНОГО ПЯТНА ЮПИТЕРА

1.6.18 - Науки об атмосфере и климате

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Москва - 2026

Работа выполнена в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)».

Научный руководитель:	**Жмур Владимир Владимирович,** доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, Федеральное государственное бюджетное учреждение наук Институт океанологии им. П.П. Ширшова Российской академии наук, заведующий лабораторией
Официальные оппоненты:	**Абрашкин Анатолий Александрович**, доктор физико-математических наук, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», профессор
	Калашник Максим Валентинович, доктор физико-математических наук, Федеральное государственное бюджетное учреждение наук Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова Российской академии наук, ведущий научный сотрудник
Ведущая организация:	Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт астрономии Российской академии наук

Защита состоится 24 декабря 2026 года в 14:00 на заседании диссертационного совета Д 002.096.XX (24.1.130.01) в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте физики атмосферы им. А.М. Обухова Российской академии наук по адресу: 119017, г. Москва, Пыжевский пер., д. 3 стр.1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИФА им. А.М. Обухова РАН и на официальном сайте Института: https://ifaran.ru/ru/about/dissertations.

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенные печатью учреждения, просьба направлять по адресу: 119017, Москва, Пыжевский пер., 3, стр. 1, ученому секретарю диссертационного совета Д002.096.XX (24.1.130.01) и в электронном виде e-mail: a.chernokulsky@ifaran.ru.

Автореферат разослан «__» _____ 2026 года.

Ученый секретарь диссертационного совета
Д 002.096.XX (24.1.130.01)
кандидат физико-математических наук А. В. Чернокульский

Общая характеристика работы

Актуальность исследования. Большое Красное пятно Юпитера (БКПЮ) представляет собой уникальное, экстремально долгоживущее мезомасштабное бароклинное вихревое образование, непрерывные инструментальные наблюдения за которым ведутся мировым астрономическим сообществом более трёх столетий. Согласно современным пространственным оценкам, базирующимся на высокоточных данных орбитальных телескопов и межпланетных космических зондов, средний продольный (зональный) размер БКПЮ в настоящее время составляет около 12–13 тысяч километров, а поперечный (меридиональный) размер оценивается в 10–11 тысяч километров. С момента начала непрерывных систематических астрономических наблюдений в середине XIX века, инициированных детализированными зарисовками У. Доуза в 1857 году, вихрь выдержал более 9600 собственных оборотов. При условии строгой исторической идентификации современного объекта с гигантским атмосферным штормом, зафиксированным выдающимися астрономами Джованни Кассини и Робертом Гуком в 1665–1666 годах, суммарное время его подтвержденной жизни превышает 21 000 времен полного оборота.

Большое Красное пятно локализовано в Южной тропической зоне, причем его геометрический центр располагается на стабильной широте $\varphi = 22°$ южной широты. Для данной планетоцентрической широты локальный параметр Кориолиса f, определяемый классическим кинематическим соотношением:

$$f = 2\Omega \sin \varphi$$

принимает значения порядка $1.3 \cdot 10^{-4}$ с^{-1}. Столь высокие абсолютные значения параметра Кориолиса приводят к тому, что крупномасштабные течения в атмосфере планеты находятся в состоянии строгого и стабильного геострофического баланса. Применимость квазигеострофической теории для аналитического описания динамики БКПЮ жестко лимитируется значением безразмерного локального числа Россби (Ro), характеризующего отношение нелинейных сил адвективной инерции к силам Кориолиса в уравнениях Навье-Стокса во вращающейся системе отсчета. При характерных средних линейных скоростях фоновых зональных течений $U{\sim}100$ м/с и мезомасштабном продольном размере БКПЮ $L{\sim}10^7$ м, локальное число Россби составляет величину порядка $Ro \approx 0.08 \div 0.14$. Выполнение строгого асимптотического неравенства $Ro \ll 1$ является фундаментальным, математически непререкаемым обоснованием корректности перехода от полной системы нелинейных дифференциальных уравнений термогидродинамики к упрощенным уравнениям квазигеострофического баланса. Более того, на рассматриваемых пространственных масштабах вихря ($L{\sim}10^4$ км) меридиональное изменение параметра Кориолиса, описываемое β-эффектом $\left(\beta = \frac{2\Omega \cos \varphi}{R_J}\right)$, оказывает вторичное, преимущественно дисперсионное влияние по сравнению с интенсивной внутренней сдвиговой кинематикой самого вихря и окружающих его струй. Это позволяет с высокой степенью аналитической точности проводить математическое моделирование в базовом приближении локальной f-плоскости ($f = const$), пренебрегая кривизной планеты в пределах площади вихря.

Актуальность настоящего диссертационного исследования определяется комплексом следующих фундаментальных и прикладных взаимосвязанных факторов:

1. **Необходимость глубокого теоретического обоснования аномальной устойчивости композитных структур.** Традиционные модели однородных по потенциальной завихренности вихрей принципиально ограничены в описании механизмов длительной стабилизации БКПЮ, так как не учитывают внутреннюю кинематику объекта. Переход к аналитическому исследованию композитной структуры позволяет математически выявить новые компенсационные механизмы динамической стабилизации, возникающие за счет перераспределения энергии и завихренности между вложенными вихревыми ядрами в условиях постоянного фонового сдвига.
2. **Развитие фундаментального аналитического аппарата геофизической гидродинамики.** Постановка и строгий поиск точного аналитического решения задачи о динамике системы вложенных софокусных эллипсоидальных вихрей в стратифицированной среде является нетривиальным математическим обобщением классической проблемы об эллипсоидальном вихре. Данное исследование существенно расширяет класс интегрируемых задач теории вихрей.
3. **Интерпретация современных массивов наблюдательных данных.** Для корректной физической интерпретации высокоточных кинематических, термодинамических и гравиметрических данных, непрерывно поступающих от орбитальной станции Juno, а также спектральных данных космического телескопа James Webb (JWST), критически необходима надежная теоретическая база. Эта база должна связывать поверхностные (видимые) двумерные поля скоростей с трехмерной глубинной структурой и распределением завихренности.
4. **Формулировка энергетических критериев отбора.** Анализ полной механической энергии позволяет установить, почему природа реализует именно композитные вихревые конфигурации. При этом двухкомпонентная композитная структура является структурно устойчивой по отношению к возмущению её третьим вложенным вихрем.

Впервые предположение о вихревой природе БКПЮ сделал Г.С. Голицын. В дальнейшем исследования развивались в том числе в ИФА им. А.М. Обухова РАН. Ниже приведен далеко не полный список работ отечественных и зарубежных авторов, в которых представлены основные направления исследования, но в нем представлены все основные направления изучения БКПЮ.

Теоретические Модели Большого Красного Пятна Юпитера:

- Тэйлоровская колонка: Hide1961; Ingersoll 1969
- Долгоживущий вихрь: Golitsyn 1970
- Квазигеострафическая бароклинная модель: Романова, Цейтлин 1984
- Эллиптический вихрь с учетом экмановского трения: Шулейкин 1976
- Солитон на сдвиговом потоке: Maxworthy, Redekopp 1976; Петвиашвили 1980; Ларичев, Резник
- Солитон на сдвиговом потоке с учетом бароклинности: Beaumont 1980; Незлин 1981

- Вихрь Россби на тангенциальном разрыве: Волокитин, Красносельских 1981
- Статистическая механика, состояния с максимальной энтропией:
- Miller et al. 1992; Michele, Robert 1994; Bouchet, Sommeria 2002; Chavanis 2005
- Бароклинная модель БКПЮ: Суетин, Жмур, Чхетиани 2023

Последняя работа больше всех близка к нашей теме.

Целью диссертационной работы является разработка, детальное физико-математическое обоснование и комплексное аналитическое исследование бароклинной композитной модели Большого красного пятна Юпитера, представляющей собой систему квазигеострофических вложенных вихрей в стратифицированной атмосфере. Ключевой составляющей цели является количественная оценка и сравнительный анализ энергетической эффективности стационарных и нестационарных вихревых конфигураций для объяснения физических причин формирования наблюдаемой кинематики БКПЮ.

В рамках диссертационной работы решены следующие **задачи:**

1. Выполнить математическую постановку гидродинамической задачи о композитном вихре в терминах закона сохранения потенциальной завихренности.
2. Получить точные аналитические решения для нелинейной модели стационарного композитного вихря, состоящего из двух софокусных эллипсоидальных ядер, помещенных в горизонтальное баротропное течение с постоянным сдвигом скорости и определить законы распределения потенциальных завихренностей в таком ядре.
3. Провести расчет полной механической энергии стационарной композитной вихревой системы, исследовать зависимость энергии от геометрических параметров вложенного вихря для условий исторических космических миссий. Применить подход для условий исторических космических миссий.
4. Разработать физико-математическую модель двухкомпонентного нестационарного композитного вихревого образования, состоящего из основного (доминирующего) вихря и возмущения в виде слабого вложенного вихря, не влияющего на форму границы доминирующего вихря.
5. Выполнить аналитическое исследование режимов поведения нестационарного внутреннего вихря - движения вложенного вихря как целого и определить типы деформации его границы.
6. Провести аналитическую оценку средней энергии нестационарного композитного вихря и определить диапазон физических параметров (в частности, значений относительной завихренности внутреннего вихря), при которых достигается минимум энергии системы.
7. Исследовать структурную устойчивость двухкомпонентного и мульти-компонентного композитных вихрей.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Вихрь в квазигеострофическом приближении на f-плоскости композитный, состоящий из двух вложенных софокусных эллипсоидальных ядер, сохраняет стационарность только при строго противоположном знаке потенциальной завихренности внутреннего ядра по отношению к внешнему, доказанный аналитически. Полная интегральная механическая

энергия такого стационарного образования, всегда превосходящая энергию эквивалентного однородного вихря без вложения.

2. Устойчивость однородного вихря к воздействию первоначально слабого вихря, возмущающего основной вихрь. При пренебрежимо малом воздействии внутреннего эллипсоидального вихря на границу внешнего стационарного вихря, внутренний вихрь остается локализованным образованием с ограниченной энергией: его центр движется по замкнутой эллиптической траектории с периодом порядка 6 земных суток, а форма испытывает ограниченные нутационные колебания или вращение.
3. Две разработанные модели — стационарная и нестационарная — качественно воспроизводят наблюдаемую кинематическую структуру Большого красного пятна Юпитера: мощное антициклоническое струйное течение на периферии (до 150–170 м/с) и зона слабого циклонического вращения во внутренней области (порядка 20 м/с).
4. Энергия композитного вихря с нестационарным вложением меньше, чем энергия однородного вихря и заметно меньше, чем энергия двухкомпонентного стационарного вихря. Среди двухкомпонентных моделей нестационарный вихрь энергетически более выгодный. Структурная неустойчивость двухкомпонентного вихря и структурная устойчивость композитных вихрей с большим количеством вложенных вихрей.

Научная новизна диссертационного исследования подтверждается получением следующих оригинальных теоретических результатов:

1. Впервые предложена, математически строго формализована и решена аналитическая модель стационарного бароклинного композитного вихря, включающая два вложенных софокусных эллипсоидальных вихревых ядра. Получено точное решение нелинейной задачи в рамках квазигеострафического подхода на f-плоскости. В отличие от существующих классических теорий, получены точные соотношение, однозначно связывающие интенсивность потенциальных завихренностей обоих ядер с их геометрическими характеристиками и параметрами сдвига фонового течения.
2. Впервые математически доказана неизбежность циклонической природы внутреннего вложения в стационарной модели. Установлено, что условие стационарности системы на f-плоскости выполнимо исключительно при противоположном знаке завихренности внутреннего ядра по отношению к внешнему. При этом выявлен сингулярный характер вложения: интегральная завихренность внутреннего вихря остается конечной величиной даже при стремлении его объема к нулю.
3. Разработана новая математическая модель нестационарного бароклинного композитного вихря. Впервые доказано, что в условиях реальной циркуляции атмосферы Юпитера внутренний вихрь не подвержен деструктивному режиму неограниченного вытягивания в филамент. Аналитически определены параметры замкнутой эллиптической траектории, по которой перемещается геометрический центр вложенного вихря. В случае совпадения центров вихрей внутренний вихрь, оставаясь на месте, испытывает ограниченные деформации горизонтальных размеров.
4. Математически доказано, что композитный вихрь с нестационарным циклоническим вложением способен обладать меньшей суммарной механической энергией, чем полностью

эквивалентный ему гомогенный вихрь. Это указывает на энергетическое предпочтение модели нестационарного композитного вихря перед однородным вихрем.

5. Впервые введено и рассмотрено понятие структурной устойчивости и неустойчивости применительно к стационарным композитным вихрям.

Теоретическая и практическая значимость. Значимость работы с позиций развития теории заключается в существенном обогащении и расширении математического аппарата современной геофизической гидродинамики. Классическое семейство точных решений задачи об изолированном эллипсоидальном вихре расширено на случай многосвязных (вложенных) пространственных доменов с кусочно-постоянным распределением потенциальной завихренности. Строгое математическое доказательство эффекта снижения интегральной энергии системы при отказе от геометрической стационарности внутреннего ядра формирует новую научную парадигму в теории устойчивости мезомасштабных планетарных вихрей.

Практическая значимость. В работе предложен новый класс точных решений уравнений геофизической гидродинамики, который применим не только к задачам атмосферы Юпитера, но также актуален и для Земли. Полученные функциональные соотношения позволяют реконструировать скрытые глубинные поля скоростей и завихренностей внутри БКПЮ исключительно на основе поверхностных оптических наблюдений геометрии облачного покрова. Разработанный метод оценки энергетического бюджета применим для комплексной физической интерпретации высокоточных данных действующего аппарата Juno, а также планируемых межпланетных миссий (Europa Clipper, JUICE) к системам планет-гигантов. Математический аппарат моделей допускает прямую адаптацию для изучения внутриокеанических вихрей Земли и иных долгоживущих атмосферных структур (например, гексагонального вихря Сатурна).

Следует особо подчеркнуть, что предложенный в диссертации аналитический аппарат и само исследуемое явление — долгоживущие когерентные вихревые структуры с выраженной композитной (многосвязной) внутренней кинематикой — не являются исключительной особенностью атмосферы Юпитера. Аналогичные по физической природе образования широко представлены как в атмосфере, так и в океане Земли. В земной атмосфере к ним относятся, в частности, долгоживущие антициклоны и блокирующие вихри, внутритропические мезомасштабные вихри, а также полярные стратосферные вихри, обладающие сложной внутренней структурой течений. В Мировом океане композитные вихревые структуры реализуются в виде рингов Гольфстрима и Куросио, внутритермоклинных линз средиземноморских вод (меди), а также крупномасштабных субмезомасштабных вихрей, наблюдаемых в Северной Атлантике и Южном океане. Несмотря на различия в термодинамических условиях и параметрах стратификации, все эти объекты описываются в рамках единого квазигеострофического подхода и демонстрируют качественно сходные режимы эволюции: устойчивое ядро, окружённое интенсивным периферийным кольцом, нутационные колебания формы, движение центра по замкнутым траекториям. Это позволяет рассматривать разработанную модель не только как объяснение феномена Большого Красного пятна, но и как универсальный инструмент для анализа широкого класса долгоживущих вихревых структур в геофизических оболочках Земли и других планет.

Степень достоверности. Степень достоверности полученных в диссертационной работе результатов, теоретических выводов и аналитических решений обеспечивается строгой физической и математической постановкой задач, базирующейся на фундаментальных законах сохранения геофизической гидродинамики стратифицированных сред. В качестве основы используется апробированное и надежно зарекомендовавшее себя квазигеострофическое приближение, применение которого строго обосновано экстремальной малостью локального числа Россби ($Ro \ll 1$) для исследуемых крупномасштабных атмосферных течений Юпитера.

Достоверность разработанных математических моделей композитных вихревых структур подтверждается корректным применением классического аналитического аппарата математической физики (теории потенциала, метода интегральных функций Грина, свойств эллиптических интегралов) к решению трехмерного уравнения Пуассона с кусочно-постоянной правой частью. Решения для предельных частных случаев (в отсутствие внутреннего вложения) асимптотически точно переходят в известные классические решения задачи С. Киды и бароклинной модели эллипсоидального вихря, что подтверждает внутреннюю непротиворечивость предложенной теории.

Степень достоверности физических выводов о структуре, кинематике и энергетике Большого Красного пятна Юпитера дополнительно подтверждается высоким уровнем качественного и количественного согласования полученных аналитических результатов с обширным массивом независимых натурных инструментальных данных. В частности, теоретически рассчитанные профили скоростей, размеры зон циклонического и антициклонического вращения, а также оценки вертикального масштаба вихря надежно согласуются с результатами обработки оптических, инфракрасных и гравиметрических измерений, полученных в ходе реализации международных космических миссий Voyager-1,2, Galileo, Cassini, Hubble Space Telescope и межпланетной станции Juno. Достоверность результатов также подтверждается их успешной апробацией на профильных всероссийских и международных научных конференциях и публикацией основных положений исследования в ведущих рецензируемых научных изданиях, рекомендованных ВАК при Минобрнауки России.

Апробация работы.

Материалы диссертации докладывались на следующих научных конференциях и семинарах:

- 6-9.04.26. Международная конференция "Физика атмосферы и климата" (г. Кисловодск). «Структурная устойчивость в бароклинных моделях Большого красного пятна Юпитера» Аракелян Е.М., Жмур В.В., Чхетиани О.Г.

- 13-15.05.25. Институт Океанологии им. П.П.Ширшова XIX Международная научно-техническая конференция «Современные Методы И Средства Океанологических Исследований» «Композитная Вихревая Модель Большого Красного Пятна Юпитера» Аракелян Е.М., Жмур В.В., Чхетиани О.Г.

- 21.05.24. Институт Физики Атмосферы Конференция-семинар «Нелинейные задачи геофизической гидродинамики», посвященная памяти Н.Н. Романовой. «Композитная структура Большого Красного Пятна Юпитера» Е.М. Аракелян, В.В. Жмур, О.Г. Чхетиани.

- 25.03.25. Shirshov Institute of Oceanology of Russian Academy of Sciences International conference “Theoretical and applied aspects of geophysical fluid dynamics” dedicated to Gregory Reznik on his 80th birthday and 55th anniversary of his scientific activity. "Нестационарная композитная модель Большого Красного Пятна Юпитера" Е.М. Аракелян, В.В. Жмур, О.Г. Чхетиани

- 07-13.09.25. Москва—Санкт-Петербург The VII-th International Symposium "Topical Problems of Nonlinear Wave Physics" 2025. "Composite structure of Jupiter's Great Red Spot". Arakelyan, V.Zhmur, O.Chkhetiani

- 22-26.09.25. Севастополь, Морской гидрофизический институт РАН IX Всероссийская конференция "Моря России: приоритеты, практика, прогноз", г. Севастополь, Морской гидрофизический институт РАН "Композитная модель Большого Красного Пятна Юпитера" Е.М. Аракелян, В.В. Жмур, О.Г. Чхетиани

- 27-29.11.25. МФТИ Научная конференция «Численное моделирование в механике сплошных сред» 2025. Посвящена 100-летию академика О. М. Белоцерковского. "Композитная структура Большого Красного Пятна Юпитера" Е.М. Аракелян, В.В. Жмур

- 09-16.03.26 XX Всероссийская школа конференция молодых ученых «Проблемы механики: теория, эксперимент и новые технологии». Новосибирск, "Композитная структура Большого Красного Пятна Юпитера" Е.М. Аракелян

Личный вклад автора. Личный вклад автора в работах с соавторами состоит в самостоятельной постановке и математической формализации задачи о композитном вихре, выводе точных аналитических решений для стационарной и нестационарной моделей, разработке алгоритмов и проведении расчётов полной механической энергии системы для условий исторических космических миссий, аналитическом исследовании кинематических режимов эволюции внутреннего вихря и определении диапазона параметров, при которых достигается минимум энергии композитной системы. Автором лично подготовлены публикации в рецензируемых журналах и доклады на научных конференциях.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 3-х печатных изданиях, которые изданы в журналах, рекомендованных ВАК, входящих в базы данных SCOPUS, Web of Science или Russian Science Citation Index (RSCI)

Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю, члену-корреспонденту РАН, д.ф.-м.н., профессору Жмуру Владимиру Владимировичу за интересную тему исследования, ценные советы и плодотворную совместную работу. Искреннюю благодарность автор выражает д.ф.-м.н. Репиной Ирине Анатольевне и д.ф.-м.н. Отто Гурамовичу Чхетиани за постоянную поддержку и помощь при работе над совместными проектами. Автор также выражает благодарность всем коллегам из ИФА РАН за плодотворную работу и дружественную атмосферу.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав,

заключения, списка литературы и приложения. Общий объем диссертации составляет 109 страниц, включая 11 рисунков и 1 таблицу. Список литературы содержит 105 наименований.

Основное содержание работы

Введение

В Введении представлены актуальность и степень разработанности темы исследования, основная цель исследования, поставленные задачи, методология и методы исследования, научная новизна, практическая и теоретическая значимость работы, основные защищаемые положения, степень достоверности полученных результатов, апробация результатов исследования, личный вклад автора и список опубликованных диссертантом работ.

Глава 1

В Главе 1 излагается базовая квазигеострофическая теория стационарного однородного эллипсоидального вихря в стратифицированной атмосфере на f-плоскости. Рассмотрены квазигеострофическое приближение для вращающейся стратифицированной по плотности среды с постоянной частотой Вяйсяля-Брента в квазигеострофическом приближении. При малых числах Россби система уравнений движения сведется к уравнению для давления или функции тока, связанных между собой постоянным множителем. Уравнение для функции тока $\psi(x, y, z, t)$ (векторного потенциала Стокса) имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\Delta_h\psi + \frac{\partial}{\partial z}\frac{f^2}{N^2}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) + J_h\left(\psi, \Delta_h\psi + \frac{\partial}{\partial z}\frac{f^2}{N^2}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = 0 \qquad (1)$$

Компоненты поля скорости (u, v, w) выражаются через функцию тока соответственно как

$$u = -\frac{\partial\psi}{\partial y}, v = \frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad w = -\frac{f}{N^2}\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial t\partial z} + J_h\left(\psi, \frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right] \qquad (2)$$

Физическая интерпретация уравнения (1) сводится к следующему – во время движения величина

$$\sigma = \Delta_h\psi + \frac{\partial}{\partial z}\frac{f^2}{N^2}\frac{\partial\psi}{\partial z} \qquad (3)$$

При постоянных параметрах N и f (3) можно упростить, введя “растянутую” вертикальную координату $\tilde{z} = \frac{N}{f}z$:

$$\sigma = \Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial\tilde{z}^2} \qquad (4)$$

Соотношение (4) описывает мгновенное распределение потенциальной завихренности в пространстве. В частности, в работах [Жмур, Панкратов, 1989; Meacham, 1992; Жмур, Щепеткин, 1991] исследован следующий случай

$$\Delta\psi = \begin{cases} \sigma_{\text{in}}, \text{если } (x, y, \tilde{z}) \in V \\ \sigma_{\text{out}}, \text{если } (x, y, \tilde{z}) \notin V \end{cases} \qquad (5)$$

При отсутствии вихря наблюдается однородное распределение потенциальной завихренности во всем пространстве

$$\Delta\psi = \sigma_{\text{out}} \qquad (6)$$

Это соотношение описывает фоновое течение.

Отклонение от фонового течения, связанное с наличием вихря, описывается функцией тока ψ_v , для которой справедливо распределение

$$\Delta\psi_v = \begin{cases} (\sigma_{\text{in}} - \sigma_{\text{out}}), \text{если } (x, y, \tilde{z}) \in V \\ 0\,, \text{если } (x, y, \tilde{z}) \notin V \end{cases} \quad (7)$$

В частности, для баротропного фонового течения или его отсутствия в упомянутых работах было получено выражение для $\psi_v(x, y, \tilde{z}, t)$ в случае, когда два главных направления эллипсоида лежат в горизонтальной плоскости, а третье главное направление – вертикальное

$$\psi_v(x, y, \tilde{z}, t) = -\frac{1}{4}\sigma ab\tilde{c}\int_{\lambda}^{\infty}\left(1 - \frac{\tilde{x}^2}{a^2+\mu} - \frac{\tilde{y}^2}{b^2+\mu} - \frac{\tilde{z}^2}{\tilde{c}^2+\mu}\right)\frac{d\mu}{\sqrt{(a^2+\mu)(b^2+\mu)(\tilde{c}^2+\mu)}} \quad (8)$$

Глава 2

В Главе 2 описана задача стационарного композитного вихря, особенности поведения собственных завихренностей Γ_1 и Γ_2 двух вихря в зависимости от размера внутреннего вихря, приведены результаты сравнения с натурными наблюдениями и описано поведение слабого нестационарного вихря внутри ядра стационарного вихревого образования, приведена энергия композитного вихря.

Положим, что ядро вихря состоит из двух вложенных в друг друга вихрей с потенциальными завихренностями: σ_1 и σ_2. В результате получим следующее распределение потенциальной завихренности в пространстве

$$\Delta\psi = \begin{cases} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_f)\,, \text{если точка } (x, y, \tilde{z}) \text{попадает в область } V_2 \\ (\sigma_1 + \sigma_f)\,, \quad \text{если точка } (x, y, \tilde{z}) \text{ попадает в область } V_1 \cap V_2 \\ \sigma_f, \quad \text{если точка } (x, y, \tilde{z}) \text{ окажется вне области } V_1 \end{cases} \quad (9)$$

В силу линейности задачи (9) разобьём задачу на три составляющих

$$\psi = \psi_f + \psi_1 + \psi_2 \quad (10)$$

где ψ_f – описывает фоновое течение и подчиняется уравнению (6) во всем пространстве

$$\Delta\psi_f = \sigma_{\text{out}}\,. \quad (11)$$

Фоновое течение мы будем задавать.

ψ_1 – описывает большой вихрь и подчиняется уравнению

$$\Delta\psi_1 = \begin{cases} \sigma_1, \text{если } (x, y, \tilde{z}) \in V_1 \\ 0\,, \text{если } (x, y, \tilde{z}) \notin V_1 \end{cases} \quad (12)$$

Потенциальная завихренность σ_1 является собственной потенциальной завихренностью вихря №1. Решение задачи (12) для эллипсоидальной формы ядра $F_1(x, y, \tilde{z}) = \frac{x^2}{{a_1}^2} + \frac{y^2}{{b_1}^2} + \frac{\tilde{z}^2}{{\tilde{c}_1}^2} - 1 = 0$ для любой точки пространства $(x, y, \tilde{z})$ следует из соотношения (8)

$$\psi_1(x, y, \tilde{z}, t) = -\frac{1}{4}\sigma_1 a_1 b_1 \tilde{c}_1 \int_{\lambda_1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{{a_1}^2+\mu} - \frac{y^2}{{b_1}^2+\mu} - \frac{\tilde{z}^2}{{\tilde{c}_1}^2+\mu}\right)\frac{d\mu}{\sqrt{({a_1}^2+\mu)({b_1}^2+\mu)({\tilde{c}_1}^2+\mu)}} \quad (13)$$

Параметр λ_1 для внутренних к области V_1 равен нулю $\lambda_1 = 0$. Для внешних к V_1 точек λ_1 определяется следующим образом: выбранная внешняя точка $(x, y, \tilde{z})$ лежит на поверхности одного из софокусных с эллипсоидов, которому соответствует $\lambda_1 > 0$, подчиняющееся уравнению

$$\frac{x^2}{{a_1}^2 + \lambda_1} + \frac{y^2}{{b_1}^2 + \lambda_1} + \frac{\tilde{z}^2}{{\tilde{c}_1}^2 + \lambda_1} = 1 \tag{14}$$

В результате совместное кинематическое условие на двух границах вихрей составляют систему уравнений на параметры вихрей

$$\begin{cases} \sigma_1\left(-\frac{\beta_0^{(1)}}{{a_1}^2} + \frac{\alpha_0^{(1)}}{{b_1}^2}\right) + \sigma_2\left(-\frac{\beta_\lambda^{(2)}}{{a_1}^2} + \frac{\alpha_\lambda^{(2)}}{{b_1}^2}\right) = \frac{2\Gamma}{{a_1}^2} \\ \sigma_1\left(-\frac{\beta_0^{(1)}}{{a_2}^2} + \frac{\alpha_0^{(1)}}{{b_2}^2}\right) + \sigma_2\left(-\frac{\beta_0^{(2)}}{{a_2}^2} + \frac{\alpha_0^{(2)}}{{b_2}^2}\right) = \frac{2\Gamma}{{a_2}^2} \end{cases} \tag{15}$$

Введя безразмерные потенциальные завихренности вихрей №1 и №2 с помощью соотношений

$$\Gamma_1 = \frac{\sigma_1}{\Gamma} \quad \Gamma_2 = \frac{\sigma_2}{\Gamma} \tag{16}$$

систему (15) можно представить в безразмерном виде

$$\begin{cases} \Gamma_1\left(-\beta_0^{(1)} + \varepsilon_1^2\alpha_0^{(1)}\right) + \Gamma_2\left(-\beta_\lambda^{(2)} + \varepsilon_1^2\alpha_\lambda^{(2)}\right) = 2 \\ \Gamma_1\left(-\beta_0^{(1)} + \varepsilon_2^2\alpha_0^{(1)}\right) + \Gamma_2\left(-\beta_0^{(2)} + \varepsilon_2^2\alpha_0^{(2)}\right) = 2 \end{cases} \tag{16}$$

решение, которого приведено ниже:

$$\Gamma_1 = \frac{2\left(\beta_0^{(2)} - \beta_\lambda^{(2)} + \varepsilon_1^2\alpha_\lambda^{(2)} - \varepsilon_2^2\alpha_0^{(2)}\right)}{\left(-\beta_0^{(1)} + \varepsilon_1^2\alpha_0^{(1)}\right)\left(\beta_0^{(2)} - \beta_\lambda^{(2)} + \varepsilon_1^2\alpha_\lambda^{(2)} - \varepsilon_2^2\alpha_0^{(2)}\right) + (\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2)\alpha_0^{(1)}\left(-\beta_\lambda^{(2)} + \varepsilon_1^2\alpha_\lambda^{(2)}\right)} \tag{17a}$$

$$\Gamma_2 = \frac{2(\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2)\alpha_0^{(1)}}{\left(-\beta_0^{(1)} + \varepsilon_1^2\alpha_0^{(1)}\right)\left(\beta_0^{(2)} - \beta_\lambda^{(2)} + \varepsilon_1^2\alpha_\lambda^{(2)} - \varepsilon_2^2\alpha_0^{(2)}\right) + (\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2)\alpha_0^{(1)}\left(-\beta_\lambda^{(2)} + \varepsilon_1^2\alpha_\lambda^{(2)}\right)} \tag{17b}$$

Отношение собственных энергии композитного вихря H к вихрю без внутреннего вложения H_0, где $M = \frac{a_2 b_2}{a_1 b_1} = \frac{S_2}{S_1}$, дается следующим уравнением

$$\frac{H}{H_0} = \frac{{\Gamma_1}^2}{{\Gamma_1^{(0)}}^2} + \frac{{\Gamma_2}^2}{{\Gamma_1^{(0)}}^2} M^{5/2} \frac{K_2}{K_1} \frac{{\chi_0'}^{(2)}}{{\chi_0'}^{(1)}} + \frac{\Gamma_1\Gamma_2}{{\Gamma_1^{(0)}}^2} M^{3/2} \frac{K_2}{K_1} + \frac{\Gamma_1\Gamma_2}{{\Gamma_1^{(0)}}^2} M \frac{{\chi_{\lambda'}'}^{(2)}}{{\chi_0'}^{(1)}} + \frac{1}{2}\frac{\Gamma_1\Gamma_2}{{\Gamma_1^{(0)}}^2} M K_2 \frac{{\lambda_2}'}{{\chi_0'}^{(1)}\sqrt{(\varepsilon_2 + {\lambda_2}')(\varepsilon_2^{-1} + {\lambda_2}')\left({K_2}^2 + {\lambda_2}'\right)}} \tag{18}$$

Согласно решению (17), собственные потенциальные завихренности композитного вихря жестко привязаны к величине сдвига скорости фонового потока. Причем эта связь определяет как величину потенциальной завихренности каждого вихря, так и знаки этой завихренности.

На Рис. 1.1. представлены графики $\Gamma_1(M, K_1)$ и $\Gamma_2(M, K_1)$ в миссии Voyager1.

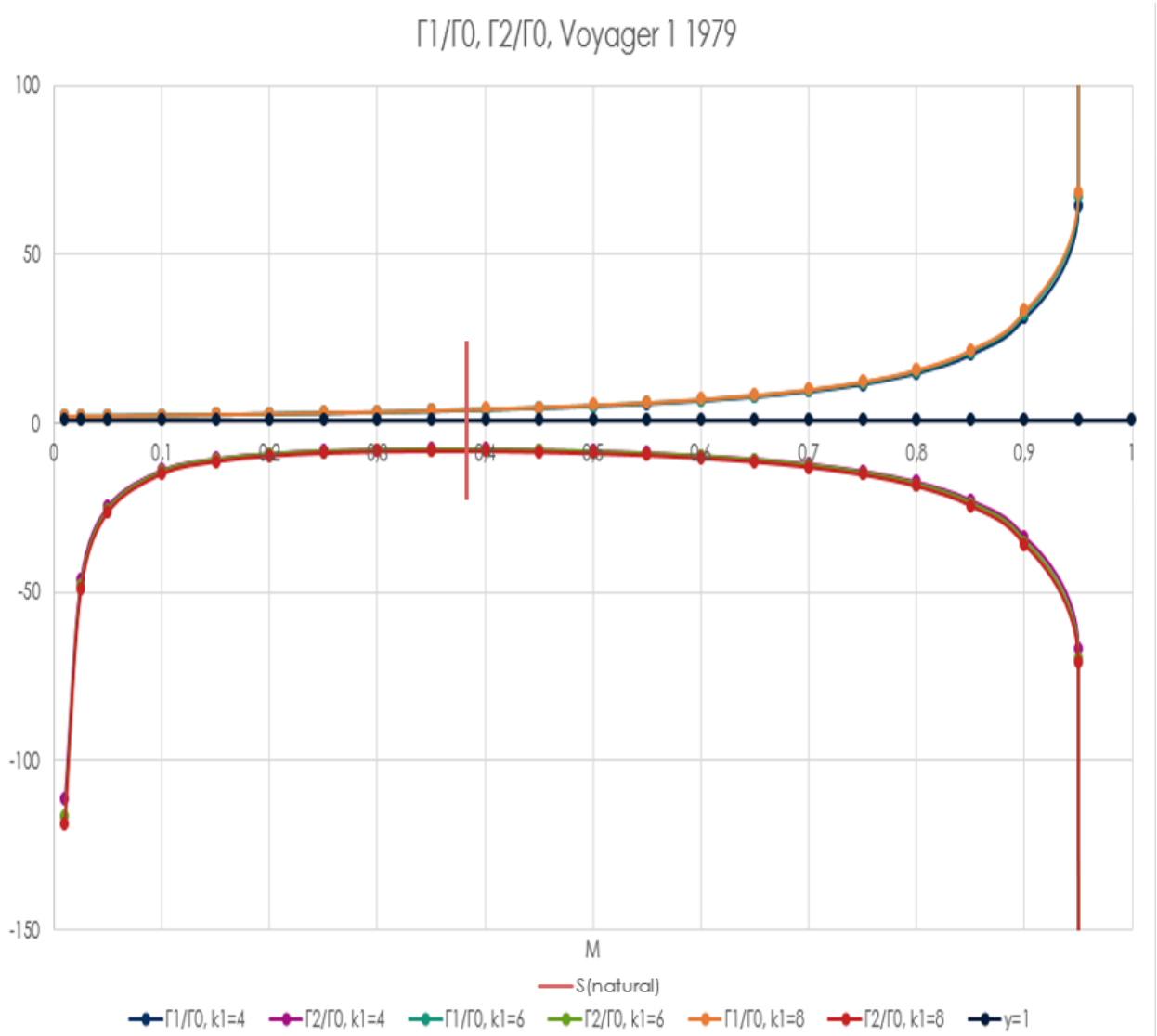


Рис. 1.1. На графике показано решение системы (38) для Γ_1 и Γ_2 согласно (40а) и (40б) в зависимости от параметра M (горизонтальная ось). Данные расчеты проводились для условий горизонтальных размеров БКПЮ в миссии Voyager 1979 для трех значений вертикального параметра растяжения K_1= 4,6,8. В данном масштабе отличие для разных K_1 незначительное. Аналогичные расчеты делались по остальным миссиям Cassini, Galileo и HST и дали близкие результаты. Вертикальный отрезок красного цвета соответствует значению параметра M=0.38 в миссии Voyager 1979.

Отношение интегральной завихренности внутреннего вихря к интегральной завихренности основного вихря имеет конечный предел при уменьшении объема второго вихря к нулю $V_2 \to 0$.

На Рис. 1.2 предлагается зависимость от M отношение интегральных потенциальных завихренностей внутреннего вихря к внешнему $\left|\frac{\sigma_2 a_2 b_2 \tilde{c}_2}{\sigma_1 a_1 b_1 \tilde{c}_1}\right| = \left|\frac{\Gamma_2 K_2}{\Gamma_1 K_1} M^{3/2}\right|$ при разных K_1

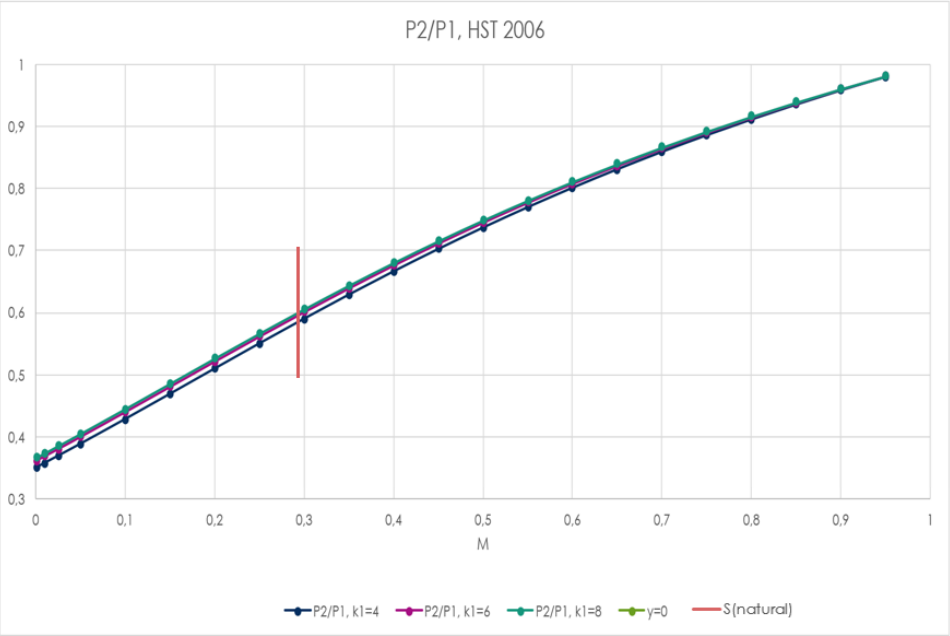


Рис. 1.2. Отношение интегральных потенциальных завихренностей внутреннего вихря к внешнему $\left|\frac{\sigma_2 a_2 b_2 \tilde{c}_2}{\sigma_1 a_1 b_1 \tilde{c}_1}\right|$ для условий миссии HST 2006 для трех значений $K_1 = 4,6,8$. Вертикальный отрезок красного цвета соответствует значению параметра M=0.29 в миссии HST 2006.

Интересно посмотреть на поведение полной энергии композитного вихревого образования в зависимости от размеров внутреннего вихря. На Рис. 1.3 такой расчет предложен для условий миссии HST 2006 для тех же трех значений $K_1 = 4,6,8$.

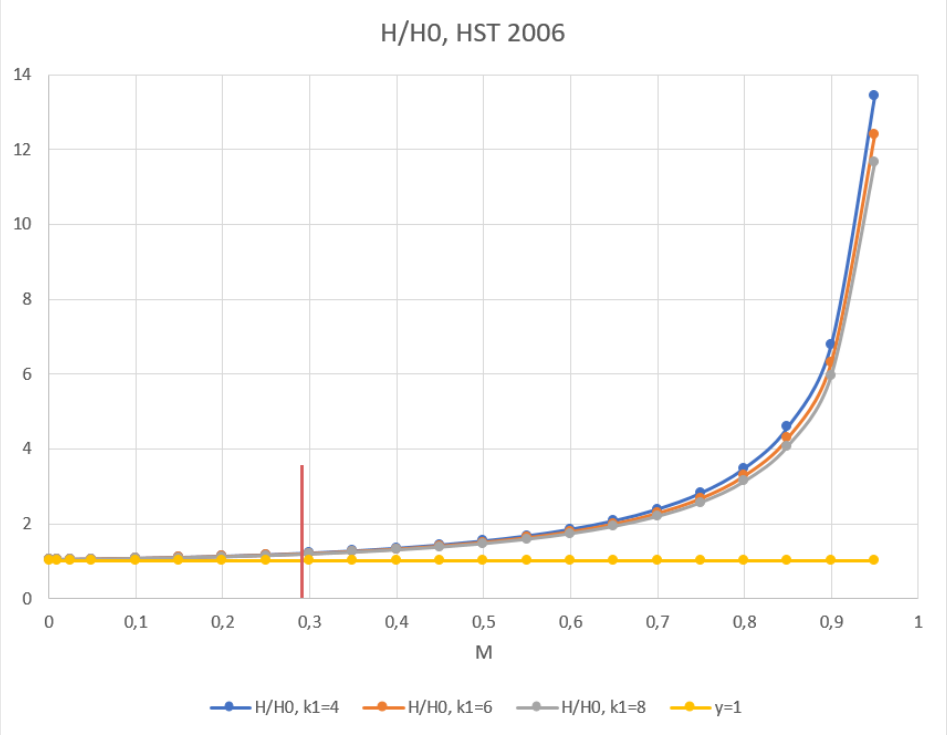


Рис. 1.3. Зависимость безразмерной полной энергии (кинетическая плюс доступная потенциальная) композитного вихря с вложенным в него более мелким вихрем от параметра M и параметра вертикального растяжения K_1 вихря №1. Желтая линия соответствует энергии вихря без вложений. Вертикальный отрезок красного цвета соответствует значению параметра M=0.29 в миссии HST 2006.

Полезны еще другие физические характеристики вихря с вложением.

1. Средняя завихренность $\langle\Gamma\rangle_V$ по общему объему ядра, рассчитываемое из условия

$$\langle\Gamma\rangle_V\, a_1\, b_1\tilde{c}_1 = \Gamma_1 a_1\, b_1\tilde{c}_1 + \Gamma_2 a_2 b_2\tilde{c}_2 \tag{19}$$

Условие софокусности вихрей даст уравнение для расчета $\langle\Gamma\rangle_V$:

$$\langle\Gamma\rangle_V = \Gamma_1 + \Gamma_2 M^{3/2}\,\frac{K_2}{K_1} \tag{20}$$

2. Полная потенциальная завихренность частиц внутреннего ядра $(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_f)$ в безразмерном виде $(1 + \Gamma_1 + \Gamma_2)$ и полная потенциальная завихренность частиц в зазоре между границами внутреннего и внешнего ядер $(\sigma_1 + \sigma_f)$ в безразмерном виде $(1 + \Gamma_1)$ также дадут представление о свойствах вихрей.

На Рис. 1.4 показаны зависимости средней завихренности $\langle\Gamma\rangle_V$ по всему объему сложного вихря от параметров M и K_1.

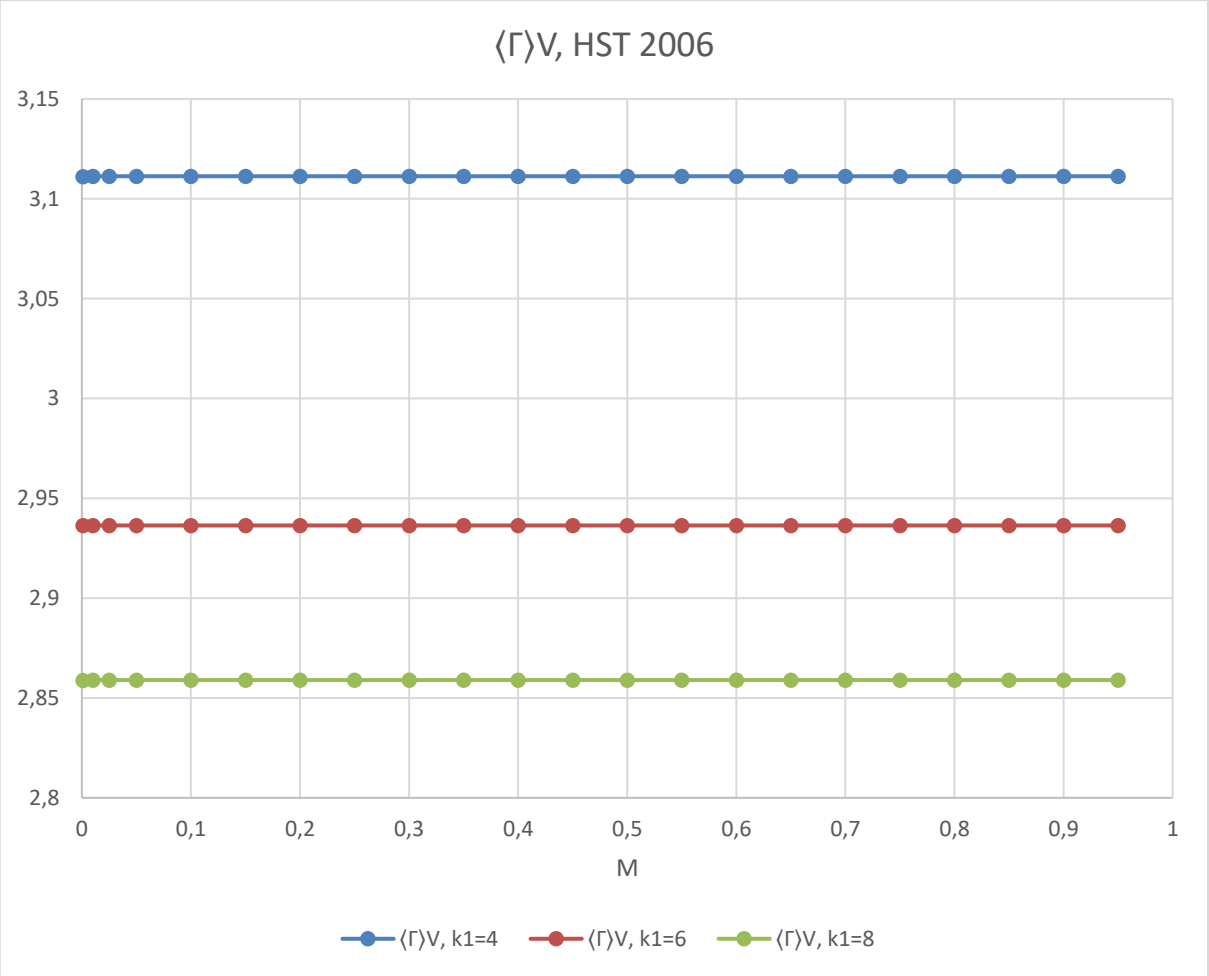


Рис. 1.4. Средняя завихренность по объему всего вихревого ядра отнесенная к завихренности однородного вихря без вложений для условий миссии HST 2006 для трех значений $K_1 = 4{,}6{,}8$. Вложенный вихрь увеличивает среднюю завихренность $\langle\Gamma\rangle_V$ примерно в три раза. При этом $\langle\Gamma\rangle_V$ не зависит от размеров внутреннего вихря, но незначительно увеличивается с ростом K_1.

Как видно из рисунка 1.4 средняя по объему общего ядра завихренность повышается до трех раз по сравнению завихренностью однородного вихря без вложений. Эта оценка получена при условии стационарности обоих вихрей.

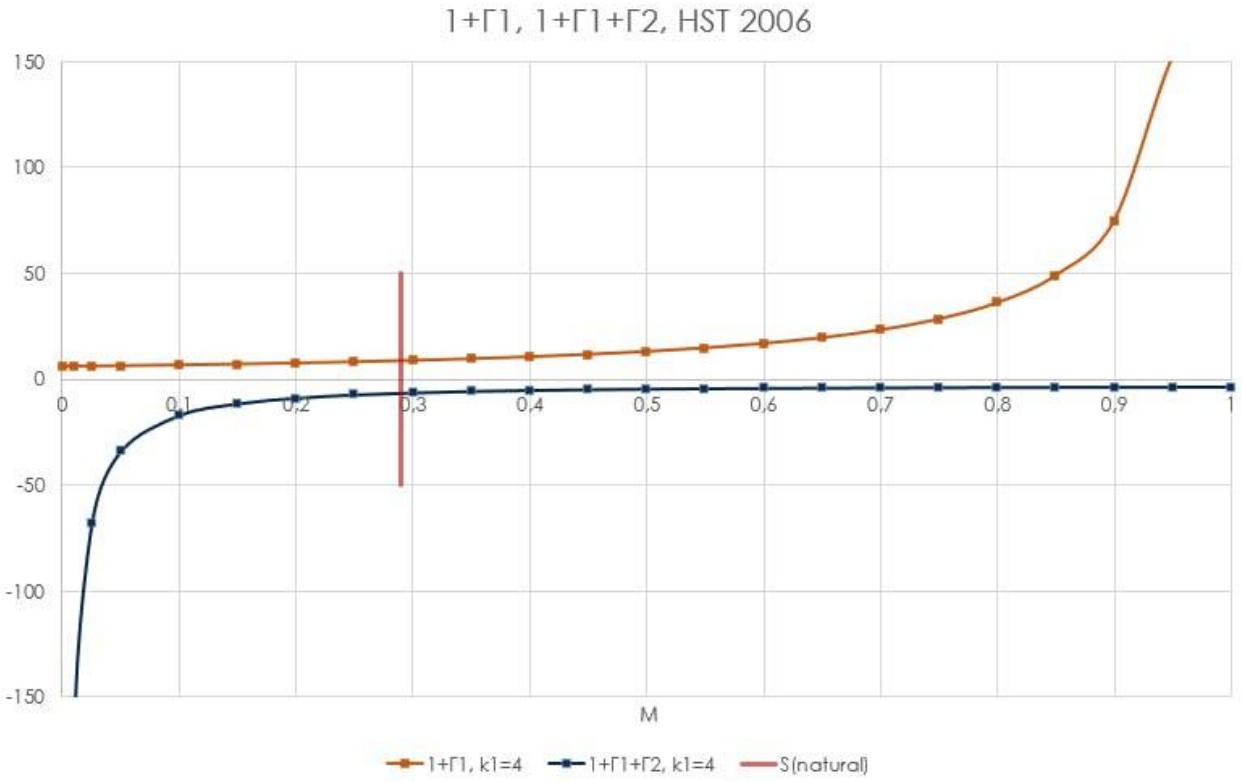


Рис. 1.5. Суммарная потенциальная завихренность в безразмерном виде $(1+\Gamma_1)$ периферийной зоны композитного вихря частиц в зазоре между границами вихрей №1 и №2 (красная кривая). Суммарная потенциальная завихренность частиц в центральной зоне композитного вихря $(1+\Gamma_1+\Gamma_2)$ (синяя кривая), рассчитанная для значения $K_1 = 4$. Миссия HST 2006.

На Рис. 1.5 представлена полная потенциальная завихренность частиц внутреннего ядра $(1+\Gamma_1+\Gamma_2)$ и периферийной зоны $(1+\Gamma_1)$ в безразмерном виде для случая $K_1 = 4$ по миссии HST 2006.

Выражение для механической энергии сплошной среды имеет вид:

$$H = \frac{1}{2}\iiint \left[\rho_\Sigma(u^2+v^2) + \frac{g^2}{\rho_0}\frac{\rho^2}{N^2}\right] dxdydz \tag{21}$$

Собственная механическая энергия одиночного эллипсоидального вихря, включающая в себя кинетическую и доступную потенциальную энергию области как внутри вихревого ядра, так и так вне его (захваченную в движение фоновую жидкость), дается соотношением [Жмур, Арутюнян, 2022],

$$H = -\frac{1}{2}\rho_0 \frac{f\sigma}{N}\iiint_V \psi(x,y,\tilde{z},t), dxdyd\tilde{z} \tag{22}$$

окончательное выражения для энергии одиночного вихря

$$H_0 = \frac{3}{40\pi}\rho_0 \frac{V_0^2\sigma^2}{c} K \int_0^\infty \frac{d\tilde{\mu}}{\sqrt{(\tilde{\mu}^2+\nu\tilde{\mu}+1)(K^2+\tilde{\mu})}} \tag{23}$$

В результате, получено выражение для энергии H в безразмерном виде

$$\chi_0^{'} = K\int_0^\infty \frac{d\mu^{'}}{\sqrt{(\varepsilon+\mu^{'})(\varepsilon^{-1}+\mu^{'})(K^2+\mu^{'})}}$$

$$H\chi_{\lambda^{'}}^{'} = K\int_{\lambda^{'}}^\infty \frac{d\mu^{'}}{\sqrt{(\varepsilon+\mu^{'})(\varepsilon^{-1}+\mu^{'})(K^2+\mu^{'})}} \tag{24}$$

$$H = \frac{1}{10}\rho_0 \frac{f{\sigma_1}^2}{N} V_1 {\chi_0}^{(1)} + \frac{1}{10}\rho_0 \frac{f{\sigma_2}^2}{N} V_2 {\chi_0}^{(2)} + \frac{1}{10}\rho_0 \frac{f\sigma_1\sigma_2}{N} V_2 {\chi_0}^{(1)} + \frac{1}{10}\rho_0 \frac{f\sigma_1\sigma_2}{N} V_1 \left\{ {\chi_{\lambda_2}}^{(2)} + \frac{1\grave{}}{2} a_2 b_2 \tilde{c}_2 \frac{\lambda_2}{\sqrt{\Delta(\lambda_2)}} \right\} \quad (25)$$

окончательное выражение для относительной энергии композитного вихря $\frac{H}{H_0}$ примет вид

$$\frac{H}{H_0} = \frac{{\Gamma_1}^2}{{\Gamma_0}^2} + \frac{{\Gamma_2}^2}{{\Gamma_0}^2} M^{5}/_{2} \frac{K_2}{K_1} \frac{{\chi_0}'^{(2)}}{{\chi_0}'^{(1)}} + \frac{\Gamma_1\Gamma_2}{{\Gamma_0}^2} M^{3}/_{2} \frac{K_2}{K_1} + \frac{\Gamma_1\Gamma_2}{{\Gamma_0}^2} M \frac{{\chi_{\lambda'}}'^{(2)}}{{\chi_0}'^{(1)}} + \frac{1}{2}\frac{\Gamma_1\Gamma_2}{{\Gamma_0}^2} M K_2 \frac{{\lambda_2}'}{{\chi_0}'^{(1)} \sqrt{\left(\varepsilon_2 + {\lambda_2}'\right)\left({\varepsilon_2}^{-1} + {\lambda_2}'\right)\left({K_2}^2 + \lambda_2\right)}} \quad (26)$$

Выводы к Главе 2:

Вложенный вихрь слабой интенсивности или же вихрь с малыми горизонтальными размерами или сильно сплюснутый по вертикали слабо влияют на деформацию основного вихря. В этом случае решается задача о поведении внутреннего вихря под действием течения основного вихря при воздействии фонового течения. Оба вихря имеют эллипсоидальную форму ядра.

В результате получены следующие свойства.

1. Если центры вихрей не совпадают, то вложенный вихрь как целое движется внутри основного вихря по эллиптической траектории. Такое движение периодическое, период для всех таких вихрей одинаков и зависит от характеристик обоих вихрей и сдвига фонового течения. Но не зависит от исходного положения вложенного вихря в ядре основного вихревого образования.
2. Во время своего движения как целого форма внутреннего вихря ограниченно деформируется. В системе координат, движущей со скоростью центра вложенного вихря, форма ядра внутреннего вихря может вращаться или колебаться вокруг вертикальной оси с одновременным ограниченным изменением длин горизонтальных полуосей. Деформационное движение тоже периодическое, но с другим периодом нежели период движения по эллиптическим траекториям. Период деформационного движения зависит как от параметров вихрей и фонового течения, так и от начальных условий в геометрии вложенного вихря. Подчеркнем, что вложенный вихрь не может вытягиваться в нить.
3. Если центры вложенного и основного вихрей совпадают, то вложенный вихрь как целое не движется, но испытывает периодическую эволюцию формы ядра, описанную выше: вращение или колебание формы вокруг вертикальной оси с одновременным ограниченным изменением длин горизонтальных полуосей. Какой из вариантов вращение или колебание ядра будет иметь место зависит от начальных условий на вытянутость вихря по горизонтали и его ориентацию в пространстве.
4. Собственная энергия композитного вихря может быть меньше энергии однородного стационарного вихря при условии, что потенциальная завихренность вложенного вихря противоположна по знаку завихренности основного вихря и лежит в некотором диапазоне значений. Потенциальной завихренности вложенного вихря из середине указанного диапазона соответствует минимальной энергии композитного вихря. Этот свойство

подчеркивает энергетическую выгоду в пользу существования композитных вихрей с нестационарным вложением, слабо влияющим на границу основного.

Глава 3

В Главе 3 описаны нестационарный композитный вихрь на фоне баротропного течения с постоянным сдвигом, постановка и решение задачи нестационарного композитного вихря. Описаны траектория движения и деформация границы пробного вихря.

Как и ранее, мы рассматриваем кусочно-постоянное распределение потенциальной завихренности, при котором внутри вихревого ядра V она равна σ_{in}, а вне его — σ_{out}

С помощью соотношений (2) из (9) можно получить компоненты геострофических скоростей

$$u_v = \frac{-\partial\psi_v}{\partial y} = \frac{\sigma}{4\pi}\iiint_V \frac{(y-y')dx'dy'd\tilde{z}'}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(\tilde{z}-\tilde{z}')^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (27a)$$

$$v_v = \frac{\partial\psi_v}{\partial x} = \frac{-\sigma}{4\pi}\iiint_V \frac{(x-x')dx'dy'd\tilde{z}'}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(\tilde{z}-\tilde{z}')^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (27b)$$

Для пространства внутри ядра вплоть до его границы следует положить $\lambda = 0$. Как было показано в Главе 1, решение (10) остаётся справедливым и в случае, когда длины полуосей и ориентация эллипсоида зависят от времени. Наложение кинематического граничного условия приводит к трём возможным типам эволюции формы ядра: вращение с ограниченной деформацией, нутационные колебания с ограниченной деформацией и неограниченное вытягивание. Напомним, что в условиях атмосферы Юпитера, как было установлено в Главе 1, реализуются только первые два режима, при которых вихрь остаётся локализованным образованием. Существуют также параметры, при которых форма вихря застывает в фоновом течении — это стационарный вихрь, подробно изученный в Главе 2.

Горизонтальное поле скорости, соответствующее функции тока, как и в Главе 1, определяется соотношением (8). Напомним ключевое свойство этого поля: внутри ядра (при $\lambda = 0$) скорости линейны по горизонтальным координатам, а функция тока является квадратичной. Это свойство, детально обоснованное в Главе 1, сохраняется и на поверхностях $\lambda = const > 0$, что в дальнейшем позволит нам использовать теорию эволюции эллипсоидальных вихрей в равнозавихренных течениях.

Как уже было установлено в Главе 1, поверхность $\lambda = const > 0$ соответствует эллипсоиду с полуосями $(A, B, \tilde{C})$, где $\mathrm{A}^2 = \mathrm{a}^2 + \lambda$, $\mathrm{B}^2 = \mathrm{b}^2 + \lambda$, $\tilde{C}^2 = \tilde{c}^2 + \lambda$. Этот эллипсоид является софокусным по отношению к исходному, что устанавливается равенством (14). Напомним, что свойство софокусности, детально обоснованное в Главе 1, играет ключевую роль в нашей теории: именно оно обеспечивает линейность индуцированных скоростей на границах вложенных вихрей и позволяет получить замкнутые алгебраические уравнения для их потенциальных завихренностей.

На временах порядка нескольких земных лет Красное пятно Юпитера можно рассматривать как вихрь с застывшей формой ядра на фоне баротропного горизонтального течения со сдвигом. Малые времена – характерное время оборота частицы в вихре. Большие времена – это время деформации ядра вихря. За более чем 350 лет наблюдения за БКПЮ вихрь медленно деформировался, уменьшаясь в размерах. На временах порядка года

деформацией можно пренебречь и считать вихрь стационарным. В таком походе БКПЮ изучался в работе [Жмур, Суетин, Чхетиани 2023]. Причем, в этой работе считалось, что ядро вихря заполнено равнозавихренными (в смысле потенциальной завихренности) частицами.

В Главах 1 и 2 нами были детально изучены однородный и двухкомпонентный стационарные композитные вихри. Естественным обобщением этой теории является переход к трёхкомпонентной вихревой структуре. Как и ранее, мы предполагаем, что ядро вихря состоит из трёх вложенных друг в друга вихрей с потенциальными завихренностями σ_1, σ_2 и σ_3, причём $V_3 \subset V_2 \subset V_1$. Зазор между поверхностями среднего внутреннего и внешнего эллипсоидов обозначим $V_1 \cap V_2$. Аналогичный зазор между средним и самым маленьким вихрями обозначим как $V_2 \cap V_3$ В результате получим следующее распределение потенциальной завихренности в пространстве

$$\Delta\psi = \begin{cases} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_f), \text{если точка } (x, y, \tilde{z}) \text{ попадает в область } V_3 \\ (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_f), \text{если точка } (x, y, \tilde{z}) \text{попадает в область } V_2 \cap V_3 \\ (\sigma_1 + \sigma_f), \text{если точка } (x, y, \tilde{z}) \text{попадает в область} V_1 \cap V_2 \\ \sigma_f, \text{если точка } (x, y, \tilde{z}) \text{окажется в необласти } V_1 \end{cases} \quad (28)$$

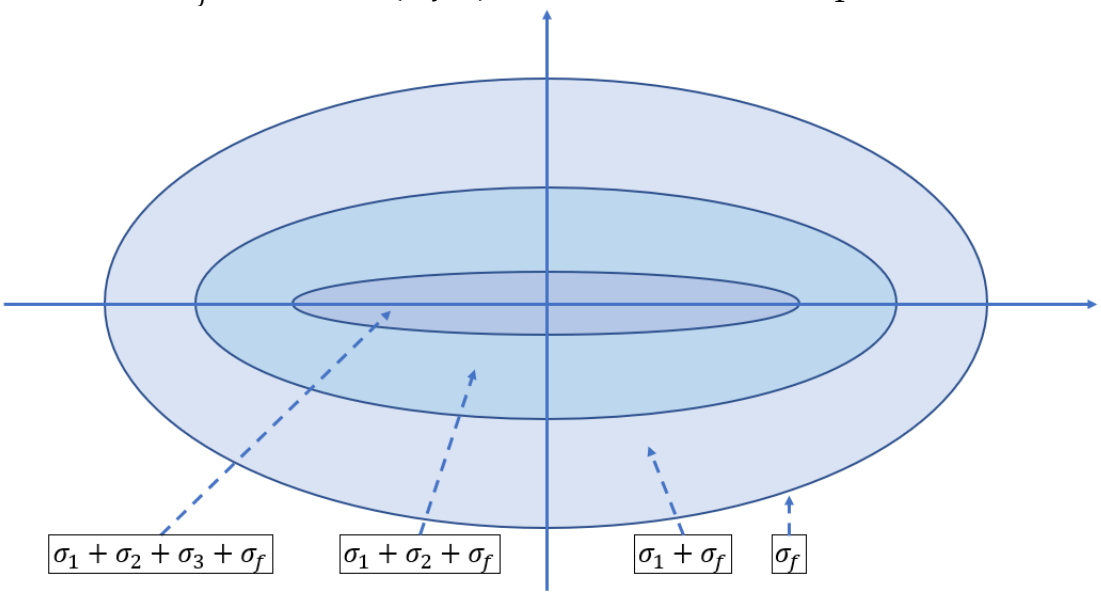


Рис. 3.1. Схематический рисунок композитного вихревого образования, стоящего из трех вихрей. Внешний (самый большой по размерам вихрь) №1 занимает пространство V_1. Промежуточный по размерам вихрь №2 занимает пространство V_2. Самый маленький внутренний вихрь №3 занимает пространство V_3. Во внутреннем вихре в области V_3 суммарная потенциальная

Постановка нестационарной задачи не требует эллипсоидальной формы ядер и подходит для любых односвязанных и вложенных в друг друга объемов в качестве вихревых ядер.

При такой постановке задачи совместное кинематическое условие и уравнения на трех границах вихрей составляют систему уравнений на параметры вихрей

$$\begin{cases} \sigma_1\left(\frac{-\beta_0^{(1)}}{{a_1}^2}+\frac{\alpha_0^{(1)}}{{b_1}^2}\right)+\sigma_2\left(\frac{-\beta_{\lambda_{21}}^{(2)}}{{a_1}^2}+\frac{\alpha_{\lambda_{21}}^{(2)}}{{b_1}^2}\right)+\sigma_3\left(\frac{-\beta_{\lambda_{31}}^{(3)}}{{a_1}^2}+\frac{\alpha_{\lambda_{31}}^{(3)}}{{b_1}^2}\right)=\frac{2\Gamma}{{a_1}^2}, \\ \sigma_1\left(\frac{-\beta_0^{(1)}}{{a_2}^2}+\frac{\alpha_0^{(1)}}{{b_2}^2}\right)+\sigma_2\left(\frac{-\beta_0^{(2)}}{{a_2}^2}+\frac{\alpha_0^{(2)}}{{b_2}^2}\right)+\sigma_3\left(\frac{-\beta_{\lambda_{32}}^{(3)}}{{a_2}^2}+\frac{\alpha_{\lambda_{32}}^{(3)}}{{b_2}^2}\right)=\frac{2\Gamma}{{a_2}^2}, \\ \sigma_1\left(\frac{-\beta_0^{(1)}}{{a_2}^2}+\frac{\alpha_0^{(1)}}{{b_2}^2}\right)+\sigma_2\left(\frac{-\beta_0^{(2)}}{{a_2}^2}+\frac{\alpha_0^{(2)}}{{b_2}^2}\right)+\sigma_3\left(\frac{-\beta_0^{(3)}}{{a_2}^2}+\frac{\alpha_0^{(3)}}{{b_2}^2}\right)=\frac{2\Gamma}{{a_3}^2}. \end{cases} \quad (29)$$

Введя безразмерные потенциальные завихренности вихрей №1 и №2 с помощью соотношений

$$\Gamma_1=\frac{\sigma_1}{\Gamma}\quad \Gamma_2=\frac{\sigma_2}{\Gamma}\quad \Gamma_3=\frac{\sigma_3}{\Gamma} \quad (30)$$

в безразмерном виде

$$\begin{cases} \Gamma_1\left(-\beta_0^{(1)}+\varepsilon_1^2\alpha_0^{(1)}\right)+\Gamma_2\left(-\beta_{\lambda_{21}}^{(2)}+\varepsilon_1^2\alpha_{\lambda_{21}}^{(2)}\right) \\ \quad +\Gamma_3\left(-\beta_{\lambda_{31}}^{(3)}+\varepsilon_1^2\alpha_{\lambda_{31}}^{(3)}\right)=2, \\ \Gamma_1\left(-\beta_0^{(1)}+\varepsilon_2^2\alpha_0^{(1)}\right)+\Gamma_2\left(-\beta_0^{(2)}+\varepsilon_2^2\alpha_0^{(2)}\right) \\ \quad +\Gamma_3\left(-\beta_{\lambda_{32}}^{(3)}+\varepsilon_2^2\alpha_{\lambda_{32}}^{(3)}\right)=2, \\ \Gamma_1\left(-\beta_0^{(1)}+\varepsilon_3^2\alpha_0^{(1)}\right)+\Gamma_2\left(-\beta_0^{(2)}+\varepsilon_3^2\alpha_0^{(2)}\right) \\ \quad +\Gamma_3\left(-\beta_0^{(3)}+\varepsilon_3^2\alpha_0^{(3)}\right)=2. \end{cases} \quad (31)$$

Если бы оба внутренних вихря полностью отсутствовали:

$$\Gamma_1=\Gamma_1^{(1)}=\frac{2}{-\beta_0^{(1)}+\varepsilon_1^2\alpha_0^{(1)}} \quad (32)$$

Если отсутствует внутренний вихрь №3:

$$\begin{cases} \Gamma_1\left(-\beta_0^{(1)}+\varepsilon_1^2\alpha_0^{(1)}\right)+\Gamma_2\left(-\beta_{\lambda_{21}}^{(2)}+\varepsilon_1^2\alpha_{\lambda_{21}}^{(2)}\right)=2, \\ \Gamma_1\left(-\beta_0^{(1)}+\varepsilon_2^2\alpha_0^{(1)}\right)+\Gamma_2\left(-\beta_0^{(2)}+\varepsilon_2^2\alpha_0^{(2)}\right)=2. \end{cases} \quad (33)$$

Добавление третьего вихря приводит к значительной перестройке всей системы. Отметим, что мы не можем возмутить композитный двукомпонентный вихрь слабым третьим вихрем, как это делается в традиционных задачах устойчивости.

Однако если фиксировать геометрические параметры двух вихрей внешнего и внутреннего, а третий вихрь по размерам приблизить к размерам внутреннего вихря, то естественно ожидать, что стационарная картина распределения суммарных потенциальных завихренностей в двухкомпонентном и трехкомпонентном композитных вихрях будет близкой, а именно потенциальные завихренности внутренней части обоих вихрей и будут совпадать, а также будут равны потенциальные завихренности периферийных зон этих вихрей.

На рисунках 3.2, 3.3, 3.4 приведены результаты расчетов для характеристик композитных вихрей

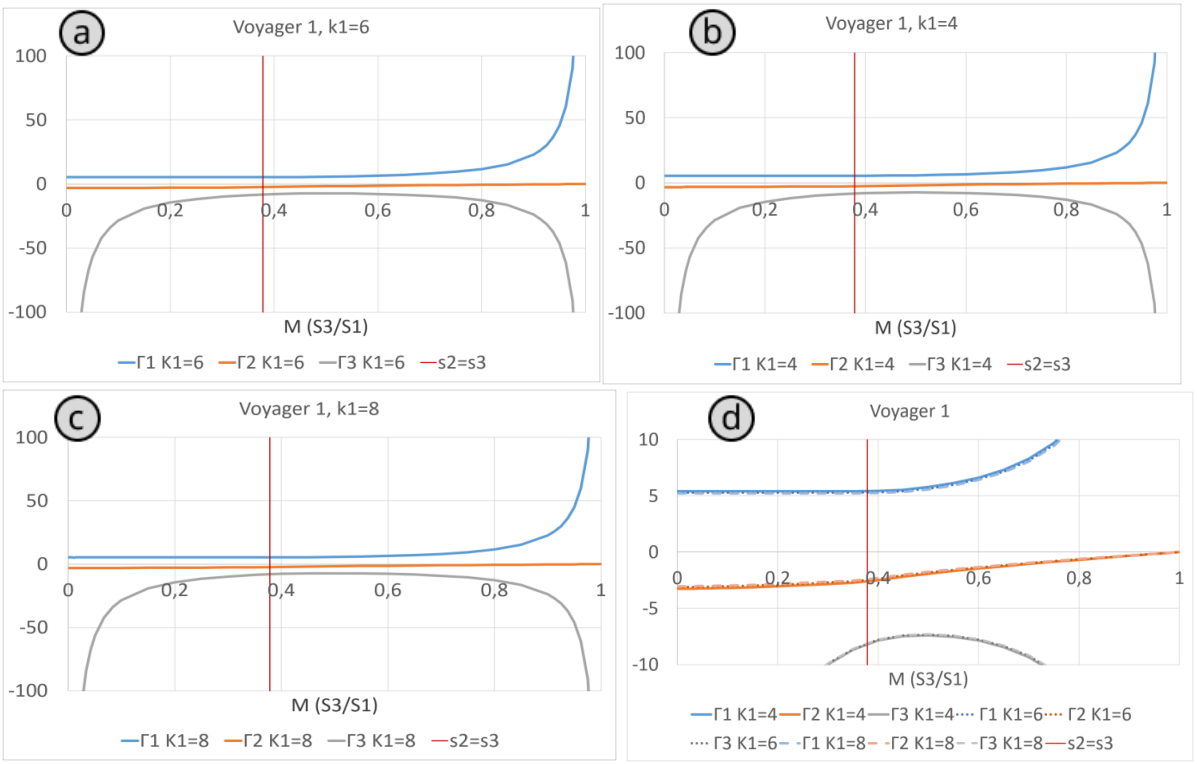


Рис. 3.1. Собственные завихренности $\left(\Gamma_1^{(3)}, \Gamma_2^{(3)}, \Gamma_3^{(3)}\right)$ в зависимости от размера третьего вихря (параметр $M = \frac{a_3 b_3}{a_1 b_1}$) для a) $K_1 = 4$, b) $K_1 = 6$, c) $K_1 = 8$ для миссии Voyager 1. Вертикальная красная линия обозначает совпадение вихрей №2 и №3 $S_2 = S_3$. Рисунок d повторяет рисунок b с более подробным масштабом по оси ординат и для всех значений K_1.

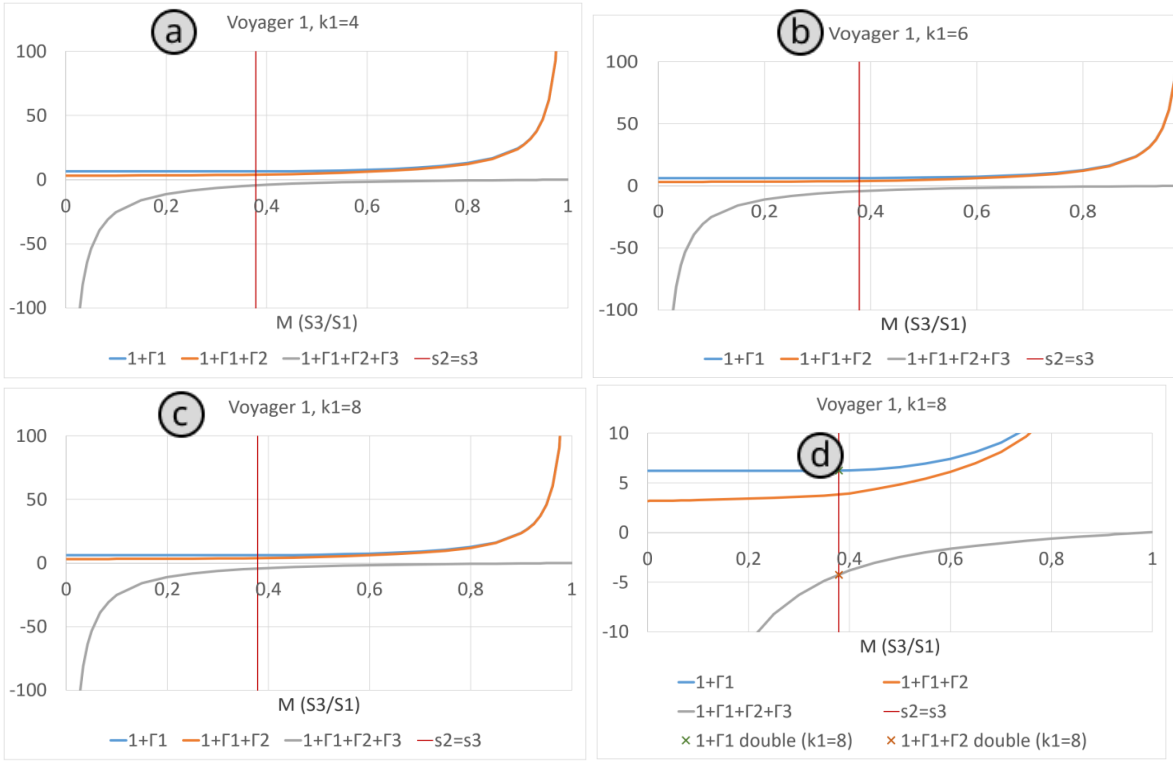


Рис. 3.2. Суммарные завихренности различных зон трехкомпонентного композитного вихря $\left(1 + \Gamma_1^{(3)}\right)$ $\left(1 + \Gamma_1^{(3)} + \Gamma_2^{(3)}\right)$, $\left(1 + \Gamma_1^{(3)} + \Gamma_2^{(3)} + \Gamma_3^{(3)}\right)$ в зависимости от размера третьего

вихря (параметр $M = \frac{a_3 b_3}{a_1 b_1}$) для трех значений $K_1 = 4, 6, 8$ для миссии Voyager 1. Вертикальная красная линия обозначает совпадение вихрей №2 и №3 $S_2 = S_3$. Крестиками обозначены значения $\left(1 + \Gamma_1^{(2)}\right)$ и $\left(1 + \Gamma_1^{(2)} + \Gamma_2^{(2)}\right)$ для условия $S_2 = S_3$

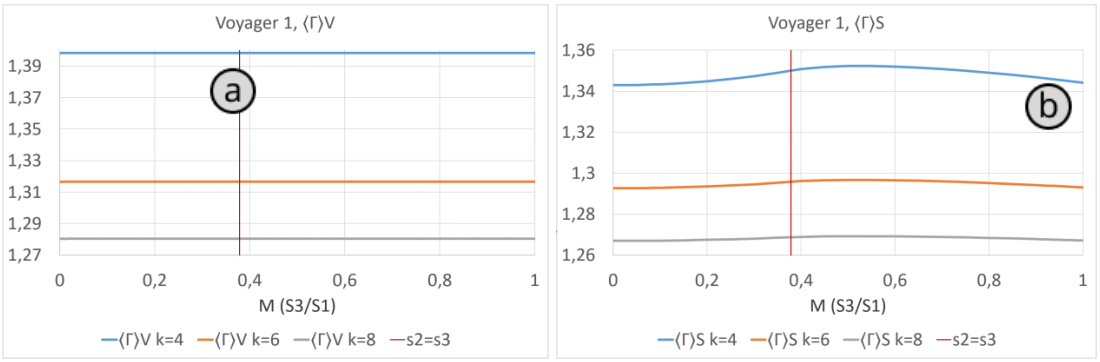


Рис. 3.3. Средние потенциальные завихренности БКПЮ по объему $\langle \Gamma \rangle_V$ (a) и по площади $\langle \Gamma \rangle_S$ (b) главного сечения для трех значений $K_1 = 4, 6, 8$ для миссии Voyager 1 в зависимости от размера третьего вихря (параметр $M = \frac{a_3 b_3}{a_1 b_1}$) . Вертикальная красная линия обозначает совпадение вихрей №2 и №3 $S_2 = S_3$

Пробный вихрь внутри глаза композитного вихря движется как целое по эллиптической траектории. Движение периодическое с частотой

$$\Omega = \sqrt{\left(\Gamma + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=N} \sigma_i \beta_0^{(i)}\right)\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=N} \sigma_i \alpha_0^{(i)}\right)} \qquad (34)$$

независящей от конкретной траектории движения. Все малые вихри, движущиеся как целое внутри большого вихря, совершают полный оборот за одно и то же время. Период обращения пробного вихря как целого вокруг центра композитного вихря

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} \qquad (35)$$

Если в качестве основного вихря принять упрощенную однородную модель БКПЮ [Жмур, Суетин 2023], то время T составит величину порядка земной недели.

Выводы к Главе 3:

Проведённое в настоящей главе исследование трёхкомпонентного вихря показывает, что двухкомпонентная композитная структура, изученная в Главе 2, является структурно устойчивой по отношению к возмущению её третьим вложенным вихрем. В общем случае двухкомпонентная композитная вихревая структура заметно изменяется в численном значении всех параметров при внесении в нее третьего вихря. однако общие качественные свойства двух вариантов вихрей остаются прежними. Трехкомпонентный вихрь плавно трансформируется в двухкомпонентную вихревую структуру вместе со своими физическими характеристиками. Это свойство доказывает, что двухкомпонентный вихрь структурно устойчив по отношению к возмущению его третьим вложенным вихрем. Формальной

математической причиной структурной устойчивости упомянутых вихрей в общем случае является условие стационарности всей вихревой системы. Если свойства вращения выражены более эффективно, чем свойства вытягивания, то таком течении вихрь не может вытянуться в нить и останется локализованным в пространстве образованием, способным только вращаться или совершать нутационные колебания с ограниченными изменениями размеров вихревого ядра. Все пробные вихри в более сложных композитных вихрях, помещенных в любые зоны стационарных вихревых структур, обладают важным свойством – их энергия не может неограниченно возрастать. Возмущение композитного вихря в виде пробного вихря не приведет к неустойчивости композитного вихря.

Заключение

В Заключении обобщаются результаты исследования, формулируются итоговые физические выводы и намечаются пути дальнейшего применения созданного аналитического аппарата к другим атмосферным структурам, таким как Овал ВА и гигантские вихри Сатурна. Основные результаты работы состоят в следующем: установлена циклоническая природа внутреннего вложения в стационарном композитном вихре и его энергетическая избыточность по сравнению с однородным вихрем; показано, что нестационарный композитный вихрь с циклоническим вложением может обладать меньшей механической энергией, чем однородный вихрь; доказана структурная устойчивость двухкомпонентного вихря по отношению к возмущению его третьим вложенным вихрем; показана устойчивость многокомпонентной композитной структуры к слабым пробным возмущениям. Отмечается, что предложенные модели качественно и количественно воспроизводят наблюдаемую кинематическую структуру БКПЮ — мощное антициклоническое струйное течение на периферии и выраженную зону слабого циклонического вращения во внутренней области.

Основные результаты работы

В диссертации решены следующие задачи:

1. Решена задача о стационарном двухкомпонентном вихре
2. Решена задача о нестационарном двухкомпонентном вихре
3. Рассмотрена структурная устойчивость композитных вихревых структур и поведение слабого пробного вихря внутри ядра стационарного вихревого образования

В результате работы сделаны следующие выводы:

Общие выводы по диссертации:

1. Стационарность композитного вихря требует противоположных знаков завихренности. Математически доказано, что система из двух вложенных софокусных эллипсоидальных вихрей может оставаться стационарной на f-плоскости только в том случае, если потенциальная завихренность внутреннего ядра строго противоположна по знаку завихренности внешнего ядра. При этом полная механическая энергия такого стационарного образования всегда превышает энергию эквивалентного однородного вихря без вложения.
2. Нестационарная композитная модель энергетически выгоднее. Установлено, что композитный вихрь с нестационарным циклическим вложением, слабо влияющим на границу основного вихря, может обладать меньшей суммарной механической энергией, чем однородный вихрь. Это делает нестационарную модель более предпочтительной с физической точки зрения для объяснения долгоживучести БКПЮ по сравнению со стационарной моделью.
3. В рамках нестационарной модели показано, что слабый внутренний вихрь, помещенный в ядро основного вихря, не подвержен деструктивному режиму неограниченного вытягивания в филамент. Его центр движется по замкнутой эллиптической траектории (с периодом порядка 6 земных суток), а форма испытывает ограниченные вращения или нутационные колебания, что подтверждает устойчивость такой структуры. Внутренний вихрь остается локализованным образованием с ограниченной энергией и не вытягивается в нить.
4. Модели качественно воспроизводят наблюдаемую кинематику БКПЮ. Обе разработанные модели (стационарная и нестационарная) успешно объясняют ключевые особенности Большого Красного Пятна: наличие мощного антициклонического струйного течения на периферии (до 150–170 м/с) и зоны слабого циклонического вращения во внутренней области (порядка 20 м/с). Это достигается за счет противоположного знака завихренности внутреннего вложения.
5. Показана структурная устойчивость многокомпонентных вихрей. Доказано, что двухкомпонентная композитная структура структурно устойчива к возмущению ее третьим вложенным вихрем. При этом добавление малых слабых пробных вихрей в любую зону многокомпонентной системы не приводит к ее неустойчивости, а их собственная энергия остается ограниченной.

Публикации по теме диссертации в журналах из Перечня ВАК:

1. Аракелян Е.М., Жмур В.В., Чхетиани О.Г. Композитная структура Большого красного пятна Юпитера. Часть 1. Стационарная модель // Известия Российской академии наук. Физика атмосферы и океана. – 2026. – Т. 62, № 3. – С. 472-496. – DOI 10.7868/S3034648726030084
2. Аракелян Е.М., Жмур В.В., Чхетиани О.Г. Композитная структура Большого красного пятна Юпитера. Часть 2. Нестационарная модель // Известия Российской академии наук. Физика атмосферы и океана. – 2026. – Т. 62, № 4. – С. 658-678. – DOI 10.7868/S3034648726040095
3. E.M. Arakelyan, V.V. Zhmur, O.G. Chkhetiani, «Structural Stability of 34 Composite Vortices and Its Application to Jupiter's Great Red Spot» // Russian Journal of Earth Sciences, 2026, 35 26. DOI https://doi.org/10.2205/2026es001163

Прочие публикации по теме диссертации:

1. 25.03.25. Shirshov Institute of Oceanology of Russian Academy of Sciences International conference "Theoretical and applied aspects of geophysical fluid dynamics" dedicated to Gregory Reznik on his 80th birthday and 55th anniversary of his scientific activity. "Нестационарная композитная модель Большого Красного Пятна Юпитера" Е.М. Аракелян, В.В. Жмур, О.Г. Чхетиани https://ocean.ru/en/index.php/arkhiv-dokumentatsii?download=92:proceedings-of-the-reznik-conference-abstracts-2025 стр. 9-10
2. 13-15.05.25. Институт Океанологии им. П.П. Ширшова XIX Международная научно-техническая конференция «Современные Методы И Средства Океанологических Исследований» «Композитная Вихревая Модель Большого Красного Пятна Юпитера» Аракелян Е.М., Жмур В.В., Чхетиани О.Г.

   https://www.elibrary.ru/item.asp?id=82407678&selid=82494665 стр. 140-142
3. 07-13.09.25. Москва—Санкт-Петербург The VII-th International Symposium "Topical Problems of Nonlinear Wave Physics" 2025. "Composite structure of Jupiter's Great Red Spot". Arakelyan, V. Zhmur, O.Chkhetiani https://nwp2025.physconf.org/api/files/all_abstracts_nwp-2025.pdf стр. 157
4. 27-29.11.25. МФТИ Научная конференция «Численное моделирование в механике сплошных сред» 2025. Посвящена 100-летию академика О. М. Белоцерковского. "Композитная структура Большого Красного Пятна Юпитера" Е.М. Аракелян, В.В. Жмур https://files.academic-belotserkovskii.ru/conference2025/tezisy2025.pdf стр. 54-55
5. 09-16.03.26 XX Всероссийская школа конференция молодых ученых «Проблемы механики: теория, эксперимент и новые технологии». Новосибирск, "Композитная структура Большого Красного Пятна Юпитера" Е.М. Аракелян https://conf.nsc.ru/files/styles/802850/Problemy_meckhaniki_2026_all.pdf стр. 9-10