Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»

На правах рукописи

Аракелян Екатерина Мовсесовна

МОДЕЛЬ КОМПОЗИТНОГО ВИХРЯ БОЛЬШОГО КРАСНОГО ПЯТНА ЮПИТЕРА

Специальность 1.6.18 —
«Науки об атмосфере и климате»

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
Д-р. физ.-мат. наук, член-корр. РАН, профессор
Жмур Владимир Владимирович

Москва - 2026

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОГЛАВЛЕНИЕ 2

ВВЕДЕНИЕ 3

ГЛАВА 1. СТАЦИОНАРНЫЙ ОДНОРОДНЫЙ ВИХРЬ В ФОНОВОМ ТЕЧЕНИИ 24

1.1 Постановка задачи стационарного вихря 24

ГЛАВА 2. СТАЦИОНАРНЫЙ КОМПОЗИТНЫЙ ВИХРЬ НА ФОНЕ БАРОТРОПНОГО ТЕЧЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМ СДВИГОМ 29

2.1 Математическая модель стационарного композитного вихря 29

2.2 Решение задачи стационарного композитного вихря 29

2.3 Особенности поведения Γ_1 и Γ_2 в зависимости от размера внутреннего вихря 37

2.4 Энергия композитного вихря 46

2.5 Задача о стационарном (основном) вихре 57

2.6 Результаты сравнения с натурными наблюдениями 69

2.7 Поведение слабого нестационарного вихря внутри ядра стационарного вихревого образования 70

ГЛАВА 3. СТАЦИОНАРНЫЙ ТРЕХ-КОМПОНЕНТНЫЙ КОМПОЗИТНЫЙ ВИХРЬ И СТРУКТРНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ 76

3.1 Постановка задачи стационарного композитного вихря 76

3.2 Решение задачи нестационарного композитного вихря. Структурная устойчивость 81

3.3 Траектория движения и деформация границы пробного вихря 95

ЗАКЛЮЧЕНИЕ 100

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 102

Введение

1. Актуальность темы исследования

Большое Красное пятно Юпитера (БКПЮ) представляет собой уникальное, экстремально долгоживущее мезомасштабное бароклинное вихревое образование, непрерывные инструментальные наблюдения за которым ведутся мировым астрономическим сообществом более трёх столетий. Согласно современным пространственным оценкам, базирующимся на высокоточных данных орбитальных телескопов и межпланетных космических зондов, средний продольный (зональный) размер БКПЮ в настоящее время составляет около 12–13 тысяч километров, а поперечный (меридиональный) размер оценивается в 10–11 тысяч километров. С момента начала непрерывных систематических астрономических наблюдений в середине XIX века, инициированных детализированными зарисовками У. Доуза в 1857 году, вихрь выдержал более 9600 собственных оборотов. При условии строгой исторической идентификации современного объекта с гигантским атмосферным штормом, зафиксированным выдающимися астрономами Джованни Кассини и Робертом Гуком в 1665–1666 годах, суммарное время его подтвержденной жизни превышает 21 000 времен полного оборота.

Для наглядной демонстрации фундаментальной аномальности этого гидродинамического явления целесообразно провести детальное сопоставление с динамикой крупномасштабных вихревых структур в геофизических оболочках Земли. Время жизни наиболее интенсивных тропических ураганов и тайфунов над океанической поверхностью Земли жестко лимитировано процессами придонного экмановского трения в планетарном пограничном слое, диссипацией кинетической энергии за счет турбулентной вязкости и, что наиболее критично, потерей мощного термодинамического источника скрытой теплоты фазовых переходов (конденсации водяного пара) при выходе системы на сушу или холодные воды. В результате земные атмосферные вихри существуют в среднем не более 3–5 оборотов до своей полной баротропной или бароклинной деградации.

Океанические мезомасштабные вихри, такие как изолированные внутритермоклинные линзы средиземноморских вод в Атлантическом океане (меди) или крупномасштабные ринги Гольфстрима и Куросио, физически изолированы от прямого фрикционного взаимодействия с океаническим дном и свободной поверхностью. Благодаря этому они демонстрируют значительно большую гидродинамическую устойчивость и способны существовать до 150–200 оборотов, вплоть до момента своего окончательного разрушения под действием дисперсии излучаемых планетарных волн Россби, фоновой мезомасштабной турбулентности и процессов топографического рассеяния. В резком

контрасте с земными условиями, глубокие непрерывно стратифицированные газовые оболочки планет-гигантов Солнечной системы порождают когерентные структуры поразительной стабильности: в настоящее время только в атмосфере Юпитера оптическими и инфракрасными методами каталогизировано более 200 устойчивых антициклонических и циклонических вихрей диаметром свыше 1000 км. Выявление точных термодинамических и макроскопических гидродинамических механизмов, обеспечивающих столь феноменальную устойчивость локализованных атмосферных структур на протяжении столетий в условиях интенсивного разрушительного фонового сдвига скорости, представляет собой одну из наиболее сложных, многогранных и актуальных фундаментальных проблем современной геофизической гидродинамики.

Большое Красное пятно выступает в качестве важнейшего природного макроскопического тест-объекта для верификации аналитических и сложных численных моделей бароклинной гидродинамики. Для корректного физико-математического описания долгосрочной эволюции этого мезомасштабного объекта необходимо с высочайшей степенью детализации учитывать специфические макроскопические условия планетарной атмосферы газового гиганта, которые радикально отличаются от параметров земной атмосферы как по своим пространственным масштабам, так и по термодинамическим и электродинамическим свойствам среды.

В первую очередь необходимо отметить роль гравитационного поля планеты. Юпитер обладает колоссальной массой, превышающей массу Земли в 318 раз ($M_J \approx 1.898 \cdot 10^{27}$ кг). Столь значительная масса обуславливает экстремально высокое ускорение свободного падения в видимом облачном слое (на условном изобарическом уровне давления 1 бар), составляющее $g \approx 24.79 \frac{м^2}{с}$. С фундаментальной гидродинамической точки зрения столь высокая гравитация кардинально меняет термодинамическую структуру и вертикальную стратификацию атмосферы. Согласно основному уравнению гидростатики ($\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$) и уравнению состояния идеального газа, барометрическая шкала высот однородной атмосферы (scale height), определяемая соотношением $H = \frac{RT}{\mu g}$ (где R — универсальная газовая постоянная, T — абсолютная температура, μ — молярная масса газовой смеси, состоящей преимущественно из молекулярного водорода и гелия), на Юпитере оказывается сравнительно небольшой. В тропосфере Юпитера она составляет всего около 20–27 км, несмотря на гигантские геометрические размеры самой планеты ($R_J \approx 71492$ км). Данный физический факт приводит к сверхжесткой вертикальной стратификации среды по плотности и локализует основную кинематику зональных течений

и самого Большого Красного пятна в тонком (относительно радиуса планеты) бароклинном слое. Именно это физическое условие делает математически строго обоснованным применение квазидвумерных и слоистых квазигеострофических моделей для описания вихря, продольный горизонтальный размер которого на несколько порядков превышает его эффективную вертикальную толщину.

Главным макроскопическим фактором, определяющим специфику глобальной атмосферной циркуляции планеты, является сверхбыстрое вращение Юпитера. Период обращения газового гиганта вокруг собственной оси составляет всего ≈9.92 часа, что соответствует огромной угловой скорости вращения $\Omega \approx 1.76 \cdot 10^{-4}$ рад/с. Столь стремительное вращение не только приводит к значительной геометрической сплюснутости планеты у полюсов, но и формирует колоссальные силы инерции (силу Кориолиса) в атмосферном потоке. Видимая поверхность Юпитера представляет собой высокоструктурированную, пространственно чередующуюся в меридиональном направлении систему светлых зон (областей восходящих потоков с адиабатическим охлаждением и формированием аммиачных перистых облаков) и тёмных поясов (областей нисходящих потоков с просветлением облачного покрова). На широтных границах этих термодинамических областей, вследствие процессов бароклинной неустойчивости и обратного энергетического каскада (переноса кинетической энергии от мелких вихревых структур к крупномасштабным потокам), формируются мощнейшие стабильные зональные струйные течения, линейные скорости которых могут превышать 150 м/с.

Большое Красное пятно локализовано в Южной тропической зоне, причем его геометрический центр располагается на стабильной широте $\varphi = 22°$ южной широты. Для данной планетоцентрической широты локальный параметр Кориолиса f, определяемый классическим кинематическим соотношением:

$$f = 2\Omega \sin \varphi$$

принимает значения порядка $1.3 \cdot 10^{-4}$ с$^{-1}$. Столь высокие абсолютные значения параметра Кориолиса приводят к тому, что крупномасштабные течения в атмосфере планеты находятся в состоянии строгого и стабильного геострофического баланса. Применимость квазигеострофической теории для аналитического описания динамики БКПЮ жестко лимитируется значением безразмерного локального числа Россби (Ro), характеризующего отношение нелинейных сил адвективной инерции к силам Кориолиса в уравнениях Навье-Стокса во вращающейся системе отсчета. При характерных средних линейных скоростях фоновых зональных течений $U \sim 100$ м/с и мезомасштабном

продольном размере БКПЮ $L{\sim}10^7$ м, локальное число Россби составляет величину порядка $Ro \approx 0.08 \div 0.14$. Выполнение строгого асимптотического неравенства $Ro \ll 1$ является фундаментальным, математически непререкаемым обоснованием корректности перехода от полной системы нелинейных дифференциальных уравнений термогидродинамики к упрощенным уравнениям квазигеострофического баланса. Более того, на рассматриваемых пространственных масштабах вихря ($L{\sim}10^4$ км) меридиональное изменение параметра Кориолиса, описываемое β-эффектом $\left(\beta = \frac{2\Omega\cos\varphi}{R_J}\right)$, оказывает вторичное, преимущественно дисперсионное влияние по сравнению с интенсивной внутренней сдвиговой кинематикой самого вихря и окружающих его струй. Это позволяет с высокой степенью аналитической точности проводить математическое моделирование в базовом приближении локальной f-плоскости ($f = const$), пренебрегая кривизной планеты в пределах площади вихря.

Другой фундаментальной особенностью Юпитера, определяющей глубинную кинематику вихревых течений, является наличие мощнейшего глобального магнитного поля, магнитный дипольный момент которого почти в 20000 раз превышает земной, а индукция поля на экваторе достигает 4.3 Гаусс. Физическая природа и механизмы генерации этого поля кроются в экстремальной термодинамике недр планеты. На огромных глубинах (порядка 0.8–0.9 радиуса Юпитера), где гидростатическое давление превосходит критическую отметку в 1.4 Мбар (140 ГПа), а температура превышает 5000 К, происходит квантово-механический фазовый переход Мотта. В этих условиях двухатомные молекулы водорода разрушаются под действием давления, и вещество переходит в состояние жидкого вырожденного металлического водорода. Данная фаза представляет собой плотную решетку протонов, погруженную в ферми-газ делокализованных электронов, что наделяет среду колоссальной, истинно металлической электропроводностью. В сочетании со сверхбыстрым вращением планеты и интенсивными внутренними конвективными потоками, транспортирующими остаточное тепло аккреции из недр к поверхности, в этом металлическом слое начинает эффективно работать механизм глобального гидромагнитного динамо.

Возникающее магнитное поле пронизывает всю толщу планеты. Долгие десятилетия считалось, что зональные течения Юпитера — это тонкое поверхностное метеорологическое явление. Однако прецизионные гравиметрические измерения и микроволновое зондирование, проведенные космическим аппаратом Juno в период с 2016 по 2024 годы, достоверно показали, что фоновые зональные течения, поддерживающие БКПЮ, в виде гигантских цилиндров уходят вглубь планеты вплоть до изобаты ≈ 3000 км

(до уровня давлений порядка 105 бар). На этих колоссальных глубинах происходит существенный рост термодинамической температуры, что ведет к интенсивной термической ионизации паров щелочных металлов. Атмосфера становится электропроводящей, и магнитное число Рейнольдса ($Re_m = \mu_0 \sigma_e UL$) превышает единицу. В результате взаимодействие движущегося электропроводящего газа с мощным вращающимся магнитным полем планеты порождает существенные пондеромоторные силы Лоренца:

$$F_m = J \times B$$

где J — плотность наведенного электрического тока, а B — вектор магнитной индукции. Возникающая при этом омическая диссипация кинетической энергии жестко тормозит зональные течения на глубине (явление магнитного торможения, или magnetic drag). Это магнитогидродинамическое трение действует подобно твердому океаническому дну на Земле, ограничивая глубину проникновения ветров. Таким образом, кинематика и профиль фонового сдвигового течения $U(y, z)$, в которое непосредственно погружено композитное ядро БКПЮ, является не случайным метеорологическим флуктуационным процессом, а прямым и детерминированным следствием строгого баланса между бароклинной неустойчивостью в верхних слоях и глубинной магнитогидродинамической диссипацией.

Традиционно в аналитических подходах геофизической гидродинамики БКПЮ рассматривалось как простой, изолированный эллипсоидальный вихрь с гомогенным (кусочно-постоянным и однородным) пространственным распределением потенциальной завихренности. Однако стремительное развитие методов дистанционного зондирования и алгоритмов обработки изображений продемонстрировало чрезвычайно сложную, многосвязную и гетерогенную структуру внутренних течений объекта. Достоверно установлено, что внешняя периферия вихря (так называемый ворот) характеризуется интенсивным высокоскоростным антициклоническим вращением с локальными линейными скоростями течений, достигающими 150–170 м/с, в то время как его обширная внутренняя центральная область демонстрирует устойчивую слабую циклоническую завихренность со скоростями вращения порядка 10–20 м/с, а также подвержена локальным конвективным процессам. Подобная резкая кинематическая дихотомия — мощное скоростное антициклоническое кольцо снаружи и локализованное циклоническое ядро внутри — обосновывает фундаментальную физическую и математическую неизбежность перехода от гомогенных моделей к моделям композитной (составной, многосвязной) вихревой структуры.

Актуальность настоящего диссертационного исследования определяется комплексом следующих фундаментальных и прикладных взаимосвязанных факторов:

1. **Необходимость глубокого теоретического обоснования аномальной устойчивости композитных структур.** Традиционные модели однородных по потенциальной завихренности вихрей принципиально ограничены в описании механизмов длительной стабилизации БКПЮ, так как не учитывают внутреннюю кинематику объекта. Переход к аналитическому исследованию композитной структуры позволяет математически выявить новые компенсационные механизмы динамической стабилизации, возникающие за счет перераспределения энергии и завихренности между вложенными вихревыми ядрами в условиях постоянного фонового сдвига.
2. **Развитие фундаментального аналитического аппарата геофизической гидродинамики.** Постановка и строгий поиск точного аналитического решения задачи о динамике системы вложенных софокусных эллипсоидальных вихрей в стратифицированной среде является нетривиальным математическим обобщением классической проблемы об эллипсоидальном вихре. Данное исследование существенно расширяет класс интегрируемых задач теории вихрей.
3. **Интерпретация современных массивов наблюдательных данных.** Для корректной физической интерпретации высокоточных кинематических, термодинамических и гравиметрических данных, непрерывно поступающих от орбитальной станции Juno, а также спектральных данных космического телескопа James Webb (JWST), критически необходима надежная теоретическая база. Эта база должна связывать поверхностные (видимые) двумерные поля скоростей с трехмерной глубинной структурой и распределением завихренности.
4. **Формулировка энергетических критериев отбора.** Сравнительный математический анализ функционалов полной механической энергии (включающих как кинетическую энергию горизонтальных движений, так и доступную потенциальную энергию) композитных и однородных моделей позволяет установить строгие критерии, которые необходимы для объяснения фундаментального принципа: почему физическая природа из бесконечного множества возможных решений уравнений гидродинамики реализует именно такие сложные композитные вихревые конфигурации.

2. Степень разработанности проблемы

Систематическое теоретическое осмысление физической природы и динамики Большого Красного пятна Юпитера неразрывно связано с поэтапным накоплением и сложной интерпретацией обширного массива высокоточных инструментальных данных, полученных в ходе реализации серии выдающихся межпланетных космических программ во второй половине XX и начале XXI веков. До начала эры космических полетов исследования БКПЮ строго ограничивались наземными оптическими телескопическими наблюдениями. Эти классические методы позволяли фиксировать лишь общую морфологию, цветовые вариации (вызванные фотохимическими реакциями фосфора, серы или органических соединений) и изменения планетоцентрических координат центра вихря, оставляя его внутреннюю мезомасштабную кинематику и глубинную структуру предметом исключительно теоретических спекуляций.

Фундаментальную наблюдательную основу для строгого физического понимания глобальной кинематики атмосферы Юпитера заложили исторические пролетные миссии аппаратов Pioneer 10 и 11 (1973–1974 гг.) и, в особенности, спаренная миссия Voyager-1 и Voyager-2 (1979 г.). Именно телевизионные камеры аппаратов Voyager, оснащенные узкополосными фильтрами, позволили впервые осуществить детальную покадровую оптическую съемку облачного покрова с беспрецедентно высоким на тот момент пространственным разрешением. На основе анализа смещения облачных элементов (feature tracking) по этим снимкам были построены первичные высоконадежные карты зональных фоновых потоков атмосферы Юпитера и оценена общая геометрия БКПЮ. Было математически строго доказано, что БКПЮ представляет собой гигантский антициклон, вращающийся против часовой стрелки в Южном полушарии и жестко локализованный (запертый) между двумя интенсивными разнонаправленными струйными течениями, обладающими значительным меридиональным сдвигом скорости.

Принципиальный концептуальный прорыв в понимании тонкой внутренней гетерогенной структуры БКПЮ был осуществлен благодаря долговременной, методичной и целенаправленной работе орбитального космического аппарата Galileo в системе Юпитера (1996–2009 гг.). Применение твердотельной цифровой камеры SSI (Solid State Imaging) и спектрометров ближнего инфракрасного диапазона позволило исследователям (что нашло отражение в пионерских работах Vasavada et al., 1998) выявить локальные поля ветра с беспрецедентно высоким пространственным (вплоть до 15–20 километров на пиксель) и временным разрешением. Важнейшим научным результатом этого наблюдательного этапа, кардинально перевернувшим классическое представление о БКПЮ как о гомогенном объекте, стало неоспоримое доказательство наличия внутреннего слабого

циклонического течения в самом геометрическом центре гигантского антициклона. Кроме того, пространственный анализ температурных полей выявил локальное понижение температуры над центром вихря, что является прямым гидродинамическим следствием процессов локального апвеллинга (адиабатического подъема воздушных масс и их охлаждения), формирующего плотную, оптически непрозрачную облачную крышку в центре пятна.

В дальнейшем, в начале 2000-х годов, применение сложных, вычислительно сверхъемких автоматизированных алгоритмов отслеживания перемещения облачных элементов к высококачественным оптическим данным аппарата Cassini (полученным во время его гравитационного маневра у Юпитера по пути к системе Сатурна) и к регулярным снимкам космического телескопа Hubble (HST) позволило построить сверхплотные эйлеровы сетки векторов скорости ветра. В масштабных и фундаментальных исследованиях Choi, Banfield и Gierasch (2007) итоговый массив данных включал колоссальный объем информации — до 30 000 независимых векторов скорости. Это дало возможность впервые с высокой математической точностью, путем численного дифференцирования поля скоростей, картировать не только само поле ветра, но и производное поле относительной завихренности. Полученные результаты окончательно подтвердили наличие обширного внутреннего противовращающегося циклонического ядра. Более того, алгоритмы зафиксировали наличие узкого, высокоинтенсивного кольца положительной (циклонической) завихренности, которое непосредственно примыкало к внешней периферии основного антициклонического струйного ворота, создавая эффект слоистой вихревой структуры. Использование усовершенствованного, робастного метода корреляционной велосиметрии с поправкой на адвекцию (Advection Corrected Correlation Image Velocimetry - ACCIV) в выдающихся работах Shetty и Marcus (2010) убедительно продемонстрировало долговременный кинематический тренд: сокращение площади аномалии завихренности БКПЮ составило около 18% в период с 1979 по 2006 год, при этом удивительным образом интегральная амплитуда потенциальной завихренности оставалась квазипостоянной во времени.

Начало современной эры в изучении Юпитера ознаменовалось выходом на полярную орбиту планеты в 2016 году межпланетной станции Juno. Данный аппарат, оснащенный передовым микроволновым радиометром (MWR) и высокоточными датчиками гравитационного поля (Gravity Science experiment), впервые в истории планетологии позволил «заглянуть» глубоко под видимый аммиачный облачный слой. Гравиметрические данные достоверно доказали, что БКПЮ не является тонким, плоским поверхностным образованием, а уходит вглубь стратифицированной атмосферы как

минимум на 300–500 км, полностью сохраняя при этом свою вихревую когерентную структуру. Это эпохальное наблюдение окончательно закрепило гидродинамический статус БКПЮ как мощного глубоководного бароклинного вихря и закрыло дискуссию о его исключительно двумерной (баротропной) природе.

В области теоретического математического моделирования динамики планетарных атмосфер исторически сформировались и развиваются два независимых, но синергетически взаимодополняющих методологических направления. Первое направление — прямое численное интегрирование полных нелинейных дифференциальных уравнений гидротермодинамики на высокопроизводительных вычислительных кластерах. Современные численные эксперименты (в частности, передовые трехмерные anelastic-модели, развиваемые в исследовательских группах Zhang и Marcus, 2024), которые корректно учитывают слабую термодинамическую сжимаемость среды, процессы стратификации и фазовые переходы, успешно демонстрируют принципиальную возможность формирования так называемых полых вихревых структур (hollow vortices). Численное интегрирование показывает, что изначально однородные по завихренности вихри в условиях сдвиговой кинематики атмосферы Юпитера с течением времени эволюционируют, формируя ярко выраженный локальный минимум потенциальной завихренности в своем геометрическом центре. Аналогичные качественные результаты были получены с использованием других специализированных планетарных гидродинамических кодов, таких как EPIC (Explicit Planetary Isentropic Coordinate model). Однако численные подходы, несмотря на их несомненную высокую пространственную разрешающую способность и способность генерировать фотореалистичные поля погодных структур, принципиально ограничены в своих возможностях по выявлению строгих аналитических инвариантов системы. Наличие сеточной вязкости, схемной диссипации и конечно-разностных аппроксимаций в численных кодах делает невозможным установление точных, замкнутых функциональных зависимостей между геометрическими, кинематическими и термодинамическими параметрами сложной вихревой системы в предельных состояниях.

Второе фундаментальное направление, к которому концептуально, методологически и математически принадлежит данная диссертационная работа, базируется на строгих методах аналитической геофизической гидродинамики. Классической математической основой здесь выступает элегантная задача, решенная С. Кидой (1981) о поведении двумерного эллиптического вихря с однородной завихренностью, помещенного в равнозавихренный фоновый сдвиговый поток. Впоследствии эта теория была существенно обобщена и расширена советской и российской школой гидродинамики на трехмерный

бароклинный стратифицированный случай. Строгая бароклинная аналитическая модель, не так давно предложенная и детально развитая в работах Суетина, Жмура и Чхетиани (2023), формализовала Большое Красное пятно как гомогенный, монолитный эллипсоидальный вихрь, локализованный на f-плоскости и погруженный в баротропный поток с постоянным горизонтальным сдвигом. Эта мощная теория позволила с высокой степенью достоверности аналитически реконструировать и теоретически предсказать эффективный вертикальный размер ядра БКПЮ (оказавшийся порядка 300 км), что впоследствии блестяще, с минимальной погрешностью, согласовывалось с независимыми гравиметрическими данными миссии Juno.

Тем не менее, следует критически признать, что данная базовая аналитическая теория принципиально ограничена своим исходным строгим математическим допущением об абсолютной пространственной однородности (гомогенности) поля потенциальной завихренности внутри замкнутого эллипсоидального объема. Вследствие этого фундаментального ограничения она математически не способна описать сложную, подтвержденную наблюдениями композитную кинематику БКПЮ, включающую интенсивный антициклонический ворот на периферии и внутреннее слабое циклоническое ядро. В мировой научной литературе концепция вложенных вихрей (nested vortices) активно дискутировалась на качественном и полуэмпирическом уровнях. Однако до настоящего времени строгая математическая постановка задачи для трехмерных бароклинных композитных эллипсоидальных структур (включающих софокусные вложенные ядра с противоположными по знаку потенциальными завихренностями), равно как и вывод точных алгебраических систем уравнений их связи, а также сложный интегральный расчет их суммарной полной механической энергии, оставались совершенно нереализованными. Именно этот явный, фундаментальный пробел в современных знаниях о физике мезомасштабных планетарных вихрей формирует широкое, обоснованное и крайне актуальное поле для проведения данного диссертационного исследования.

Существует достаточно много моделей, которые на сегодняшний момент эксплуатируются. Георгий Сергеевич Голицын впервые предположил, что это вихрь, оказался прав. Ниже приведен список работ уважаемых авторов, которые изучали БКПЮ. Он далеко не полный, но в нем представлены все основные направления изучения БКПЮ.

Теоретические Модели Большого Красного Пятна Юпитера:

- Тэйлоровская колонка: Hide1961; Ingersoll 1969
- Долгоживущий вихрь: Golitsyn 1970
- Квазигеострафическая бароклинная модель: Романова, Цейтлин

- Эллиптический вихрь с учетом экмановского трения: Шулейкин 1976
- Солитон на сдвиговом потоке: Maxworthy, Redekopp 1976; Петвиашвили 1980; Ларичев, Резник
- Солитон на сдвиговом потоке с учетом бароклинности: Beaumont 1980; Незлин 1981
- Вихрь Россби на тангенциальном разрыве: Волокитин, Красносельских 1981
- Статистическая механика, состояния с максимальной энтропией:
- Miller et al. 1992; Michele, Robert 1994; Bouchet, Sommeria 2002; Chavanis 2005
- Бароклинная модель БКПЮ: Суетин, Жмур, Чхетиани 2023

Последняя работа больше всех близка к нашей теме.

3. Объект и предмет исследования

Объект исследования — Большое Красное пятно Юпитера как уникальное долгоживущее мезомасштабное бароклинное вихревое образование, находящееся и эволюционирующее в условиях непрерывно стратифицированной вращающейся планетарной атмосферы.

Предмет исследования — математические и аналитические физические модели композитной (вложенной) структуры БКПЮ, разрабатываемые в рамках строгих ограничений квазигеострофического приближения на f-плоскости. В частности, предметом выступает кинематика, динамика и энергетика гидродинамической системы, объединяющей внешний крупномасштабный антициклонический вихрь и внутренний циклонический вихрь, как в строго стационарных, так и в эволюционирующих (нестационарных) конфигурациях.

4. Цель и задачи исследования

Целью диссертационной работы является разработка, детальное физико-математическое обоснование и комплексное аналитическое исследование бароклинной композитной модели Большого красного пятна Юпитера, представляющей собой систему квазигеострофических вложенных вихрей в стратифицированной атмосфере. Ключевой составляющей цели является количественная оценка и сравнительный анализ энергетической эффективности стационарных и нестационарных вихревых конфигураций для объяснения физических причин формирования наблюдаемой кинематики БКПЮ.

Для достижения поставленной фундаментальной цели были сформулированы и последовательно решались следующие **задачи**:

1. Выполнить математическую постановку гидродинамической задачи о композитном вихре в терминах закона сохранения потенциальной завихренности.
2. Получить точные аналитические решения для нелинейной модели стационарного композитного вихря, состоящего из двух софокусных эллипсоидальных ядер, помещенных в горизонтальное баротропное течение с постоянным сдвигом скорости и определить законы распределения потенциальных завихренностей в таком ядре.
3. Провести расчет полной механической энергии стационарной композитной вихревой системы, исследовать зависимость энергии от геометрических параметров вложенного вихря для условий исторических космических миссий. Применить подход для условий исторических космических миссий.
4. Разработать физико-математическую модель двухкомпонентного нестационарного композитного вихревого образования, состоящего из основного (доминирующего) вихря и возмущения в виде слабого вложенного вихря, не влияющего на форму границы доминирующего вихря.
5. Выполнить аналитическое исследование режимов поведения нестационарного внутреннего вихря - движения вложенного вихря как целого и определить типы деформации его границы.
6. Провести аналитическую оценку средней энергии нестационарного композитного вихря и определить диапазон физических параметров (в частности, значений относительной завихренности внутреннего вихря), при которых достигается минимум энергии системы.
7. Исследовать структурную устойчивость двухкомпонентного и мульти-компонентного композитных вихрей.

5. Научная новизна

Научная новизна диссертационного исследования подтверждается получением следующих оригинальных теоретических результатов:

1. Впервые предложена, математически строго формализована и решена аналитическая модель стационарного бароклинного композитного вихря, включающая два вложенных софокусных эллипсоидальных вихревых ядра. Получено точное решение нелинейной задачи в рамках квазигеострафического подхода на f-плоскости. В отличие от существующих классических теорий, получены точные соотношение, однозначно связывающие интенсивность потенциальных завихренностей обоих ядер с их геометрическими характеристиками и параметрами сдвига фонового течения.

2. Впервые математически доказана неизбежность циклонической природы внутреннего вложения в стационарной модели. Установлено, что условие стационарности системы на f-плоскости выполнимо исключительно при противоположном знаке завихренности внутреннего ядра по отношению к внешнему. При этом выявлен сингулярный характер вложения: интегральная завихренность внутреннего вихря остается конечной величиной даже при стремлении его объема к нулю.
3. Разработана новая математическая модель нестационарного бароклинного композитного вихря. Впервые доказано, что в условиях реальной циркуляции атмосферы Юпитера внутренний вихрь не подвержен деструктивному режиму неограниченного вытягивания в филамент. Аналитически определены параметры замкнутой эллиптической траектории, по которой перемещается геометрический центр вложенного вихря. В случае совпадения центров вихрей внутренний вихрь, оставаясь на месте, испытывает ограниченные деформации горизонтальных размеров.
4. Математически доказано, что композитный вихрь с нестационарным циклоническим вложением способен обладать меньшей суммарной механической энергией, чем полностью эквивалентный ему гомогенный вихрь. Это указывает на энергетическое предпочтение модели нестационарного композитного вихря перед однородным вихрем.
5. Впервые введено и рассмотрено понятие структурной устойчивости и неустойчивости применительно к стационарным композитным вихрям.

6. Теоретическая и практическая значимость

Значимость работы с позиций развития **теории** заключается в существенном обогащении и расширении математического аппарата современной геофизической гидродинамики. Классическое семейство точных решений задачи об изолированном эллипсоидальном вихре расширено на случай многосвязных (вложенных) пространственных доменов с кусочно-постоянным распределением потенциальной завихренности. Строгое математическое доказательство эффекта снижения интегральной энергии системы при отказе от геометрической стационарности внутреннего ядра формирует новую научную парадигму в теории устойчивости мезомасштабных планетарных вихрей.

Практическая значимость. В работе предложен новый класс точных решений уравнений геофизической гидродинамики, который применим не только к задачам

атмосферы Юпитера, но также актуален и для Земли. Полученные функциональные соотношения позволяют реконструировать скрытые глубинные поля скоростей и завихренностей внутри БКПЮ исключительно на основе поверхностных оптических наблюдений геометрии облачного покрова. Разработанный метод оценки энергетического бюджета применим для комплексной физической интерпретации высокоточных данных действующего аппарата Juno, а также планируемых межпланетных миссий (Europa Clipper, JUICE) к системам планет-гигантов. Математический аппарат моделей допускает прямую адаптацию для изучения внутриокеанических вихрей Земли и иных долгоживущих атмосферных структур (например, гексагонального вихря Сатурна).

Следует особо подчеркнуть, что предложенный в диссертации аналитический аппарат и само исследуемое явление — долгоживущие когерентные вихревые структуры с выраженной композитной (многосвязной) внутренней кинематикой — не являются исключительной особенностью атмосферы Юпитера. Аналогичные по физической природе образования широко представлены как в атмосфере, так и в океане Земли. В земной атмосфере к ним относятся, в частности, долгоживущие антициклоны и блокирующие вихри, внутритропические мезомасштабные вихри, а также полярные стратосферные вихри, обладающие сложной внутренней структурой течений. В Мировом океане композитные вихревые структуры реализуются в виде рингов Гольфстрима и Куросио, внутритермоклинных линз средиземноморских вод (меди), а также крупномасштабных субмезомасштабных вихрей, наблюдаемых в Северной Атлантике и Южном океане. Несмотря на различия в термодинамических условиях и параметрах стратификации, все эти объекты описываются в рамках единого квазигеострофического подхода и демонстрируют качественно сходные режимы эволюции: устойчивое ядро, окружённое интенсивным периферийным кольцом, нутационные колебания формы, движение центра по замкнутым траекториям. Это позволяет рассматривать разработанную модель не только как объяснение феномена Большого Красного пятна, но и как универсальный инструмент для анализа широкого класса долгоживущих вихревых структур в геофизических оболочках Земли и других планет.

7. Методология и методы исследования

Методологический фундамент диссертационного исследования жестко опирается на гидротермодинамические уравнения сплошных стратифицированных сред. Базовой математической абстракцией выступает квазигеострофическое приближение, физическая корректность которого обоснована экстремальной малостью числа Россби ($Ro \ll 1$) для

исследуемых течений. Модель строится в приближении f-плоскости (параметр Кориолиса $f = const$), что позволяет исключить дисперсию планетарных волн Россби, концентрируя внимание исключительно на локальной сдвиговой кинематике вихрей.

Эволюция поля течений полностью описывается скалярной функцией тока $\psi(x, y, z)$, которая связана с компонентами вектора горизонтальной скорости строгими геострофическими соотношениями:

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Для компенсации эффектов сильной стратификации атмосферы вводится преобразование координат с масштабированием вертикальной оси («растянутая координата»):

$$\tilde{z} = \frac{N}{f} z$$

Данное линейное преобразование позволяет свернуть сложный эллиптический оператор в классический трехмерный оператор Лапласа, сводя задачу нахождения полей скорости к интегрированию уравнения Пуассона:

$$\Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tilde{z}^2} = \sigma$$

Потенциальная завихренность σ внутри выделенных вихревых областей (внешнего и внутреннего ядер) аппроксимируется кусочно-постоянными значениями σ_1 и σ_2. Решение осуществляется мощным методом интегральных функций Грина. В этом формализме искомая функция тока выражается через объемные интегралы типа ньютоновского гравитационного потенциала от областей, содержащих завихренность.

Выбор строгой эллипсоидальной формы для вихревых ядер имеет определяющее методическое значение: он позволяет аналитически вычислить объемные интегралы, сводя их к однократным несобственным эллиптическим интегралам от алгебраических функций. В стационарной модели используется фундаментальное свойство софокусности эллипсоидов, которые генерируют внутри себя строго линейное поле индуцированных скоростей. Кинематическое граничное условие непротекания на границе:

$$\frac{dF(x, y, z)}{dt} = 0$$

сводится к замкнутой системе нелинейных алгебраических уравнений, напрямую связывающих геометрические полуоси a_i, b_i, c_i и интенсивности σ_i. В нестационарной модели успешно применяется метод асимптотического осреднения. Полная механическая энергия системы, включающая кинетическую энергию горизонтальных движений и доступную потенциальную энергию стратификации, вычисляется через интеграл от произведения функции тока на потенциальную завихренность по всему многосвязному объему вихревых ядер.

8. Положения, выносимые на защиту

1. Вихрь в квазигеострофическом приближении на f-плоскости композитный, состоящий из двух вложенных софокусных эллипсоидальных ядер, сохраняет стационарность только при строго противоположном знаке потенциальной завихренности внутреннего ядра по отношению к внешнему, доказанный аналитически. Полная интегральная механическая энергия такого стационарного образования, всегда превосходящая энергию эквивалентного однородного вихря без вложения.
2. Устойчивость однородного вихря к воздействию первоначально слабого вихря, возмущающего основной вихрь. При пренебрежимо малом воздействии внутреннего эллипсоидального вихря на границу внешнего стационарного вихря, внутренний вихрь остается локализованным образованием с ограниченной энергией: его центр движется по замкнутой эллиптической траектории с периодом порядка 6 земных суток, а форма испытывает ограниченные нутационные колебания или вращение.
3. Две разработанные модели — стационарная и нестационарная — качественно воспроизводят наблюдаемую кинематическую структуру Большого красного пятна Юпитера: мощное антициклоническое струйное течение на периферии (до 150–170 м/с) и зона слабого циклонического вращения во внутренней области (порядка 20 м/с).
4. Энергия композитного вихря с нестационарным вложением меньше, чем энергия однородного вихря и заметно меньше, чем энергия двухкомпонентного стационарного вихря. Среди двухкомпонентных моделей нестационарный вихрь энергетически более выгодный. Структурная неустойчивость двухкомпонентного вихря и структурная устойчивость композитных вихрей с большим количеством вложенных вихрей.

9. Степень достоверности результатов

Степень достоверности полученных в диссертационной работе результатов, теоретических выводов и аналитических решений обеспечивается строгой физической и математической постановкой задач, базирующейся на фундаментальных законах сохранения геофизической гидродинамики стратифицированных сред. В качестве основы используется апробированное и надежно зарекомендовавшее себя квазигеострофическое приближение, применение которого строго обосновано экстремальной малостью локального числа Россби ($Ro \ll 1$) для исследуемых крупномасштабных атмосферных течений Юпитера.

Достоверность разработанных математических моделей композитных вихревых структур подтверждается корректным применением классического аналитического аппарата математической физики (теории потенциала, метода интегральных функций Грина, свойств эллиптических интегралов) к решению трехмерного уравнения Пуассона с кусочно-постоянной правой частью. Решения для предельных частных случаев (в отсутствие внутреннего вложения) асимптотически точно переходят в известные классические решения задачи С. Киды и бароклинной модели эллипсоидального вихря, что подтверждает внутреннюю непротиворечивость предложенной теории.

Степень достоверности физических выводов о структуре, кинематике и энергетике Большого Красного пятна Юпитера дополнительно подтверждается высоким уровнем качественного и количественного согласования полученных аналитических результатов с обширным массивом независимых натурных инструментальных данных. В частности, теоретически рассчитанные профили скоростей, размеры зон циклонического и антициклонического вращения, а также оценки вертикального масштаба вихря надежно согласуются с результатами обработки оптических, инфракрасных и гравиметрических измерений, полученных в ходе реализации международных космических миссий Voyager-1,2, Galileo, Cassini, Hubble Space Telescope и межпланетной станции Juno. Достоверность результатов также подтверждается их успешной апробацией на профильных всероссийских и международных научных конференциях и публикацией основных положений исследования в ведущих рецензируемых научных изданиях, рекомендованных ВАК при Минобрнауки России.

10. Апробация результатов и публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в трех статьях в рецензируемых научных журналах, входящих в перечень ВАК и международные базы цитирования:

1. Аракелян Е.М., Жмур В.В., Чхетиани О.Г. Композитная структура Большого красного пятна Юпитера. Часть 1. Стационарная модель // Известия Российской академии наук. Физика атмосферы и океана. – 2026. – Т. 62, № 3. – С. 472-496. – DOI 10.7868/S3034648726030084
2. Аракелян Е.М., Жмур В.В., Чхетиани О.Г. Композитная структура Большого красного пятна Юпитера. Часть 2. Нестационарная модель // Известия Российской академии наук. Физика атмосферы и океана. – 2026. – Т. 62, № 4. – С. 658-678. – DOI 10.7868/S3034648726040095
3. E.M. Arakelyan, V.V. Zhmur, O.G. Chkhetiani, «Structural Stability of 34 Composite Vortices and Its Application to Jupiter’s Great Red Spot» // Russian Journal of Earth Sciences, 2026, 35 26. DOI https://doi.org/10.2205/2026es001163

Кроме того, материалы диссертации докладывались на следующих научных конференциях и семинарах:

- Физика атмосферы и климата (Кисловодск, 2026).
- Школа-конференция молодых учёных «Гидродинамика вихревых структур в атмосферах и океанах» (Санкт-Петербург, СПбПУ, 2025).
- 13-15.05.25. Институт Океанологии им. П.П.Ширшова XIX Международная научно-техническая конференция «Современные Методы И Средства Океанологических Исследований» «Композитная Вихревая Модель Большого Красного Пятна Юпитера» Аракелян Е.М., Жмур В.В., Чхетиани О.Г.
- 21.05.24. Институт Физики Атмосферы Конференция-семинар «Нелинейные задачи геофизической гидродинамики», посвященная памяти Н.Н. Романовой. «Композитная структура Большого Красного Пятна Юпитера» Е.М. Аракелян, В.В. Жмур, О.Г. Чхетиани.
- 25.03.25. Shirshov Institute of Oceanology of Russian Academy of Sciences International conference “Theoretical and applied aspects of geophysical fluid dynamics” dedicated to Gregory Reznik on his 80th birthday and 55th anniversary of his scientific activity. "Нестационарная композитная модель Большого Красного Пятна Юпитера" Е.М. Аракелян, В.В. Жмур, О.Г. Чхетиани

- 07-13.09.25. Москва—Санкт-Петербург The VII-th International Symposium "Topical Problems of Nonlinear Wave Physics" 2025. "Composite structure of Jupiter's Great Red Spot". Arakelyan, V. Zhmur, O.Chhetiani
- 22-26.09.25. Севастополь, Морской гидрофизический институт РАН IX Всероссийская конференция "Моря России: приоритеты, практика, прогноз", г. Севастополь, Морской гидрофизический институт РАН "Композитная модель Большого Красного Пятна Юпитера" Е.М. Аракелян, В.В. Жмур, О.Г. Чхетиани
- 27-29.11.25. МФТИ Научная конференция «Численное моделирование в механике сплошных сред» 2025. Посвящена 100-летию академика О. М. Белоцерковского. "Композитная структура Большого Красного Пятна Юпитера" Е.М. Аракелян, В.В. Жмур
- 09-16.03.26 XX Всероссийская школа конференция молодых ученых «Проблемы механики: теория, эксперимент и новые технологии». Новосибирск, "Композитная структура Большого Красного Пятна Юпитера" Е.М. Аракелян

Доклады на семинарах:

- ИО РАН (Москва)
- ИФА РАН (Москва)
- СПбГУ (Санкт-Петербург)
- СПбПУ (Санкт-Петербург)
- Отделение института океанологи в Санкт-Петербурге (Санкт-Петербург)
- МФТИ (Москва)
- МГУ (Москва)
- МГИ (Севастополь)

11. Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю, члену-корреспонденту РАН, д.ф.-м.н., профессору Жмуру Владимиру Владимировичу за интересную тему исследования, ценные советы и плодотворную совместную работу. Искреннюю благодарность автор выражает д.ф.-м.н. Репиной Ирине Анатольевне и д.ф.-м.н. Отто Гурамовичу Чхетиани за постоянную поддержку и помощь при работе над совместными проектами. Автор также выражает благодарность всем коллегам из ИФА РАН за плодотворную работу и дружественную атмосферу.

12. Структура и объём диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы и приложения. Общий объём диссертации составляет 109 страниц. Основной текст содержит 11 рисунков и 1 таблицу. Список литературы включает 105 наименований.

Во **Введении** представлены актуальность и степень разработанности темы исследования, основная цель исследования, поставленные задачи, методология и методы исследования, научная новизна, практическая и теоретическая значимость работы, основные защищаемые положения, степень достоверности полученных результатов, апробация результатов исследования, личный вклад автора и список опубликованных диссертантом работ.

В **Главе 1** излагается базовая квазигеострофическая теория стационарного однородного эллипсоидального вихря в стратифицированной атмосфере на f-плоскости.

В **Главе 2** описана задача стационарного композитного вихря, особенности поведения собственных завихренностей Γ_1 и Γ_2 двух вихря в зависимости от размера внутреннего вихря, приведены результаты сравнения с натурными наблюдениями и описано поведение слабого нестационарного вихря внутри ядра стационарного вихревого образования, приведена энергия композитного вихря.

В **Главе 3** строится модель нестационарного композитного вихря на фоне баротропного течения с постоянным сдвигом, исследуется структурная устойчивость композитных вихревых структур и поведение слабого пробного вихря внутри ядра стационарного вихревого образования. Описаны траектория движения и деформация границы пробного вихря. Энергия пробного вихря остаётся ограниченной: в режимах вращения и мутационных колебаний она периодически колеблется, а в режиме неограниченного вытягивания убывает до нуля. Формулируется вывод о том, что малые слабые вихри, помещённые в любую зону многокомпонентной композитной структуры, не могут привести к её неустойчивости.

В **Заключении** обобщаются результаты исследования, формулируются итоговые физические выводы и намечаются пути дальнейшего применения созданного аналитического аппарата к другим атмосферным структурам, таким как Овал BA и гигантские вихри Сатурна. Основные результаты работы состоят в следующем: установлена циклоническая природа внутреннего вложения в стационарном композитном вихре и его энергетическая избыточность по сравнению с однородным вихрем; показано, что нестационарный композитный вихрь с циклоническим вложением может обладать меньшей механической энергией, чем однородный вихрь; доказана структурная устойчивость двухкомпонентного вихря по отношению к возмущению его третьим вложенным вихрем; показана устойчивость многокомпонентной композитной структуры к

слабым пробным возмущениям. Отмечается, что предложенные модели качественно и количественно воспроизводят наблюдаемую кинематическую структуру БКПЮ — мощное антициклоническое струйное течение на периферии и выраженную зону слабого циклонического вращения во внутренней области.

Глава 1. Стационарный однородный вихрь в фоновом течении

1.1 Постановка задачи стационарного вихря

Будем рассматривать здесь квазигеострофическое приближение для вращающейся стратифицированной по плотности среды с постоянной частотой Вяйсяля-Брента в квазигеострофическом приближении. При малых числах Россби система уравнений движения сведется к уравнению для давления или функции тока, связанных между собой постоянным множителем. Уравнение для функции тока $\psi(x, y, z, t)$ (векторного потенциала Стокса) имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\Delta_h\psi + \frac{\partial}{\partial z}\frac{f^2}{N^2}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) + J_h\left(\psi, \Delta_h\psi + \frac{\partial}{\partial z}\frac{f^2}{N^2}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = 0 \qquad (1)$$

Здесь (x, y) горизонтальные координаты; z – вертикальная координата; t – время; $N = \text{const}$ – частота Вяйсяля-Брента; $f = const$ – параметр Кориолиса.

$\Delta_h = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа по горизонтальным координатам.

$J_h(A, B) = \frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial B}{\partial x}$ – определитель Якоби (якобиан).

Компоненты поля скорости (u, v, w) выражаются через функцию тока соответственно как

$$u = -\frac{\partial\psi}{\partial y}, v = \frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad w = -\frac{f}{N^2}\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial t\partial z} + J_h\left(\psi, \frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right] \qquad (2)$$

Уравнение (1) так же, как и соотношения (2) выписаны с погрешностью порядка числа Россби $\text{Ro} = \frac{U}{fL} \ll 1$ (U – характерная скорость изучаемого процесса, L – его характерный горизонтальный размер). Из уравнения (1) можно получить только геострофическую компоненту движения. Агеострофические движения при таком подходе появляются уже в следующем порядке по числу Россби и здесь не рассматриваются.

Физическая интерпретация уравнения (1) сводится к следующему – во время движения величина

$$\sigma = \Delta_h\psi + \frac{\partial}{\partial z}\frac{f^2}{N^2}\frac{\partial\psi}{\partial z} \qquad (3)$$

называемая потенциальной завихренностью, для движущихся жидких частиц сохраняется, т.е. является лагранжевым инвариантом. Лагранжев инвариант σ, представленный соотношением (3), также выписан с точностью до числа Россби. Следует

отметить, что $\Delta_h\psi = \mathrm{rot}_z\boldsymbol{u}$ и тогда справедлива еще одна запись для потенциальной завихренности

$$\sigma = \mathrm{rot}_z\boldsymbol{u} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{f^2}{N^2}\frac{\partial\psi}{\partial z} \qquad (3а)$$

При постоянных параметрах N и f (3) можно упростить, введя "растянутую" вертикальную координату $\tilde{z} = \frac{N}{f}z$. Здесь $\frac{N}{f}$ коэффициент растяжения. Тогда $\frac{\partial}{\partial z}\frac{f^2}{N^2}\frac{\partial\psi}{\partial z} = \frac{\partial^2\psi}{\partial\tilde{z}^2}$ и потенциальную завихренность частиц можно выразить через трехмерный лапласиан в растянутом по вертикали пространстве $(x, y, \tilde{z})$:

$$\sigma = \Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial\tilde{z}^2} \qquad (4)$$

Соотношение (4) описывает мгновенное распределение потенциальной завихренности в пространстве и его использование эффективно только в случае кусочно-постоянного распределения. В частности, в работах [Жмур, Панкратов, 1989; Meacham, 1992; Жмур, Щепеткин, 1991] исследован следующий случай

$$\Delta\psi = \begin{cases} \sigma_{\mathrm{in}}, \text{если } (x, y, \tilde{z}) \in V \\ \sigma_{\mathrm{out}}, \text{если } (x, y, \tilde{z}) \notin V \end{cases} \qquad (5)$$

Здесь σ_{in} и σ_{out} постоянные величины, V – замкнутая область вихревого ядра в пространстве $(x, y, \tilde{z})$. Ядро V может деформироваться и перемещать. σ_{in} – потенциальная завихренность частиц внутри ядра, а σ_{out} потенциальная завихренность частиц вне ядра. При отсутствии вихря наблюдается однородное распределение потенциальной завихренности во всем пространстве

$$\Delta\psi = \sigma_{\mathrm{out}} \qquad (6)$$

Это соотношение описывает фоновое течение. В нашем подходе фоновое течение представляет собой равнозавихренный поток. В частности, возможен случай покоящейся фоновой жидкости с $\sigma_{\mathrm{out}} = 0$. Из (6) решение уравнения $\psi = \psi_f(x, y, \tilde{z})$ представляет собой функцию тока фонового течения. Фоновое течение мы будем задавать, поэтому $\psi_f(x, y, \tilde{z})$ будем считать известной функцией.

В упомянутых работах [Жмур, Панкратов, 1989; Meacham, 1992; Жмур, Щепеткин, 1991] в качестве формы вихревого ядра V выбирался эллипсоид. Фоновые течения представляли собой баротропный равнозавихренный поток в [Жмур, Панкратов, 1989], и бароклинное горизонтальное течение с постоянным вертикальным сдвигом в работе [Жмур, Щепеткин 1991]. В [Meacham, 1992] фоновое течение отсутствовало. Во всех случаях вид фонового течения определял значение σ_{out}.

Отклонение от фонового течения, связанное с наличием вихря, описывается функцией тока ψ_v , для которой справедливо распределение

$$\Delta\psi_v = \begin{cases} (\sigma_{\text{in}} - \sigma_{\text{out}}), \text{если } (x, y, \tilde{z}) \in V \\ 0\,, \text{если } (x, y, \tilde{z}) \notin V \end{cases} \tag{7}$$

а общая функция тока запишется как

$$\psi = \psi_f + \psi_v \tag{8}$$

Задача (7) решается в общем случае для любой формы ядра V в пространстве $(x, y, \tilde{z})$:

$$\psi_v(x, y, \tilde{z}, t) = -\frac{\sigma}{4\pi}\iiint_V \frac{dx'dy'd\tilde{z}'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (\tilde{z}-\tilde{z}')^2}} \tag{9a}$$

При этом форма ядра может зависеть от времени как от параметра, $\sigma = \sigma_{\text{in}} - \sigma_{\text{out}} = \text{const}$ – возвышение потенциальной завихренности частиц ядра над потенциальной завихренностью частиц фонового течения. Важное свойство решения (9a) – непрерывность самой функции $\psi_v(x, y, \tilde{z}, t)$ и ее первых пространственных производных следуют из теории гравитационного потенциала [Тихонов, Самарский, 1977]. Непрерывность производных равносильна непрерывности поля горизонтальных геострофических скоростей. В то время как непрерывность функции тока равносильна непрерывности поля давления. Поэтому динамическое граничное условие на поверхности вихревого ядра выполняется автоматически при любой текущей форме и деформации вихревого ядра. В то время как кинематическое условие требует дополнительных ограничений на поведение вихрей.

С помощью соотношений (2) из (9a) можно получить компоненты геострофической скорости

$$u_v = -\frac{\partial\psi_v}{\partial y} = \frac{\sigma}{4\pi}\iiint_V \frac{(y-y')dx'dy'd\tilde{z}'}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (\tilde{z}-\tilde{z}')^2]^{3/2}} \tag{9b}$$

$$v_v = \frac{\partial\psi_v}{\partial x} = -\frac{\sigma}{4\pi}\iiint_V \frac{(x-x')dx'dy'd\tilde{z}'}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (\tilde{z}-\tilde{z}')^2]^{3/2}} \tag{9c}$$

Соотношения $(9b)$ и $(9c)$ справедливы для произвольной формы ядра. Однако в полученных соотношениях для общей формы ядра интегралы в общем случае не берущееся, кроме нескольких частных случаев, наиболее общим из которых является форма ядра в виде эллипсоида. Такая задача решена в упомянутых работах [Жмур, Панкратов, 1989; Meacham, 1992; Жмур, Щепеткин, 1991]. В частности, для баротропного фонового течения или его отсутствия в упомянутых работах было получено выражение для $\psi_v(x, y, \tilde{z}, t)$ в случае, когда два главных направления эллипсоида лежат в горизонтальной плоскости, а третье главное направление – вертикальное

$$\psi_v(x,y,\tilde{z},t)$$
$$= -\frac{1}{4}\sigma ab\tilde{c}\int_{\lambda}^{\infty}\left(1-\frac{\tilde{x}^2}{a^2+\mu}-\frac{\tilde{y}^2}{b^2+\mu}-\frac{\tilde{z}^2}{\tilde{c}^2+\mu}\right)\frac{d\mu}{\sqrt{(a^2+\mu)(b^2+\mu)(\tilde{c}^2+\mu)}} \quad (10)$$

Здесь a, b – горизонтальные полуоси эллипсоида, c – его вертикальная полуось, $\tilde{c} = \frac{N}{f}c$ – растянутая в $\frac{N}{f}$ раз вертикальная полуось, $\tilde{x}, \tilde{y}$ – горизонтальные оси координат, направленные по главным осям эллипсоида, $\tilde{z} = \frac{N}{f}z$ – растянутая в $\frac{N}{f}$ раз вертикальная ось системы координат. Нижний предел $\lambda(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$ в интеграле (10) – положительный корень кубического уравнения

$$\frac{\tilde{x}^2}{a^2+\lambda}+\frac{\tilde{y}^2}{b^2+\lambda}+\frac{\tilde{z}^2}{\tilde{c}^2+\lambda}=1 \quad (11)$$

Для пространства внутри ядра вплоть до его границы следует положить $\lambda = 0$. В покоящемся на бесконечности океане граница ядра вихря (его форма) проворачивается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью без деформации размеров осей. При этом внутренние частицы вихревого ядра обгоняют вращение формы. На фоне же равнозавихренного баротропного течения вихрь движется со скоростью фонового течения, приходящегося по его центру, одновременно вращается и деформируется, оставаясь эллипсоидом. Детали можно найти в [Жмур, Панкратов 1989; Жмур 2011; Жмур и др. 2023]. В этих же работах показано, что существует только три типа эволюции формы ядра вихря - вращение с ограниченной деформацией, нутационные колебания с ограниченной деформацией и неограниченное вытягивание ядра вихря. Наиболее детально этот вопрос описан в работе [Жмур и др. 2023]. В этих же работах показано, что существуют параметры вихря, при которых форма вихря застывает в фоновом течении – не вращается и не деформируется, хотя движение частиц присутствует. Это так называемый стационарный вихрь.

Горизонтальное поле скорости, соответствующее функции тока от эллипсоидального вихря (10) представлено ниже в тех же координатах

$$u_v = -\frac{\sigma}{2}ab\tilde{c}\int_{\lambda}^{\infty}\frac{d\mu}{(b^2+\mu)\sqrt{(a^2+\mu)(b^2+\mu)(\tilde{c}^2+\mu)}}\tilde{y} \quad (12a)$$

$$v_v = \frac{\sigma}{2}ab\tilde{c}\int_{\lambda}^{\infty}\frac{d\mu}{(a^2+\mu)\sqrt{(a^2+\mu)(b^2+\mu)(\tilde{c}^2+\mu)}}\tilde{x} \quad (12b)$$

Обратим внимание на следующий факт - внутри ядра вихря вплоть до его границы $\lambda = 0$ и, следовательно, индуцированные вихрем скорости (12) линейны по горизонтальным координатам. При этом функция тока ψ_v , согласно (10) – квадратичная

функция по тем же координатам. Вне вихря $\lambda > 0$ и , если находиться на поверхности $\lambda = \text{const} > 0$, то свойство линейности поля скорости по горизонтальным координатам сохраняется. Аналогично на этой поверхности функция тока ψ_v также квадратичная функция. Ответим на вопрос: “Что же представляет собой поверхность $\lambda = const > 0$?” Вернемся к уравнению (11). Очевидно, что поверхность $\lambda = const > 0$ соответствует поверхности эллипсоида с полуосями $(A, B, \tilde{C})$, где $A^2 = a^2 + \lambda$, $B^2 = b^2 + \lambda$, $\tilde{C}^2 = \tilde{c}^2 + \lambda$. Т.е. старый эллипсоид с полуосями $(a, b, \tilde{c})$ находится внутри нового эллипсоида с полуосями $(A, B, \tilde{C})$, причем главные направления обоих эллипсоидов совпадают и, что самое важное, их фокусы тоже совпадают. Другими словами, рассматриваемые два эллипсоида со свойством $\lambda = const$– софокусные. При $\lambda = const < 0$ эллипсоид с полуосями $(A, B, \tilde{C})$ окажется внутри эллипсоида с полуосями $(a, b, \tilde{c})$. Признаком софокусности эллипсоидов служит следующее свойство – разница квадратов расстояний между поверхностями эллипсоидов вдоль всех трех главных направлений совпадают благодаря равенству

$$\lambda = A^2 - a^2 = B^2 - b^2 = \tilde{C}^2 - \tilde{c}^2 \qquad (13)$$

На временах порядка нескольких земных лет Красное пятно Юпитера можно рассматривать как вихрь с застывшей формой ядра на фоне баротропного горизонтального течения со сдвигом. Малые времена – характерное время оборота частицы в вихре. Большие времена – это время деформации ядра вихря. За более чем 350 лет наблюдения за БКПЮ вихрь медленно деформировался, уменьшаясь в размерах. На временах порядка от года до десяти лет деформацией можно пренебречь и считать вихрь стационарным. В таком походе БКПЮ изучалось в работе [Суетин и др., 2023], где полагалось, что ядро вихря заполнено равнозавихренными (в смысле потенциальной завихренности) частицами. Модернизируем наш подход.

ГЛАВА 2. СТАЦИОНАРНЫЙ КОМПОЗИТНЫЙ ВИХРЬ НА ФОНЕ БАРОТРОПНОГО ТЕЧЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМ СДВИГОМ

2.1 Математическая модель стационарного композитного вихря

Положим, что ядро вихря состоит из двух вложенных в друг друга вихрей с потенциальными завихренностями: σ_1 (внешний, большой вихрь, назовем σ_1 собственной потенциальной завихренностью внешнего или основного вихря), σ_2 (внутренний , малый вихрь, по аналогии назовем σ_2 собственной потенциальной завихренностью внутреннего или вложенного вихря). Оба вихря, вложенные в друг друга, одновременно находятся в фоновом течении и с потенциальной завихренностью σ_f. Обозначим также V_1 – множество точек, занимаемое ядром большого вихря; V_2 – аналогичное множество точек ядра малого (вложенного) вихря. Напоминаем, что множество V_2 полностью содержится в множестве V_1 : $V_2 \subset V_1$. Зазор между поверхностями внутреннего и внешнего эллипсоидов обозначим $V_1 \cap V_2$. В результате получим следующее распределение потенциальной завихренности в пространстве

$$\Delta\psi = \begin{cases} \left(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_f\right), \text{если точка } (x, y, \tilde{z}) \text{попадает в область } V_2 \\ (\sigma_1 + \sigma_f), \quad \text{если точка } (x, y, \tilde{z}) \text{ попадает в область } V_1 \cap V_2 \\ \sigma_f, \quad \text{если точка } (x, y, \tilde{z}) \text{ окажется вне области } V_1 \end{cases} \tag{14}$$

Подчеркнем, что рассматриваемое математическое пространство $(x, y, \tilde{z})$ растянуто по вертикали в $\frac{N}{f}$ раз по сравнению с обычным физическим пространством (x, y, z) . Далее система (13) будет нами использована как математическая постановка задачи, в которой требуется определить функцию тока $\psi(x, y, \tilde{z})$ во всем пространстве.

Здесь мы выбрали направления горизонтальных осей (x, y), совпадающее с направлением главных осей эллипсоидов. Вообще говоря, постановка задачи (14) не требует эллипсоидальной формы ядер и подходит для двух любых односвязанных и вложенных в друг друга объемов в качестве вихревых ядер. Этим свойством мы воспользуемся позже.

2.2 Решение задачи стационарного композитного вихря

В силу линейности задачи (14) разобьём задачу на три составляющих

$$\psi = \psi_f + \psi_1 + \psi_2 \tag{15}$$

где ψ_f – описывает фоновое течение и подчиняется уравнению (6) во всем пространстве

$$\Delta\psi_f = \sigma_{\text{out}}\,. \tag{16}$$

Фоновое течение мы будем задавать.

ψ_1 – описывает большой вихрь и подчиняется уравнению

$$\Delta\psi_1 = \begin{cases}\sigma_1, \text{если } (x,y,\tilde{z}) \in V_1\\ 0\,, \text{если } (x,y,\tilde{z}) \notin V_1\end{cases} \tag{17}$$

Потенциальная завихренность σ_1 является собственной потенциальной завихренностью вихря №1. Решение задачи (17) для эллипсоидальной формы ядра $F_1(x,y,\tilde{z}) = \frac{x^2}{{a_1}^2} + \frac{y^2}{{b_1}^2} + \frac{\tilde{z}^2}{{\tilde{c}_1}^2} - 1 = 0$ для любой точки пространства $(x,y,\tilde{z})$ следует из соотношения (10)

$$\Delta\psi_f = \sigma_{\text{out}}\,.\,\psi_1(x,y,\tilde{z},t) = -\frac{1}{4}\sigma_1 a_1 b_1 \tilde{c}_1 \int\limits_{\lambda_1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{{a_1}^2+\mu} - \frac{y^2}{{b_1}^2+\mu} - \frac{\tilde{z}^2}{{\tilde{c}_1}^2+\mu}\right)\frac{d\mu}{\sqrt{({a_1}^2+\mu)({b_1}^2+\mu)({\tilde{c}_1}^2+\mu)}} \tag{17}$$

Параметр λ_1 для внутренних к области V_1 равен нулю $\lambda_1 = 0$. Для внешних к V_1 точек λ_1 определяется следующим образом: выбранная внешняя точка $(x,y,\tilde{z})$ лежит на поверхности одного из софокусных с эллипсоидов, которому соответствует $\lambda_1 > 0$, подчиняющееся уравнению

$$\frac{x^2}{{a_1}^2+\lambda_1} + \frac{y^2}{{b_1}^2+\lambda_1} + \frac{\tilde{z}^2}{{\tilde{c}_1}^2+\lambda_1} = 1 \tag{18}$$

Софокусные эллипсоиды с $\lambda_1 = const > 0$ назовем виртуальными.

ψ_2 – описывает малый вихрь и подчиняется аналогичному (17) распределению

$$\Delta\psi_2 = \begin{cases}\sigma_2, \textit{если } (x,y,\tilde{z}) \in V_2\\ 0\,, \textit{если } (x,y,\tilde{z}) \notin V_2\end{cases} \tag{19}$$

Решение (20) полностью повторяет рассуждения для большого вихря, решение для которого представлено ниже

$$\psi_2(x,y,\tilde{z},t) = -\frac{1}{4}\sigma_2 a_2 b_2 \tilde{c}_2 \int\limits_{\lambda_2}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{{a_2}^2+\mu} - \frac{y^2}{{b_2}^2+\mu} - \frac{\tilde{z}^2}{{\tilde{c}_2}^2+\mu}\right)\frac{d\mu}{\sqrt{({a_2}^2+\mu)({b_2}^2+\mu)({\tilde{c}_2}^2+\mu)}} \tag{20}$$

Аналогично σ_2 – является собственной потенциальной завихренностью вихря №2. Как и для первого вихря параметр λ_2 для внутренних к области V_2 равен нулю $\lambda_2 = 0$. Для внешних к V_2 точек λ_2 определяется аналогичным образом: выбранная внешняя точка

$(x, y, \tilde{z})$ лежит на поверхности одного из софокусных эллипсоидов, которому соответствует $\lambda_2 > 0$, подчиняющееся уравнению

$$\frac{x^2}{{a_2}^2 + \lambda_2} + \frac{y^2}{{b_2}^2 + \lambda_2} + \frac{\tilde{z}^2}{{\tilde{c}_2}^2 + \lambda_2} = 1 \tag{21}$$

Поскольку все рассматриваемые эллипсоиды софокусные, то для выбранной точки оба виртуальных эллипсоида совпадают, что связывает λ_1 и λ_2 соотношениями

$${a_1}^2 + \lambda_1 = {a_2}^2 + \lambda_2 \ , \ {b_1}^2 + \lambda_1 = {b_2}^2 + \lambda_2 \ , \ {\tilde{c}_1}^2 + \lambda_1 = {\tilde{c}_2}^2 + \lambda_2 \tag{22}$$

Поскольку внешний эллипсоид больше внутреннего, т.е. $a_1 > a_2$, $b_1 > b_2$ и $\tilde{c}_1 > \tilde{c}_2$, то $\lambda_2 > \lambda_1$.

Поле скоростей, индуцированное вихрем №1 (внешним) и №2 (внутренним) также легко вычисляются. Для удобства введем дополнительные обозначения

$$\alpha_0 = ab\tilde{c} \int_0^\infty \frac{d\mu}{(a^2+\mu)\sqrt{(a^2+\mu)(b^2+\mu)(\tilde{c}^2+\mu)}} = K \int_0^\infty \frac{d\mu}{(\varepsilon+\mu)\sqrt{(\varepsilon+\mu)(\varepsilon^{-1}+\mu)(K^2+\mu)}} \tag{23a}$$

$$\beta_0 = ab\tilde{c} \int_0^\infty \frac{d\mu}{(b^2+\mu)\sqrt{(a^2+\mu)(b^2+\mu)(\tilde{c}^2+\mu)}} = K \int_0^\infty \frac{d\mu}{(\varepsilon^{-1}+\mu)\sqrt{(\varepsilon+\mu)(\varepsilon^{-1}+\mu)(K^2+\mu)}} \tag{23b}$$

$$\alpha_\lambda = ab\tilde{c} \int_\lambda^\infty \frac{d\mu}{(a^2+\mu)\sqrt{(a^2+\mu)(b^2+\mu)(\tilde{c}^2+\mu)}} = K \int_{\lambda'}^\infty \frac{d\mu}{(\varepsilon+\mu)\sqrt{(\varepsilon+\mu)(\varepsilon^{-1}+\mu)(K^2+\mu)}} \tag{23c}$$

$$\beta_\lambda = ab\tilde{c} \int_\lambda^\infty \frac{d\mu}{(b^2+\mu)\sqrt{(a^2+\mu)(b^2+\mu)(\tilde{c}^2+\mu)}} = K \int_{\lambda'}^\infty \frac{d\mu}{(\varepsilon^{-1}+\mu)\sqrt{(\varepsilon+\mu)(\varepsilon^{-1}+\mu)(K^2+\mu)}} \tag{23d}$$

$$\chi_0 = ab\tilde{c} \int_0^\infty \frac{d\mu}{\sqrt{(a^2+\mu)(b^2+\mu)(\tilde{c}^2+\mu)}} = abK \int_0^\infty \frac{d\mu'}{\sqrt{(\varepsilon+\mu')(\varepsilon^{-1}+\mu')(K^2+\mu')}} \tag{23e}$$

$$\chi_\lambda = ab\tilde{c}\int_\lambda^\infty \frac{d\mu}{\sqrt{(a^2+\mu)(b^2+\mu)(\tilde{c}^2+\mu)}} = abK\int_\lambda^\infty \frac{d\mu'}{\sqrt{(\varepsilon+\mu')(\varepsilon^{-1}+\mu')(K^2+\mu')}} \quad (23f)$$

$$\chi_0' = K\int_0^\infty \frac{d\mu'}{\sqrt{(\varepsilon+\mu')(\varepsilon^{-1}+\mu')(K^2+\mu')}} \quad (23g)$$

$$\chi_{\lambda'}' = K\int_{\lambda'}^\infty \frac{d\mu'}{\sqrt{(\varepsilon+\mu')(\varepsilon^{-1}+\mu')(K^2+\mu')}} \quad (23h)$$

Все указанные функции безразмерные, здесь мы приводим обе записи – в размерном и безразмерном виде. Левая колонка формул (23) – это размерная запись, правая безразмерная. В безразмерной записи появились новые безразмерные параметры вихря $\varepsilon = \frac{a}{b}$ – параметр горизонтальной вытянутости и $K = \frac{\tilde{c}}{\sqrt{ab}}$ – параметр вертикального растяжения вихревого ядра. Кроме того, в безразмерной записи появился нижний безразмерный предел $\lambda' = \frac{\lambda}{ab}$, который является положительным корнем безразмерного уравнения (11), приведенного ниже:

$$\frac{x'^2}{\varepsilon+\lambda'} + \frac{y'^2}{\varepsilon^{-1}+\lambda'} + \frac{\tilde{z}'^2}{K^2+\lambda'} = 1, \qquad где\ (x'y'\tilde{z}') = \frac{(x,y,\tilde{z})}{\sqrt{ab}} \quad (24)$$

$(x'y'\tilde{z}')$ – безразмерные координаты точки $(x,y,\tilde{z})$. В терминах функций (23) поле скорости записывается в виде (здесь удобна размерная форма записи)

$$u = -\frac{1}{2}\sigma\beta_\lambda \cdot y \quad (25a)$$

$$v = \frac{1}{2}\sigma\alpha_\lambda \cdot x \quad (25b)$$

Последние функции из (23) χ_0 и χ_λ имеет размерность L^2 . Связь размерных χ_0 и χ_λ и безразмерных представлений этих функций χ_0' и $\chi_{\lambda'}'$следующая $\chi_0 = ab\chi_0'$ и $\chi_\lambda = ab\chi_{\lambda'}'$.В БКПЮ вихрь вытянут в восточно-западном направлении по параллели, поэтому ось x удобно направить на восток, ось y на север. Одновременно это будут главные направления эллипсоида №1. При таком выборе координат фоновое течение в виде горизонтального баротропного потока со сдвигом представляется соотношениями

$$u_f = -\Gamma y$$

$$v_f = 0 \quad (26)$$

Поскольку у нас два вихря, то соотношения (23) нужно пронумеровать. Для вихря №1 с полуосями $(a_1, b_1, \tilde{c}_1)$, потенциальной завихренностью σ_1 и уравнением границы

$F_1(x,y,\tilde{z}) = \frac{x^2}{{a_1}^2} + \frac{y^2}{{b_1}^2} + \frac{\tilde{z}^2}{{\tilde{c}_1}^2} - 1 = 0$ параметры α_0 , β_0 , α_λ , β_λ обозначим как $\alpha_0^{(1)}$, $\beta_0^{(1)}$, $\alpha_\lambda^{(1)}$, $\beta_\lambda^{(1)}$. Аналогично для вихря №2 с полуосями $(a_2, b_2, \tilde{c}_2)$, потенциальной завихренностью σ_2 и уравнением границы $F_2(x,y,\tilde{z}) = \frac{x^2}{{a_2}^2} + \frac{y^2}{{b_2}^2} + \frac{\tilde{z}^2}{{\tilde{c}_2}^2} - 1 = 0$ введем обозначения $\alpha_0^{(2)}$, $\beta_0^{(2)}$, $\alpha_\lambda^{(2)}$, $\beta_\lambda^{(2)}$. В данном случае более удобно пользоваться размерными соотношениями.

В результате поле скорости на границе внешнего ядра №1 будет представляться суммой течений от трех источников – фонового течения (26) и течений, индуцированных вихрем №1

$$u_1 = -\frac{1}{2}\sigma_1\beta_0^{(1)} \cdot y, \;\; v_1 = \frac{1}{2}\sigma_1\alpha_0^{(1)}x \tag{27}$$

и вихрем №2. Причем от вихря №2 течение индуцировано во внешней к ядру №2 зоне

$$u_2 = -\frac{1}{2}\sigma_2\beta_\lambda^{(2)} \cdot y\,, \;\; v_2 = \frac{1}{2}\sigma_2\alpha_\lambda^{(2)}x \tag{28}$$

Течение (28) от малого вихря линейно по координатам на границе вихря №1 благодаря свойству софокусности с вихрем №1.

Окончательное суммарное течение на границе большого вихря (вихрь №1) тоже линейно по горизонтальным координатам

$$u = u_f + u_1 + u_2 = -(\Gamma + \frac{1}{2}\sigma_1\beta_0^{(1)} + \frac{1}{2}\sigma_2\beta_\lambda^{(2)})y$$
$$v = v_f + v_1 + v_2 = \left(\frac{1}{2}\sigma_1\alpha_0^{(1)} + \frac{1}{2}\sigma_2\alpha_\lambda^{(2)}\right)x \tag{29}$$

Координаты (x,y) переменные и соответствуют границе ядра вихря №1. Напоминаем, что приведенные соотношения (29) удовлетворяют основному уравнению (1) и динамическому условию на границе внешнего ядра. Однако они еще не удовлетворяют кинематическому условию на этой же границе. Запишем уравнение границы вихря №1 в общем виде $F_1(x,y,\tilde{z},t) = 0$. Тогда кинематическое условие непротекания частиц жидкости через границу запишется в виде

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} + u\frac{\partial F_1}{\partial x} + v\frac{\partial F_1}{\partial y} + w\frac{\partial F_1}{\partial z} = 0 \tag{30}$$

Причем, слагаемое $w\frac{\partial F_1}{\partial z}$ в этом уравнении мало по сравнению со слагаемыми $u\frac{\partial F_1}{\partial x}$ и $v\frac{\partial F_1}{\partial y}$. Отношение $w\frac{\partial F_1}{\partial z}$ к вышеупомянутым членам уравнения (30) порядка числа Россби $R_O \ll 1$ и его следует рассматривать как несущественную добавку к упрощенному граничному условию

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} + u\frac{\partial F_1}{\partial x} + v\frac{\partial F_1}{\partial y} = 0 \tag{31}$$

С таким кинематическим условием (31) все уравнения задачи выписаны с одинаковой точностью до слагаемых порядка $R_O \ll 1$. Теперь конкретизируем уравнение границы $F_1(x, y, \tilde{z}, t) = 0$:

$$F_1(x, y, \tilde{z}) = \frac{x^2}{{a_1}^2} + \frac{y^2}{{b_1}^2} + \frac{\tilde{z}^2}{{\tilde{c}_1}^2} - 1 = 0 \tag{32}$$

Очень важное предположение, что эта граница стационарна, т.е. от времени t не зависит. С учетом $\frac{\partial F_1}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{2x}{{a_1}^2}$, $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{2y}{{b_1}^2}$, используя (29), получим кинематическое условие

$$\left\{-\frac{1}{{a_1}^2}\left(2\Gamma + \sigma_1\beta_0^{(1)} + \sigma_2\beta_\lambda^{(2)}\right) + \frac{1}{{b_1}^2}\left(\sigma_1\alpha_0^{(1)} + \sigma_2\alpha_\lambda^{(2)}\right)\right\} \cdot xy = 0, \tag{33}$$

где координаты (x, y) переменны и соответствуют координатам границы внешнего вихря. В таком случае кинематическим условием на границе вихря №1 является соотношение

$$\frac{1}{{a_1}^2}\left(2\Gamma + \sigma_1\beta_0^{(1)} + \sigma_2\beta_\lambda^{(2)}\right) + \frac{1}{{b_1}^2}\left(\sigma_1\alpha_0^{(1)} + \sigma_2\alpha_\lambda^{(2)}\right) = 0, \tag{34}$$

или в более удобном представлении

$$\sigma_1\left(-\frac{\beta_0^{(1)}}{{a_1}^2} + \frac{\alpha_0^{(1)}}{{b_1}^2}\right) + \sigma_2\left(-\frac{\beta_\lambda^{(2)}}{{a_1}^2} + \frac{\alpha_\lambda^{(2)}}{{b_1}^2}\right) = \frac{2\Gamma}{{a_1}^2} \tag{35}$$

Аналогичные рассуждения для границы внутреннего вихря №2 дадут похожее на (35) соотношение

$$\sigma_1\left(-\frac{\beta_0^{(1)}}{{a_2}^2} + \frac{\alpha_0^{(1)}}{{b_2}^2}\right) + \sigma_2\left(-\frac{\beta_0^{(2)}}{{a_2}^2} + \frac{\alpha_0^{(2)}}{{b_2}^2}\right) = \frac{2\Gamma}{{a_2}^2} \tag{36}$$

В результате совместное кинематическое условие (35) и (36) на двух границах вихрей составляют систему уравнений на параметры вихрей

$$\begin{cases} \sigma_1\left(-\frac{\beta_0^{(1)}}{{a_1}^2} + \frac{\alpha_0^{(1)}}{{b_1}^2}\right) + \sigma_2\left(-\frac{\beta_\lambda^{(2)}}{{a_1}^2} + \frac{\alpha_\lambda^{(2)}}{{b_1}^2}\right) = \frac{2\Gamma}{{a_1}^2} \\ \sigma_1\left(-\frac{\beta_0^{(1)}}{{a_2}^2} + \frac{\alpha_0^{(1)}}{{b_2}^2}\right) + \sigma_2\left(-\frac{\beta_0^{(2)}}{{a_2}^2} + \frac{\alpha_0^{(2)}}{{b_2}^2}\right) = \frac{2\Gamma}{{a_2}^2} \end{cases} \tag{37}$$

Введя безразмерные потенциальные завихренности вихрей №1 и №2 с помощью соотношений

$$\Gamma_1 = \frac{\sigma_1}{\Gamma} \quad \Gamma_2 = \frac{\sigma_2}{\Gamma} \tag{38}$$

систему (37) можно представить в безразмерном виде

$$\begin{cases}\Gamma_1\left(-\beta_0^{(1)}+\varepsilon_1^2\alpha_0^{(1)}\right)+\Gamma_2\left(-\beta_\lambda^{(2)}+\varepsilon_1^2\alpha_\lambda^{(2)}\right)=2\\ \Gamma_1\left(-\beta_0^{(1)}+\varepsilon_2^2\alpha_0^{(1)}\right)+\Gamma_2\left(-\beta_0^{(2)}+\varepsilon_2^2\alpha_0^{(2)}\right)=2\end{cases} \quad (38)$$

Если бы внутренний вихрь полностью отсутствовал, то второе условие из (35) не потребовалось бы. Первое уравнение из (38) при этом дает решение в виде относительной завихренности ядра

$$\Gamma_1=\Gamma_1^{(0)}=\frac{2}{-\beta_0^{(1)}+\varepsilon_1^2\alpha_0^{(1)}} \quad (39)$$

без внутреннего вихря. Именно такая задача в подобной постановке, но с другим способом решения, изучалась в работе [Суетин и др., 2023]. Будем рассматривать $\Gamma_1^{(0)}$ из (39) как некоторое опорное решение, с которым будем сравнивать решение системы (38), приведенное ниже

$$\Gamma_1=\frac{2\left(\beta_0^{(2)}-\beta_\lambda^{(2)}+\varepsilon_1^2\alpha_\lambda^{(2)}-\varepsilon_2^2\alpha_0^{(2)}\right)}{\left(-\beta_0^{(1)}+\varepsilon_1^2\alpha_0^{(1)}\right)\left(\beta_0^{(2)}-\beta_\lambda^{(2)}+\varepsilon_1^2\alpha_\lambda^{(2)}-\varepsilon_2^2\alpha_0^{(2)}\right)+(\varepsilon_2^2-\varepsilon_1^2)\alpha_0^{(1)}\left(-\beta_\lambda^{(2)}+\varepsilon_1^2\alpha_\lambda^{(2)}\right)} \quad (40a)$$

$$\Gamma_2=\frac{2(\varepsilon_2^2-\varepsilon_1^2)\alpha_0^{(1)}}{\left(-\beta_0^{(1)}+\varepsilon_1^2\alpha_0^{(1)}\right)\left(\beta_0^{(2)}-\beta_\lambda^{(2)}+\varepsilon_1^2\alpha_\lambda^{(2)}-\varepsilon_2^2\alpha_0^{(2)}\right)+(\varepsilon_2^2-\varepsilon_1^2)\alpha_0^{(1)}\left(-\beta_\lambda^{(2)}+\varepsilon_1^2\alpha_\lambda^{(2)}\right)} \quad (40b)$$

Из (40) следует, что если задать геометрию композитного вихря, с известными размерами как внешнего, так и внутреннего вихрей, с предположением о софокусности и стационарности вихревых ядер, то задача (40) имеет единственное решение Γ_1, Γ_2 с параметрической зависимостью результатов от относительных размеров внутреннего вихря. Размеры внутреннего вихря можно варьировать, при этом результат Γ_1 и Γ_2 будет зависеть от этих размеров. Другими словами, при заданных размерах только внешнего стационарного ядра, внутренняя начинка может быть разной и по завихренности и по размерам. Цель данной работы изучить совместные свойства стационарного композитного вихря в зависимости от относительных размеров внутреннего вихря с приложением к БКПЮ.

Отношение собственных энергии композитного вихря H к вихрю без внутреннего вложения H_0, где $M=\frac{a_2b_2}{a_1b_1}=\frac{S_2}{S_1}$, дается следующим уравнением

$$\frac{H}{H_0}=\frac{{\Gamma_1}^2}{{\Gamma_1^{(0)}}^2}+\frac{{\Gamma_2}^2}{{\Gamma_1^{(0)}}^2}M^{5}/_{2}\frac{K_2}{K_1}\frac{{\chi_0'}^{(2)}}{{\chi_0'}^{(1)}}+\frac{\Gamma_1\Gamma_2}{{\Gamma_1^{(0)}}^2}M^{3}/_{2}\frac{K_2}{K_1}+\frac{\Gamma_1\Gamma_2}{{\Gamma_1^{(0)}}^2}M\frac{{\chi_{\lambda'}'}^{(2)}}{{\chi_0'}^{(1)}}$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\Gamma_1\Gamma_2}{{\Gamma_1^{(0)}}^2}MK_2\frac{{\lambda_2}'}{{\chi_0'}^{(1)}\sqrt{(\varepsilon_2+{\lambda_2}')({\varepsilon_2}^{-1}+{\lambda_2}')\left({K_2}^2+{\lambda_2}'\right)}} \qquad (41)$$

Вывод этого соотношения изложен в 4. «Энергия композитного вихря».

При отсутствии внутреннего вихря, если положить $\Gamma_1=\Gamma_1^{(0)}$, следует очевидный результат $\frac{H}{H_0}=1$. Для других значений M соотношением (41) нужно пользоваться, предварительно задав M и рассчитав для этого M значения Γ_1,Γ_2 по формулам (40a) и (40b).

Изложим важные детали, связанные с используемым здесь требованием о софокусности эллипсоидов №1 и №2. Софокусность нам потребуется, в частности, для того, чтобы внутренний вихрь №2 на границе внешнего вихря №1 индуцировал скорости с линейной зависимостью по горизонтальным координатам, что необходимо для сохранения вихрями формы эллипсоидов. Если фиксировать размеры внешнего вихря №1, а размеры внутреннего вихря №2 рассматривать как переменную величину, то совокупность внутренних вихрей представляет собой однопараметрическое семейство, характеризующееся единственным параметром $M=\frac{a_2b_2}{a_1b_1}$, являющимся отношением площади внутреннего вихря к площади внешнего вихря на главном горизонтальном срезе в плоскости (x,y) при виде сверху для $\tilde{z}=0$. Отметим, что максимально большой внутренний вихрь при $M=1$ совпадает с внешним вихрем. Минимальный софокусный эллипсоид вихря №2 представляет собой эллипсоид, сплюснутый до нулевой толщины $b_2=0$ по горизонтальному направлению вдоль оси b_1 и имеющий конечные размеры a_2 и $\tilde{c}_2$ по осям x и $\tilde{z}$ соответственно. Напомним, что математическая задача (14) сформулирована в растянутом по вертикали пространстве $(x,y,\tilde{z})$. При виде сверху минимальному по размерам софокусному эллипсоиду соответствует отрезок прямой с нулевой площадью. Поэтому для минимального по размерам вложенного вихря $M=0$. Для параметра M всего однопараметрического семейства вложенных вихрей №2 справедлив диапазон значений $0\le M\le 1$. Каждому заданному размеру вихря №2 соответствует некоторое значение параметра M их указанного диапазона. Все характеристики вихря №2 можно выразить через M. Ниже приведены зависимости безразмерных характеристик $\varepsilon_2=\frac{a_2}{b_2}$ и $K_2=\frac{\tilde{c}_2}{\sqrt{a_2b_2}}$ от параметра M, которыми мы пользовались при расчетах различных физических свойств вихря №2

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2M}\left(\varepsilon_1 - \frac{1}{\varepsilon_1}\right) + \sqrt{\frac{1}{4M^2}\left(\varepsilon_1 - \frac{1}{\varepsilon_1}\right)^2 + 1} \tag{42}$$

$${K_2}^2 = \varepsilon_2 + \frac{\left({K_1}^2 - \varepsilon_1\right)\left(\varepsilon_2 - \frac{1}{\varepsilon_2}\right)}{\varepsilon_1 - \frac{1}{\varepsilon_1}} \tag{43}$$

В конечном итоге, если задать размеры вихря №1 и параметр M, характеризующий размер вихря №2, то можно представить все интересующие нас физические свойства композитного вихря как функцию от M. В частности, основной задачей работы является расчет относительных завихренностей Γ_1, Γ_2 и расчет относительной энергии $\frac{H}{H_0}$ системы из вложенных вихрей, другие свойства композитного вихря и анализ этих соотношений в зависимости от параметра M.

2.3 Особенности поведения Γ_1 и Γ_2 в зависимости от размера внутреннего вихря

Согласно решению (40), собственные потенциальные завихренности композитного вихря жестко привязаны к величине сдвига скорости фонового потока. Причем эта связь определяет как величину потенциальной завихренности каждого вихря, так и знаки этой завихренности. Причина такой сильной связи – условие стационарности в совокупности с условием софокусности обоих вихрей. В нашем случае знак собственной завихренности большого вихря №1 совпадает со знаком завихренности фонового потока, т.е. $\Gamma_1 > 0$. В то время как внутренний (вложенный) вихрь имеет противоположную завихренность $\Gamma_2 < 0$. Задача зависимости Γ_1 и Γ_2 от параметра M решалась численно для условий всех миссий при трех значениях $K_1 = 4,\ 6$ или 8. В результате оказалось, что кривые $\Gamma_1(M, K_1)$ и $\Gamma_2(M, K_1)$ как функции от (M, K_1) в плоскости параметров (M, Γ) в каждой миссии практически не зависят от K_1 и на выбранном масштабе по оси Г (ось ординат) все линии сливаются. Аналогичные расчеты проводились для всех миссий и дали очень похожие результаты. На Рис. 2.1. представлены графики $\Gamma_1(M, K_1)$ и $\Gamma_2(M, K_1)$ в миссии Voyager1.

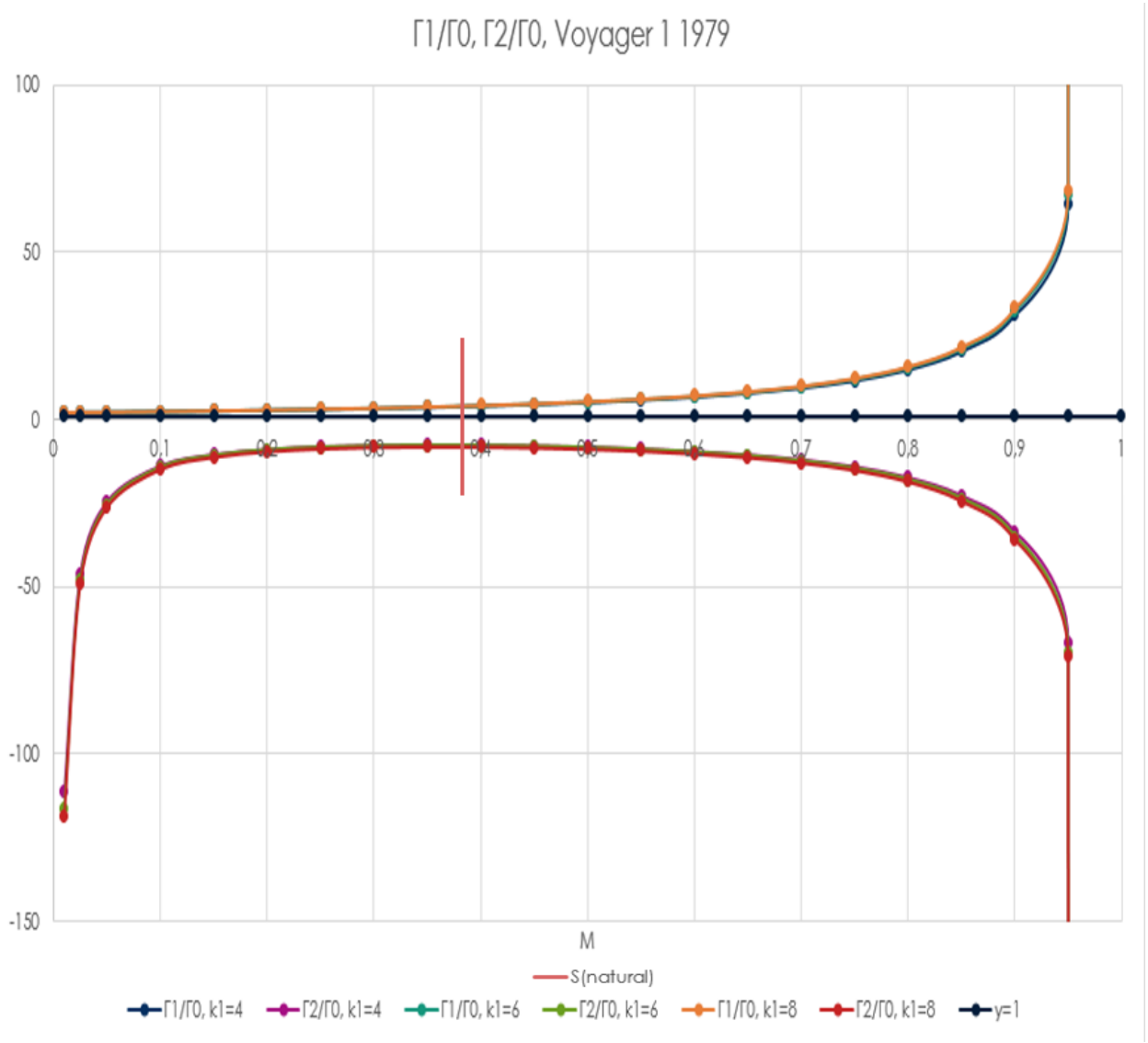


Рис. 2.1. На графике показано решение системы (38) для Γ_1 и Γ_2 согласно (40а) и (40б) в зависимости от параметра M (горизонтальная ось). Данные расчеты проводились для условий горизонтальных размеров БКПЮ в миссии Voyager 1979 для трех значений вертикального параметра растяжения K_1= 4,6,8. В данном масштабе отличие для разных K_1 незначительное. Аналогичные расчеты делались по остальным миссиям Cassini, Galileo и HST и дали близкие результаты. Вертикальный отрезок красного цвета соответствует значению параметра M=0.38 в миссии Voyager 1979.

При $M \to +0$ горизонтальная толщина внутреннего вихря, а вместе с ней и объем, стремится к нулю, остальные размеры конечные. Следовательно, если бы собственная потенциальная завихренность этого вихря при $M \to +0$ оставалась ограниченной, то интегральная завихренность (вихревой заряд) равнялась бы нулю. Из физических соображений, такой вырожденный вихрь никак не влиял бы на характеристики основного вихря. В этом случае завихренность основного вихря должна совпадать со следующим

значением $\Gamma_1 = \Gamma_1^{(0)} = \frac{2}{-\beta_0^{(1)}+\varepsilon_1^2\alpha_0^{(1)}}$, что означает полное отсутствие внутреннего вихря и отсутствие влияния такого вихря на основной. Однако, если при стремлении объема внутреннего вихря к нулю, его интегральная завихренность (вихревой заряд) остается конечной величиной, то такой вырожденный вихрь окажет конечное влияние на основной вихрь даже при нулевом объеме его ядра. Численный расчет показал, что разыграется второй сценарий. Отношение интегральной завихренности внутреннего вихря к интегральной завихренности основного вихря имеет конечный предел при уменьшении объема второго вихря к нулю $V_2 \to 0$. Это демонстрируется на рисунке 1.2.

$$\lim_{M\to 0}\left|\frac{\sigma_2 a_2 b_2 \tilde{c}_2}{\sigma_1 a_1 b_1 \tilde{c}_1}\right| > 0 \qquad (44)$$

Поскольку в соотношении (44) $b_2 \to 0$, то из условия конечности предела (44) следует, что $|\sigma_2| \to \infty$. При этом значение Γ_1 остается конечным. Всюду, в том числе при $M \to 0$, соблюдается неравенство $\Gamma_1 > \Gamma_1^{(0)}$, что указывает на конечное влияние предельно малого внутреннего вихря на большой вихрь. Обсуждение этого свойства будет сделано позже.

На Рис. 2.2 предлагается зависимость от M отношение интегральных потенциальных завихренностей внутреннего вихря к внешнему $\left|\frac{\sigma_2 a_2 b_2 \tilde{c}_2}{\sigma_1 a_1 b_1 \tilde{c}_1}\right| = \left|\frac{\Gamma_2 K_2}{\Gamma_1 K_1} M^{3/2}\right|$ при разных K_1

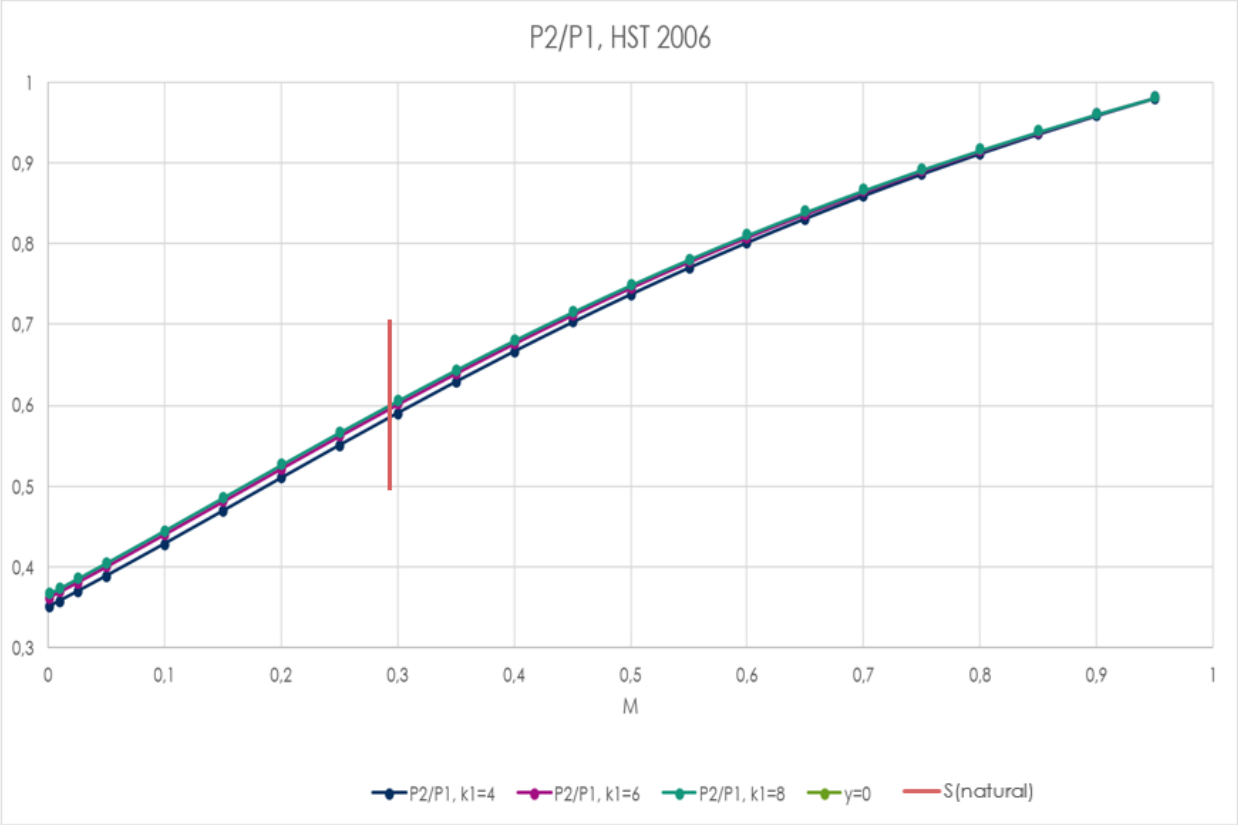


Рис. 2.2. Отношение интегральных потенциальных завихренностей внутреннего вихря к внешнему $\left|\frac{\sigma_2 a_2 b_2 \tilde{c}_2}{\sigma_1 a_1 b_1 \tilde{c}_1}\right|$ для условий миссии HST 2006 для трех значений $K_1 = 4{,}6{,}8$. Вертикальный отрезок красного цвета соответствует значению параметра M=0.29 в миссии HST 2006.

Как следует из расчетов при $M \to 0$ это отношение остается конечным, несмотря на уменьшающийся объем ядра второго вихря. Аналогичные расчеты для остальных миссий показали схожие результаты. Расчеты означают, что предельно малый внутренний вихрь обладает не менее 35% интегральной завихренности по отношению к интегральной завихренности основного ядра. С ростом параметра K_1 при фиксированном M значение $\left|\frac{\sigma_2 a_2 b_2 \tilde{c}_2}{\sigma_1 a_1 b_1 \tilde{c}_1}\right|$ немного возрастает. Это же свойство останется справедливым и в пределе при $M \to 0$.

Фактически на Рис. 2.1. подтверждено, что вложенный вихрь имеет интегрируемую особенность в виде $|\Gamma_2| \to \infty$. В предельно малом вложенном вихре остается конечная интегральная завихренность. Следовательно, формально вложенный вихрь в нашей постановке при условии его стационарности оказывает влияние на основной вихрь, даже имея предельно малый объем вихревого ядра.

При стремлении параметра $M \to 1$ обе величины Γ_1 и Γ_2 неограниченно растут по модулю: $\Gamma_1 \to \infty, \Gamma_2 \to -\infty$. С математической стороны при $M \to 1$ система уравнений становится плохо обусловленной, т.е. определитель системы (35) (знаменатель в $(35a), (35b)$) стремится к нулю, что является формальной причиной неограниченного роста Γ_1 и $|\Gamma_2|$. Физическое объяснение этого свойства следующее. Зафиксируем какое- либо промежуточное значение M из середины отрезка $0 < M < 1$, обозначим его M_0. Значения Γ_1 и Γ_2, соответствующие этому M_0, однозначно находятся согласно $(40a), (40b)$ из условия стационарности обоих вихрей. Напомним, что вихрь №1 вместе с фоновым течением пытаются повернуть внутренний вихрь №2 по часовой стрелке, в то время как вихрь №2 пытается повернуть вихрь №1 против часовой стрелки. При увеличении параметра M граница внутреннего вихря №2 придвинется к границе внешнего вихря №1 и его влияние на вихрь №1 увеличится. Чтобы сохранить форму ядра неподвижной (условие стационарности) вихрь №1 вынужден увеличить свою мощность. После увеличения своей мощности вихрь №1 уже сможет повернуть вихрь №2 по часовой стрелке. Чтобы остаться в стационарном состоянии вихрь №2 тоже должен увеличить свою мощность. В результате увеличение параметра M приводит к интенсификации обоих вихрей. Как следует из рисунка 1 этот рост неограничен. Формальная причина такого свойства – условие

стационарности. Итак, благодаря условию стационарности на левом и правом краю интервала $0 < M < 1$ $\Gamma_2 \to -\infty$, а Γ_1 неограничена только на правом краю при $M \to 1$.

Интересно посмотреть на поведение полной энергии композитного вихревого образования в зависимости от размеров внутреннего вихря. На Рис. 2.3 такой расчет предложен для условий миссии HST 2006 для тех же трех значений $K_1 = 4,6,8$.

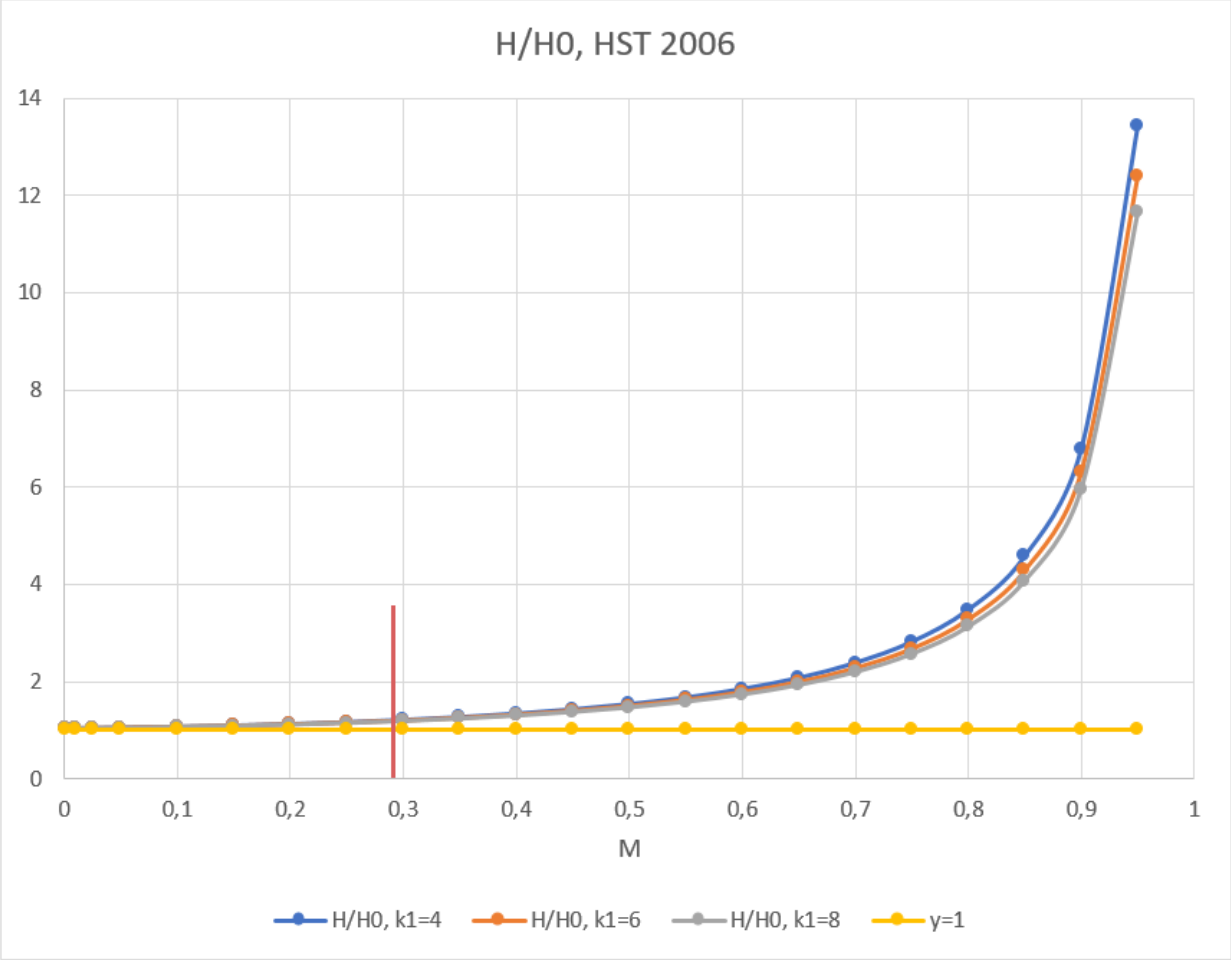


Рис. 2.3. Зависимость безразмерной полной энергии (кинетическая плюс доступная потенциальная) композитного вихря с вложенным в него более мелким вихрем от параметра M и параметра вертикального растяжения K_1 вихря №1. Желтая линия соответствует энергии вихря без вложений. Вертикальный отрезок красного цвета соответствует значению параметра M=0.29 в миссии HST 2006.

Отметим несколько особенностей. 1) Везде энергия вихря с вложением превышает энергию вихря без вложений. Энергия вихря с вложением монотонно возрастает с ростом M, т.е. с увеличивается размера вложенного вихря. На левом краю интервала при $M \to 0$ это превышение энергии незначительно, на правом $M \to 1$ энергия вихря с вложением неограниченно растет.

Теперь прокомментируем результаты, продемонстрированные этих в трех рисунках. Прежде всего нас будет интересовать вопрос о том, какие вложенные вихри реальны в природе, а какие являются математическим следствием построенной теории. Напомни, что мы изучаем ситуацию, когда оба вихря стационарны.

Рассмотрим предельные случаи $M \to 0$ и $M \to 1$. В этих вариантах либо оба, либо один из вихрей имеют неограниченную потенциальную завихренность. Для малых вложенных вихрей $M \to 0$ странным является свойство конечного влияния вихря №2 нулевого объема на вихрь №1. Казалось бы, что при нулевом объеме этого вихря мы имеем дело с однородным по завихренности основным вихрем №1. Однако это не так. Даже предельно малый вихрь №2 конечным образом влияет на вихрь №1. При этом нет предельного перехода от двухкомпонентного композитного вихря при $M \to 0$ к однородному вихрю (39). При $M \to 0$ существует еще одна проблема для вихря №2 – его устойчивость. Дело в том, что условие софокусности вихрей №1 и №2 приводит к тому, малый внутренний вихрь №2 становится сильно вытянутым в горизонтальном направлении, а это в свою очередь должно приводить к неустойчивости этого вихря и его распаду на несколько более мелкие вихри. Задача об устойчивости объемных вытянутых бароклинных вихрей на фоне равнозавихренных течений практически не изучена и критериев распада пока не существует. Однако в отсутствии фоновых течений ряд результатов имеется (Meacham, 1992).

Обсудим в противоположную ситуацию $M \to 1$, когда внутренний вихрь №2 почти совпадает с внешним вихрем №1. Согласно нашим расчетам в этом случае $\Gamma_1 \to +\infty$, а $\Gamma_2 \to -\infty$, образуя в зоне их пересечения бесконечный перепад потенциальной завихренности (рис. 2.1). Это опять должно приводить к неустойчивости системы. С другой стороны, энергия такого двухкомпонентного композитного вихря в условиях стационарности стремится к бесконечности (рис. 2.3).

Напрашивается вывод, что ситуации существования стационарного двухкомпонентного вихря для $M \to 0$ и $M \to 1$ в природе не должна реализовываться. В случае промежуточных значений M, оценочно в диапазоне $0.2 < M < 0.8$, двухкомпонентный вихрь существовать может. Однако такой вихрь потребует больше энергии, чем на создание однородного по потенциальной завихренности вихревого образования. Параметр M для реальных двухкомпонентных вихрей БКПЮ в разных космических миссиях оценивается как $M \approx 0.3 - 0.4$, что соответствует зоне левее середины интервала $0.2 < M < 0.8$ и потребует энергии на создание такого вихря оценочно не более, чем в полтора раза больше, чем на создание однородного вихря (рис. 2.3). Почему

в природе реализуется более энергоемкий двухкомпонентный вихрь на примере БКПЮ, а не однородный менее энергоемкий вихрь пока не ясно.

Кроме соотношений (38), (40a), (40b) и (41) полезны другие физические характеристики вихря с вложением.

1. Средняя завихренность $\langle\Gamma\rangle_V$ по общему объему ядра, рассчитываемое из условия

$$\langle\Gamma\rangle_V \; a_1 \, b_1 \tilde{c}_1 = \Gamma_1 a_1 \, b_1 \tilde{c}_1 + \Gamma_2 a_2 b_2 \tilde{c}_2 \qquad (45)$$

Условие софокусности вихрей даст уравнение для расчета $\langle\Gamma\rangle_V$:

$$\langle\Gamma\rangle_V \; = \Gamma_1 + \Gamma_2 M^{3/2} \, \frac{K_2}{K_1} \qquad (46)$$

2. Полная потенциальная завихренность частиц внутреннего ядра $(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_f)$ в безразмерном виде $(1 + \Gamma_1 + \Gamma_2)$ и полная потенциальная завихренность частиц в зазоре между границами внутреннего и внешнего ядер $(\sigma_1 + \sigma_f)$ в безразмерном виде $(1 + \Gamma_1)$ также дадут представление о свойствах вихрей.

На Рис. 2.4 показаны зависимости средней завихренности $\langle\Gamma\rangle_V$ по всему объему сложного вихря от параметров M и K_1.

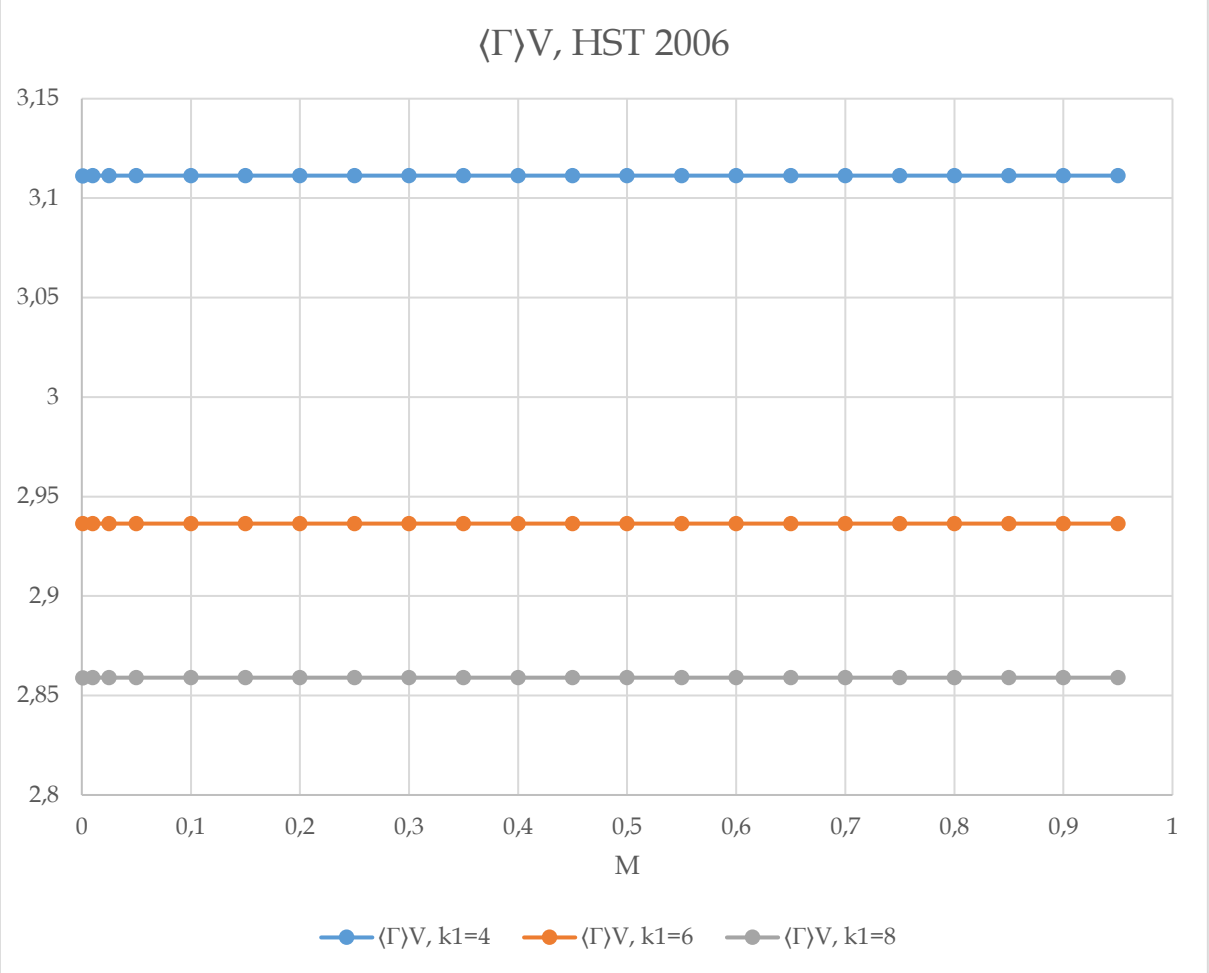


Рис. 2.4. Средняя завихренность по объему всего вихревого ядра отнесенная к завихренности однородного вихря без вложений для условий миссии HST 2006 для трех значений $K_1 = 4,6,8$. Вложенный вихрь увеличивает среднюю завихренность $\langle\Gamma\rangle_V$ примерно в три раза. При этом $\langle\Gamma\rangle_V$ не зависит от размеров внутреннего вихря, но незначительно увеличивается с ростом K_1.

Как видно из рисунка 2.4 средняя по объему общего ядра завихренность повышается до трех раз по сравнению завихренностью однородного вихря без вложений. Эта оценка получена при условии стационарности обоих вихрей.

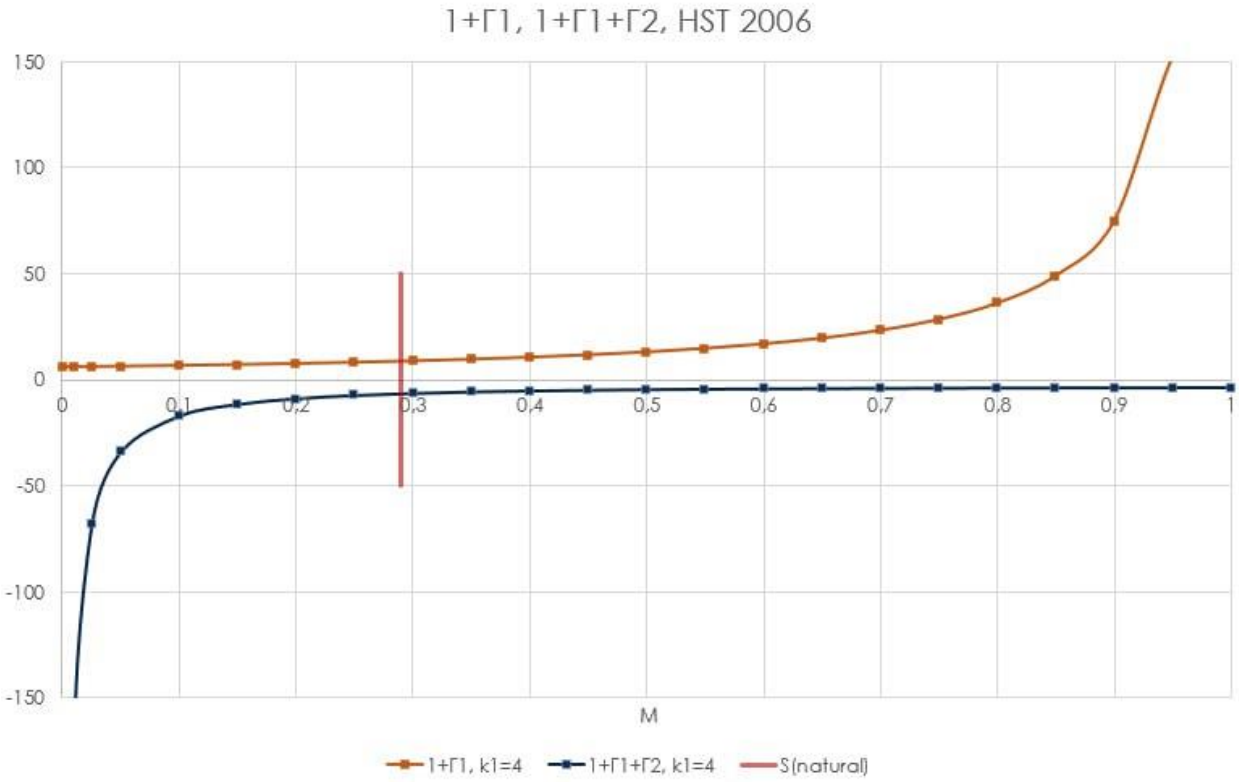


Рис. 2.5. Суммарная потенциальная завихренность в безразмерном виде $(1 + \Gamma_1)$ периферийной зоны композитного вихря частиц в зазоре между границами вихрей №1 и №2 (красная кривая). Суммарная потенциальная завихренность частиц в центральной зоне композитного вихря $(1 + \Gamma_1 + \Gamma_2)$ (синяя кривая), рассчитанная для значения $K_1 = 4$. Миссия HST 2006.

На Рис. 2.5 представлена полная потенциальная завихренность частиц внутреннего ядра $(1 + \Gamma_1 + \Gamma_2)$ и периферийной зоны $(1 + \Gamma_1)$ в безразмерном виде для случая $K_1 = 4$ по миссии HST 2006. Аналогичные расчеты для значений $K_1 = 6$ и 8 этой же миссии показали очень близкие результаты. Качественно такие же результаты получены и для остальных миссий.

Полная потенциальная завихренность $(1 + \Gamma_1 + \Gamma_2)$ центральной части композитного вихря всюду отрицательна и монотонно растет с увеличением размера

вложенного вихря. $(1+\Gamma_1+\Gamma_2)$ имеет особенность при $M \to 0$ в виде неограниченного значения $|1+\Gamma_1+\Gamma_2| \to \infty$. Особенности поведения Γ_1 и Γ_2 при $M \to 1$ скомпенсировали друг друга, что приводит к конечному значению $(1+\Gamma_1+\Gamma_2)$ при $M \to 1$. Это предельное значение меняется от миссии к миссии, но в общем случае лежит в диапазоне значений 2.5-4.0. При данном масштабе по оси ординат мы не замечаем разности результатов по параметру K_1. На самом деле эта разница незначительна и при интерпретации не должна учитываться. Отрицательное значение $(1+\Gamma_1+\Gamma_2)$ в центральной части вихря предсказывает движение частиц в этой зоне по часовой стрелке.

Из рис. 2.5 следует, что на периферии между границами вихрей полная завихренность частиц среды положительная. Знак потенциальной завихренности и знак относительной завихренности в нашей модели совпадают. Ядро каждого циклонического вихря во внешней ближней зоне окружено “юбкой” с антициклонической завихренностью и наоборот антициклон окружен заметной циклонической внешней к ядру ближней зоной. В результате относительная завихренность в зазоре между границами вихрей имеет антициклоническое направление вращения, состоящее из трех компонент одного знака: фоновое течение, собственная завихренность вихря №1 и антициклоническая “юбка” вихря №2. При этом перепад завихренности на границе №2 весьма велик. Все это приводит к следующей картине движения частиц среды в составном ядре композитного вихря. В центральной части вихря в зоне вложенного вихря №2 должно наблюдаться циклоническое вращение части (по часовой стрелке в Южном полушарии). При входе в зону зазора между границами вихрей мы попадаем в область с сильной антициклонической завихренностью, которая развернет вращение частиц в противоположную сторону в периферийной части ядра. Поскольку среднее вращение по всему вихревому ядру остается антициклоническим, то наличие в центре циклонического вращения усилит антициклоническую струю. Итак, наличие стационарного вложенного вихря в основной вихрь приводит к появлению в центральной части вихревого ядра зоны циклонического вращения частиц, вне которой на периферийной вихревого ядра части должна наблюдаться струя антициклонического вращения частиц. Такая качественная картина течений должна наблюдаться только для промежуточных размеров вложенного вихря. Если вложенный вихрь будет слишком мал, то его собственная потенциальная завихренность должна быть огромной, что трудно достижимо. Если же вложенный вихрь окажется большим, то кроме огромных потенциальных завихренностей обоих вихрей на создание такой структуры потребуется много энергии, что также делает этот вариант недостижимым. В результате промежуточный параметр M размера вложенного вихря по нашим оценкам должен

принадлежать интервалу $0.2 < M < 0.8$. Вероятнее всего следует ожидать, что реальное значение параметра M будет лежать от центра интервала ближе к левому краю интервала. На примере БКПЮ это значение по оценкам в различных космических миссиях составляет величину $M \approx 0.3 - 0.4$.

2.4 Энергия композитного вихря

Выпишем выражение для механической энергии в квазигеострофическом приближении в виде из суммы кинетической и доступной потенциальной энергий

$$H = \frac{1}{2}\iiint \left[\rho_\Sigma(u^2 + v^2) + \frac{g^2}{\rho_0}\frac{\rho^2}{N^2}\right] dxdydz \qquad (47)$$

$\rho_0 = \langle \rho_S(z) \rangle$ – средняя плотность по глубине моря, $\rho = \rho_\Sigma(x, y, z, t) - \rho_S(z)$ - отклонение текущей плотности ρ_Σ от плотности ρ_S в покое на данном горизонте. Интеграл (47) вычисляется по всему пространству. Слагаемое $\frac{1}{2}\rho_\Sigma(u^2 + v^2)$ – плотность кинетической энергии (энергия на единицу объема), где не учтена из-за малости вертикальная компонента скорости. Слагаемое $\frac{1}{2}\frac{g^2}{\rho_0}\frac{\rho^2}{N^2}$ представляет плотность доступной потенциальной энергии. Таким образом в (47) рассматриваются вклады как кинетической, так и потенциальной энергии, причем учитывается энергия по всему пространству, как внутри, так и вне как вихревых ядер.

В приближении квазигеострофики, где все рассматриваемые соотношения выписываются с точностью до числа Россби, полную плотность ρ_Σ можно заменить на ρ_0, Компоненты скоростей (u, v) выражаются через геострофические соотношения

$$u = -\psi_y\,, v = \psi_x \qquad (48)$$

Функция тока связана с отклонением полного давления $p_\Sigma(x, y, z, t)$ от гидростатического давления $p_S(z)$ в покое $p = p_\Sigma(x, y, z, t) - p_S(z)$ соотношением $\psi = \frac{p}{\rho_0 f}$ ($f -$ параметр Кориолиса).

Из гидростатики в приближении Буссинеска для p имеем соотношение

$$-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial z} + g\frac{\rho}{\rho_0} = 0 \qquad (49)$$

которое перепишем в терминах функции тока

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\rho g}{\rho_0 f} \qquad \text{откуда следует} \quad \rho = \frac{\rho_0 f}{g}\,\psi_z \qquad (50)$$

В результате подынтегральное выражение в (1п) примет вид

$$\rho_0\left(\psi_x{}^2+\psi_y{}^2\right)+\rho_0\frac{f^2}{N^2}\psi_z^2 \tag{51}$$

Для простоты рассмотрим постоянную частоту Вяйсяля-Брента и введем растянутую вертикальную координату $\tilde{z}=\frac{N}{f}z$. В результате

$$\rho_0\left(\psi_x{}^2+\psi_y{}^2\right)+\rho_0\frac{f^2}{N^2}\psi_z^2=\rho_0(\nabla\psi)^2 \tag{52}$$

Где ∇ трехмерный оператор по координатам $(x,y,\tilde{z})$. В этих обозначениях механическая энергия (47) перепишется следующим образом

$$H=\frac{1}{2}\rho_0\frac{f}{N}\iiint(\nabla\psi)^2dxdyd\tilde{z} \tag{53}$$

С учетом равенства $(\nabla\psi)^2=\nabla(\psi\nabla\psi)-\psi\Delta\psi$ из условий затухания всех функций на бесконечности и непрерывности $\psi\nabla\psi$ следует выражение для механической энергии

$$H=\frac{1}{2}\rho_0\frac{f}{N}\iiint(\nabla\psi)^2dxdyd\tilde{z}=-\frac{1}{2}\rho_0\frac{f}{N}\iiint\psi\Delta\psi dxdyd\tilde{z}\,[1] \tag{54}$$

Если в качестве вихря мы выберем вихрь эллипсоидальной формы и однородной потенциальной завихренностью ядра σ , а среда, в которую помещен этот вихрь покоится на бесконечности, то функция тока в координатах $(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$, направленных вдоль главных осей эллипсоида, примет вид [Жмур, Панкратов, 1989]

$$\psi(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$$
$$=-\frac{\sigma}{4}ab\tilde{c}\int_{\lambda}^{\infty}\left(1-\frac{\tilde{x}^2}{a^2+\mu}-\frac{\tilde{y}^2}{b^2+\mu}-\frac{\tilde{z}^2}{\tilde{c}^2+\mu}\right)\frac{d\mu}{\sqrt{(a^2+\mu)(b^2+\mu)(\tilde{c}^2+\mu)}} \tag{55}$$

Здесь $a,b,\tilde{c}$ – полуоси эллипсоида. Граница такого ядра вращается с постоянной угловой скоростью без деформации формы. Для точек вне ядра нижняя граница интегрирования $\lambda>0$, является положительным корнем кубического уравнения

---

[1] Объемный интеграл $\iiint\nabla(\psi\nabla\psi)dxdyd\tilde{z}$ в силу теоремы Гаусса-Остроградского равен нулю. Применение теоремы Г-О легитимно, поскольку функция $\psi\nabla\psi$ всюду непрерывна, тогда: $\iiint\nabla(\psi\nabla\psi)dxd\psi d\tilde{z}=\iint\psi\frac{\partial\psi}{\partial n}dS$. Поверхностный интеграл возьмем по сфере большого радиуса R, а затем радиус R устремим к бесконечности $R\to\infty$. При больших R имеем асимптотики $\psi\sim\frac{1}{R}$ и $\frac{\partial\psi}{\partial n}=\frac{\partial\psi}{\partial r}\sim\frac{1}{R^2}$. Следовательно, на бесконечности $\psi\frac{\partial\psi}{\partial n}\sim\frac{1}{R^3}$. А поверхностный интеграл по сфере большого радиуса затухает как $\iint\psi\frac{\partial\psi}{\partial n}dS\sim\frac{1}{R}$ и значит на бесконечности он обращается в нуль.

$$\frac{\tilde{x}^2}{a^2+\lambda}+\frac{\tilde{y}^2}{b^2+\lambda}+\frac{\tilde{z}^2}{\tilde{c}^2+\lambda}=1 \tag{56}$$

Для точек внутри ядра и на его границе $\lambda = 0$. Поскольку при вычислении энергии интегрирование ведется по точкам внутри эллипсоида, то для наших целей следует положить $\lambda = 0$. При этом функция тока становится квадратичной функцией координат

$$\psi(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) = -\frac{\sigma}{4}ab\tilde{c}\int_0^\infty\left(1-\frac{\tilde{x}^2}{a^2+\mu}-\frac{\tilde{y}^2}{b^2+\mu}-\frac{\tilde{z}^2}{\tilde{c}^2+\mu}\right)\frac{d\mu}{\sqrt{(a^2+\mu)(b^2+\mu)(\tilde{c}^2+\mu)}} \tag{57}$$

$$\psi(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) = -\frac{\sigma}{4}(\chi_0-\alpha_0\tilde{x}^2-\beta_0\tilde{y}^2-\gamma_0\tilde{z}^2) \tag{58}$$

где $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ безразмерные функции. Функция χ_0 имеет размерность L^2

$$\chi_0 = ab\tilde{c}\int_0^\infty\frac{d\mu}{\sqrt{(a^2+\mu)(b^2+\mu)(\tilde{c}^2+\mu)}} = abK\int_0^\infty\frac{d\mu'}{\sqrt{(\varepsilon+\mu')(\varepsilon^{-1}+\mu')(K^2+\mu')}} \tag{59}$$

$$\chi_\lambda = ab\tilde{c}\int_\lambda^\infty\frac{d\mu}{\sqrt{(a^2+\mu)(b^2+\mu)(\tilde{c}^2+\mu)}} = abK\int_{\lambda'}^\infty\frac{d\mu'}{\sqrt{(\varepsilon+\mu')(\varepsilon^{-1}+\mu')(K^2+\mu')}} \tag{60}$$

Безразмерные выражения для функций $\alpha_0\ \beta_0, \gamma_0\ , \chi_0$. Первые три функции $\alpha_0\ \beta_0, \gamma_0$ с самого начала безразмерные, но их можно записать как функции от безразмерных переменных. Последняя функция χ_0 имеет размерность L^2, ее удобно обезразмерить на ab. В результате получены следующие соотношения

$$\chi_0' = \frac{\chi_0}{ab}$$

$$\alpha_0 = ab\tilde{c}\int_0^\infty\frac{1}{a^2+\mu}\frac{d\mu}{\sqrt{(a^2+\mu)(b^2+\mu)(\tilde{c}^2+\mu)}} = K\int_0^\infty\frac{d\mu'}{(\varepsilon+\mu')\sqrt{(\varepsilon+\mu')(\varepsilon^{-1}+\mu')(K^2+\mu')}} \tag{61}$$

$$\beta_0 = ab\tilde{c}\int_0^\infty\frac{1}{b^2+\mu}\frac{d\mu}{\sqrt{(a^2+\mu)(b^2+\mu)(\tilde{c}^2+\mu)}} = K\int_0^\infty\frac{d\mu'}{(\varepsilon^{-1}+\mu')\sqrt{(\varepsilon+\mu')(\varepsilon^{-1}+\mu')(K^2+\mu')}} \tag{62}$$

$$\gamma_0 = abc\int_0^\infty \frac{1}{\tilde{c}^2+\mu}\frac{d\mu}{\sqrt{(a^2+\mu)(b^2+\mu)(\tilde{c}^2+\mu)}} = K\int_0^\infty \frac{d\mu'}{(K^2+\mu')\sqrt{(\varepsilon+\mu')(\varepsilon^{-1}+\mu')(K^2+\mu')}} \quad (63)$$

Далее для краткости введем обозначение $\Delta(\mu) = (a^2+\mu)(b^2+\mu)(\tilde{c}^2+\mu)$

Из соотношений для $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ следует ограничение $\alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0 = 2$

Собственная механическая энергия одиночного эллипсоидального вихря, включающая в себя кинетическую и доступную потенциальную энергию области как внутри вихревого ядра, так и так вне его (захваченную в движение фоновую жидкость), дается соотношением [Жмур, Арутюнян, 2022], которое следует из (54)

$$H = -\frac{1}{2}\rho_0\frac{f\sigma}{N}\iiint_V \psi(x,y,\tilde{z},t), dxdyd\tilde{z} \quad (64)$$

Интегрирование ведется по объему ядра вихря V в растянутом по вертикали пространству. При этом V связан с физическим объемом вихревого ядра V_0 соотношением $V = \frac{N}{f}V_0$. Подстановка (57) в (64) дает окончательное выражения для энергии одиночного вихря

$$H_0 = \frac{3}{40\pi}\rho_0\frac{V_0^2\sigma^2}{c}K\int_0^\infty \frac{d\tilde{\mu}}{\sqrt{(\tilde{\mu}^2+\nu\tilde{\mu}+1)(K^2+\tilde{\mu})}} \quad (65)$$

В указанных работах соотношение (64) предложено с другим множителем перед интегралом. В задачах работ [1, 3] множитель был не важен, что и отмечалась в тексте этих работ.

При любых деформациях вихря сохраняется объем его ядра V_0 и потенциальная завихренность частиц σ , в результате переменная часть зависит от K, ν . Еще в качестве переменной в этом случае можно рассматривать вертикальный размер ядра c и косвенно частоту Вяйсяля-Брента N. Другая удобная форма записи энергии

$$H = \frac{2}{15}\pi\rho_0 r_o^3 c^2\sigma^2\frac{N}{f}\int_0^\infty \frac{d\tilde{\mu}}{\sqrt{(\tilde{\mu}^2+\nu\tilde{\mu}+1)(K^2+\mu)}} \quad (66)$$

Рассмотрим в пространстве завихренную область, состоящую из двух вложенных в друг друга ядер вихрей, с однородной потенциальной завихренностью частиц в каждом из их ядер. Обозначим бОльший вихрь номером №1 с собственной потенциальной завихренностью его ядра σ_1 с объемом ядра V_1 . Внутри этого вихря поместим маленький вихрь №2 с собственной потенциальной завихренностью его ядра σ_2 с объемом ядра V_2 . В результате получим более сложное вихревое образование. Внутренняя часть объемом V_2

будет иметь потенциальную завихренность частиц $(\sigma_1 + \sigma_2)$. В зазоре между границами внутреннего и внешнего вихрей потенциальная завихренность частиц - σ_1. Напомним, что объемы V_1 и V_2 рассматриваются в растянутом по вертикали пространстве $(x, y, \tilde{z})$.

Распределение функции $\Delta\psi$ в пространстве будет следующим

$$\Delta\psi = \begin{cases} (\sigma_1 + \sigma_2)\text{, если точка } (x, y, \tilde{z}) \text{попадает в область } V_2 \\ \sigma_1\text{,} \quad \text{если точка } (x, y, \tilde{z}) \text{попадает в область } V_1 \cap V_2 \\ 0, \quad \text{если точка } (x, y, \tilde{z}) \text{ окажется вне области } V_1 \end{cases} \tag{67}$$

Решение задачи (67) аналогично нахождению гравитационного потенциала неоднородного по плотности тела. Например, для Земли с тяжелым ядром и более легкой внешней оболочкой.

В случае, когда тело представляет собой два вложенных софокусных эллипсоида и полуосями $a_1, b_1, \tilde{c}_1$ и $a_2, b_2, \tilde{c}_2$ в пространстве $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, t)$, решение имеет вид

$$\begin{aligned} \psi(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = &-\frac{\sigma_1}{4} a_1 b_1 \tilde{c}_1 \int_{\lambda_1}^{\infty} \left(1 - \frac{\tilde{x}^2}{{a_1}^2 + \mu} - \frac{\tilde{y}^2}{{b_1}^2 + \mu}\right. \\ &\left. - \frac{\tilde{z}^2}{{\tilde{c}_1}^2 + \mu}\right) \frac{d\mu}{\sqrt{({a_1}^2 + \mu)({b_1}^2 + \mu)({\tilde{c}_1}^2 + \mu)}} \\ &- \frac{\sigma_2}{4} a_2 b_2 \tilde{c}_2 \int_{\lambda_2}^{\infty} \left(1 - \frac{\tilde{x}^2}{{a_2}^2 + \mu} - \frac{\tilde{y}^2}{{b_2}^2 + \mu}\right. \\ &\left. - \frac{\tilde{z}^2}{{\tilde{c}_2}^2 + \mu}\right) \frac{d\mu}{\sqrt{({a_2}^2 + \mu)({b_2}^2 + \mu)({\tilde{c}_2}^2 + \mu)}} \end{aligned} \tag{68}$$

где нижние пределы интегрирования λ_1 и λ_2 для внешних к ядру точек пространства связаны между собой соотношениями

$${a_1}^2 + \lambda_1 = {b_1}^2 + \lambda_1 = {\tilde{c}_1}^2 + \lambda_1 = {a_2}^2 + \lambda_2 = {b_2}^2 + \lambda_2 = {\tilde{c}_2}^2 + \lambda_2 \tag{69}$$

При этом $\lambda_2 \geq \lambda_1$. Если рассматриваемая точка пространства $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ попадает внутрь ядра V_2, то $\lambda_2 = \lambda_1 = 0$. Если точка в зазор между границами V_1 и V_2 , то $\lambda_1 = 0$, а $\lambda_2 > 0$. Если же рассматриваемая точка окажется вне бОльшего эллипсоида, то $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$, причем они будут связаны соотношениями (69).

Выражение для полной механической энергии вихря (54) остается в силе и при более сложном строении ядра (67)

$$
\begin{aligned}
H = -\frac{1}{2}\rho_0 \frac{f}{N} \iiint \psi \Delta\psi dx dy d\tilde{z} \\
&= -\frac{1}{2}\rho_0 \frac{f(\sigma_1+\sigma_2)}{N} \iiint_{V_2} \psi(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z},t), d\tilde{x}d\tilde{y}d\tilde{z} \\
&-\frac{1}{2}\rho_0 \frac{f\sigma_1}{N} \iiint_{V_1\cap V_2} \psi(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z},t), d\tilde{x}d\tilde{y}d\tilde{z} \\
&= -\frac{1}{2}\rho_0 \frac{f\sigma_1}{N} \iiint_{V_2} \psi(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z},t), d\tilde{x}d\tilde{y}d\tilde{z} \\
&-\frac{1}{2}\rho_0 \frac{f\sigma_2}{N} \iiint_{V_2} \psi(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z},t), d\tilde{x}d\tilde{y}d\tilde{z} \\
&-\frac{1}{2}\rho_0 \frac{f\sigma_1}{N} \iiint_{V_1\cap V_2} \psi(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z},t), d\tilde{x}d\tilde{y}d\tilde{z} = \\
&-\frac{1}{2}\rho_0 \frac{f\sigma_1}{N} \iiint_{V_1} \psi(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z},t), d\tilde{x}d\tilde{y}d\tilde{z} \\
&-\frac{1}{2}\rho_0 \frac{f\sigma_2}{N} \iiint_{V_2} \psi(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z},t), d\tilde{x}d\tilde{y}d\tilde{z}
\end{aligned}
\tag{70}
$$

где $\psi(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z},t)$ задается соотношением (57) с учетом значений λ_1 и λ_2. При интегрировании по V_1 (первый интеграл в (59)) в (56) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 > 0$. При интегрировании по V_2 (второй интеграл в (59)) в (57) следует положить $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$

$$
\begin{aligned}
\psi(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z},t) = -\frac{\sigma_1}{4} a_1 b_1 \tilde{c}_1 \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{\tilde{x}^2}{{a_1}^2+\mu} - \frac{\tilde{y}^2}{{b_1}^2+\mu}\right. \\
\left. - \frac{\tilde{z}^2}{{\tilde{c}_1}^2+\mu}\right) \frac{d\mu}{\sqrt{({a_1}^2+\mu)({b_1}^2+\mu)({\tilde{c}_1}^2+\mu)}} \\
-\frac{\sigma_2}{4} a_2 b_2 \tilde{c}_2 \int_{\lambda_2}^{\infty} \left(1 - \frac{\tilde{x}^2}{{a_2}^2+\mu} - \frac{\tilde{y}^2}{{b_2}^2+\mu}\right. \\
\left. - \frac{\tilde{z}^2}{{\tilde{c}_2}^2+\mu}\right) \frac{d\mu}{\sqrt{({a_2}^2+\mu)({b_2}^2+\mu)({\tilde{c}_2}^2+\mu)}} \\
= -\frac{\sigma_1}{4}\left[\chi_0{}^{(1)} - \alpha_0{}^{(1)}\tilde{x}^2 - \beta_0{}^{(1)}\tilde{y}^2 - \gamma_0{}^{(1)}\tilde{z}^2\right] \\
-\frac{\sigma_2}{4}\left[\chi_{\lambda_2}{}^{(2)} - \alpha_{\lambda_2}{}^{(2)}\tilde{x}^2 - \beta_{\lambda_2}{}^{(2)}\tilde{y}^2 - \gamma_{\lambda_2}{}^{(2)}\tilde{z}^2\right]
\end{aligned}
\tag{71}
$$

При интегрировании по V_2 (второй интеграл в (59)) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$

$$\psi(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z},t) = -\frac{\sigma_1}{4}a_1b_1\tilde{c}_1\int_0^{\infty}\left(1-\frac{\tilde{x}^2}{{a_1}^2+\mu}-\frac{\tilde{y}^2}{{b_1}^2+\mu}\right.$$
$$\left.-\frac{\tilde{z}^2}{{\tilde{c}_1}^2+\mu}\right)\frac{d\mu}{\sqrt{({a_1}^2+\mu)({b_1}^2+\mu)({\tilde{c}_1}^2+\mu)}}$$
$$-\frac{\sigma_2}{4}a_2b_2\tilde{c}_2\int_0^{\infty}\left(1-\frac{\tilde{x}^2}{{a_2}^2+\mu}-\frac{\tilde{y}^2}{{b_2}^2+\mu}\right. \quad (72)$$
$$\left.-\frac{\tilde{z}^2}{{\tilde{c}_2}^2+\mu}\right)\frac{d\mu}{\sqrt{({a_2}^2+\mu)({b_2}^2+\mu)({\tilde{c}_2}^2+\mu)}}$$
$$= -\frac{\sigma_1}{4}\left[\,{\chi_0}^{(1)}-{\alpha_0}^{(1)}\tilde{x}^2-{\beta_0}^{(1)}\tilde{y}^2-{\gamma_0}^{(1)}\tilde{z}^2\right]$$
$$-\frac{\sigma_2}{4}\left[\,{\chi_0}^{(2)}-{\alpha_0}^{(2)}\tilde{x}^2-{\beta_0}^{(2)}\tilde{y}^2-{\gamma_0}^{(2)}\tilde{z}^2\right]$$

В результате получим соотношение

$$H = -\frac{1}{2}\rho_0\frac{f\sigma_1}{N}\iiint_{V_1}\left\{-\frac{\sigma_1}{4}\left[\,{\chi_0}^{(1)}-{\alpha_0}^{(1)}\tilde{x}^2-{\beta_0}^{(1)}\tilde{y}^2-{\gamma_0}^{(1)}\tilde{z}^2\right]\right.$$
$$-\frac{\sigma_2}{4}\left[\,{\chi_{\lambda_2}}^{(2)}-{\alpha_{\lambda_2}}^{(2)}\tilde{x}^2-{\beta_{\lambda_2}}^{(2)}\tilde{y}^2\right.$$
$$\left.\left.-{\gamma_{\lambda_2}}^{(2)}\tilde{z}^2\right]\right\}d\tilde{x}d\tilde{y}d\tilde{z}$$
$$-\frac{1}{2}\rho_0\frac{f\sigma_2}{N}\iiint_{V_2}\left\{-\frac{\sigma_1}{4}\left[\,{\chi_0}^{(1)}-{\alpha_0}^{(1)}\tilde{x}^2-{\beta_0}^{(1)}\tilde{y}^2\right.\right. \quad (73)$$
$$\left.-{\gamma_0}^{(1)}\tilde{z}^2\right]$$
$$-\frac{\sigma_2}{4}\left[\,{\chi_0}^{(2)}-{\alpha_0}^{(2)}\tilde{x}^2-{\beta_0}^{(2)}\tilde{y}^2\right.$$
$$\left.\left.-{\gamma_0}^{(2)}\tilde{z}^2\right]\right\}d\tilde{x}d\tilde{y}d\tilde{z} =$$

$$\frac{1}{8}\rho_0\frac{f{\sigma_1}^2}{N}\iiint_{V_1}\left[{\chi_0}^{(1)}-{\alpha_0}^{(1)}\tilde{x}^2-{\beta_0}^{(1)}\tilde{y}^2-{\gamma_0}^{(1)}\tilde{z}^2\right]d\tilde{x}d\tilde{y}d\tilde{z}$$
$$+\frac{1}{8}\rho_0\frac{f\sigma_1\sigma_2}{N}\iiint_{V_1}\left[{\chi_{\lambda_2}}^{(2)}-{\alpha_{\lambda_2}}^{(2)}\tilde{x}^2-{\beta_{\lambda_2}}^{(2)}\tilde{y}^2\right.$$
$$\left.-{\gamma_{\lambda_2}}^{(2)}\tilde{z}^2\right]d\tilde{x}d\tilde{y}d\tilde{z}$$
$$+\frac{1}{8}\rho_0\frac{f\sigma_1\sigma_2}{N}\iiint_{V_2}\left[{\chi_0}^{(1)}-{\alpha_0}^{(1)}\tilde{x}^2-{\beta_0}^{(1)}\tilde{y}^2\right.$$
$$\left.-{\gamma_0}^{(1)}\tilde{z}^2\right]d\tilde{x}d\tilde{y}d\tilde{z}+\frac{1}{8}\rho_0\frac{f{\sigma_2}^2}{N}\iiint_{V_2}\left[{\chi_0}^{(2)}\right.$$
$$\left.-{\alpha_0}^{(2)}\tilde{x}^2-{\beta_0}^{(2)}\tilde{y}^2-{\gamma_0}^{(2)}\tilde{z}^2\right]d\tilde{x}d\tilde{y}d\tilde{z}$$

С учетом нижеперечисленных равенств

$$\iiint_V \tilde{x}^2 d\tilde{x}d\tilde{y}d\tilde{z}=\frac{1}{5}\mathrm{V}a^2 \tag{74}$$

$$\iiint_V \tilde{z}^2 d\tilde{x}d\tilde{y}d\tilde{z}=\frac{1}{5}\mathrm{V}\tilde{c}^2 \tag{75}$$

Выражение для энергии H примет вид

$$\begin{aligned}H=&\frac{1}{8}\rho_0\frac{f{\sigma_1}^2}{N}\left\{{\chi_0}^{(1)}V_1-\frac{1}{5}V_1{\alpha_0}^{(1)}{a_1}^2-\frac{1}{5}V_1{\beta_0}^{(1)}{b_1}^2\right.\\&\left.-\frac{1}{5}V_1{\gamma_0}^{(1)}{\tilde{c}_1}^2\right\}\\&+\frac{1}{8}\rho_0\frac{f\sigma_1\sigma_2}{N}\left\{{\chi_{\lambda_2}}^{(2)}V_1-\frac{1}{5}V_1{\alpha_{\lambda_2}}^{(2)}{a_1}^2\right.\\&\left.-\frac{1}{5}V_1{\beta_{\lambda_2}}^{(2)}{b_1}^2-\frac{1}{5}V_1{\gamma_{\lambda_2}}^{(2)}{\tilde{c}_1}^2\right\}\\&+\frac{1}{8}\rho_0\frac{f\sigma_1\sigma_2}{N}\left\{{\chi_0}^{(1)}V_2-\frac{1}{5}V_2{\alpha_0}^{(1)}{a_2}^2\right.\\&\left.-\frac{1}{5}V_2{\beta_0}^{(1)}{b_2}^2-\frac{1}{5}V_2{\gamma_0}^{(1)}{\tilde{c}_2}^2\right\}\\&++\frac{1}{8}\rho_0\frac{f{\sigma_2}^2}{N}\left\{{\chi_0}^{(2)}V_2-\frac{1}{5}V_2{\alpha_0}^{(2)}{a_2}^2\right.\\&\left.-\frac{1}{5}V_2{\beta_0}^{(1)}{b_2}^2-\frac{1}{5}V_2{\gamma_0}^{(1)}{\tilde{c}_2}^2\right\}\end{aligned} \tag{76}$$

которое можно упростить использованием математического свойства

$$\chi_0-\frac{1}{5}(\alpha_0a^2+\beta_0b^2+\gamma_0\tilde{c}^2)=\frac{4}{5}\chi_0 \tag{77}$$

В результате, после приведения подобных слагаемых, получено выражение для энергии H в размерном виде

$$H = \frac{1}{10}\rho_0 \frac{f{\sigma_1}^2}{N} V_1 {\chi_0}^{(1)} + \frac{1}{10}\rho_0 \frac{f{\sigma_2}^2}{N} V_2 {\chi_0}^{(2)} + \frac{1}{10}\rho_0 \frac{f\sigma_1\sigma_2}{N} V_2 {\chi_0}^{(1)} + \frac{1}{10}\rho_0 \frac{f\sigma_1\sigma_2}{N} V_1 \left\{ {\chi_{\lambda_2}}^{(2)} + \frac{1\grave{}}{2} a_2 b_2 \tilde{c}_2 \frac{\lambda_2}{\sqrt{\Delta(\lambda_2)}} \right\} \tag{78}$$

Приведем задачу к безразмерному виду. Требуется обезразмерить выражение (78). Для этого приведем все требуемые соотношения в безразмерном виде: $\chi_0 = ab\chi_0^{'}$ и $\chi_\lambda = ab\chi_{\lambda'}^{'}$, $\chi_0^{'}$ и $\chi_{\lambda'}^{'}$ обезразмренные функция χ_0 и χ_λ.

$$\chi_0^{'} = K \int_0^\infty \frac{d\mu'}{\sqrt{(\varepsilon+\mu')(\varepsilon^{-1}+\mu')(K^2+\mu')}}$$

$$H\chi_{\lambda'}^{'} = K \int_{\lambda'}^\infty \frac{d\mu'}{\sqrt{(\varepsilon+\mu')(\varepsilon^{-1}+\mu')(K^2+\mu')}} \tag{79}$$

Указанные выражения следует записать для каждого из двух вложенных вихрей

$$\chi_0^{'(1)} = K_1 \int_0^\infty \frac{d\mu'}{\sqrt{(\varepsilon_1+\mu')({\varepsilon_1}^{-1}+\mu')({K_1}^2+\mu')}}$$

$$\chi_0^{'(2)} = K_2 \int_0^\infty \frac{d\mu'}{\sqrt{(\varepsilon_2+\mu')({\varepsilon_2}^{-1}+\mu')({K_2}^2+\mu')}} \tag{80}$$

$$\chi_{\lambda'}^{'(2)} = K_2 \int_{\lambda_2'}^\infty \frac{d\mu'}{\sqrt{(\varepsilon_2+\mu')({\varepsilon_2}^{-1}+\mu')\left({K_2}^2+\mu'\right)}}$$

В результате безразмерную энергию композитного вихря удобно представить в следующем виде

$$\frac{H}{H_0} = \frac{{\sigma_1}^2}{{\sigma_0}^2} + \frac{{\sigma_2}^2}{{\sigma_0}^2}\frac{V_2 a_2 b_2 \chi_0^{'(2)}}{V_1 a_1 b_1 \chi_0^{'(1)}} + \frac{\sigma_1\sigma_2}{{\sigma_0}^2}\frac{V_2}{V_1} + \frac{\sigma_1\sigma_2}{{\sigma_0}^2}\frac{a_2 b_2 \chi_{\lambda'}^{'(2)}}{a_1 b_1 \chi_0^{'(1)}} + \frac{1}{2}\frac{\sigma_1\sigma_2}{{\sigma_0}^2}\frac{a_2 b_2 K_2}{a_1 b_1 \chi_0^{'(1)}} \frac{\lambda_2^{'}}{\sqrt{\left(\varepsilon_2+\lambda_2^{'}\right)\left({\varepsilon_2}^{-1}+\lambda_2^{'}\right)\left({K_2}^2+\lambda_2\right.}} \tag{81}$$

где

$$H_0 = \frac{1}{10}\rho_0 \frac{f{\sigma_0}^2}{N} V_1 a_1 b_1 \chi_0^{'(1)} \tag{82}$$

энергия одиночного стационарного вихря безо всяких вложенных дополнительных вихрей, а σ_0 – его потенциальная завихренность в тех же условиях. Для удобства представим в безразмерном виде потенциальные завихенности $\Gamma_0 = \frac{\sigma_0}{\Gamma}$, $\Gamma_1 = \frac{\sigma_1}{\Gamma}$, $\Gamma_2 = \frac{\sigma_2}{\Gamma}$ всех участвующих в задаче вихрей, отнесенные к величине сдвига фонового течения Г. Если ввести в соотношение (82) параметр

$$M = \frac{a_2 b_2}{a_1 b_1} = \frac{S_2}{S_1}$$

то окончательное выражение для относительной энергии композитного вихря $\frac{H}{H_0}$ примет вид

$$\frac{H}{H_0} = \frac{{\Gamma_1}^2}{{\Gamma_0}^2} + \frac{{\Gamma_2}^2}{{\Gamma_0}^2} M^{5/2} \frac{K_2}{K_1} \frac{\chi_0^{'(2)}}{\chi_0^{'(1)}} + \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{{\Gamma_0}^2} M^{3/2} \frac{K_2}{K_1} + \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{{\Gamma_0}^2} M \frac{\chi_{\lambda'}^{'(2)}}{\chi_0^{'(1)}} + \frac{1}{2} \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{{\Gamma_0}^2} M K_2 \frac{{\lambda_2}'}{\chi_0^{'(1)} \sqrt{(\varepsilon_2 + {\lambda_2}')(\varepsilon_2^{-1} + {\lambda_2}')({K_2}^2 + \lambda_2)}} \quad (83)$$

в котором наиболее важным параметром будем считать параметр M и нашей основной целью будет изучение зависимости безразмерной собственной энергии композитного вихря от этого параметра. С физической точки зрения это исследование равносильно изучению энергии стационарного композитного вихря в зависимости от относительных размеров малого стационарного вихря, вложенного в основной вихрь. Все другие характеристики вихрей также связаны с параметром M. Таким образом параметр M полностью определяет энергетические свойства композитного вихря. Численная реализация исследования приводится в основном тексте диссертации.

В результате получилась следующая физическая интерпретация задачи. Композитный вихрь состоит из стационарного основного вихря №1 и вложенного в него нестационарного вихря №2. Первый стационарный (основной) вихрь существует на фоне сдвигового течения и не “чувствует” наличия второго вихря. Второй вихрь, помещенный внутрь первого вихря, является возмущением основного вихря и эволюционирует внутри него под самодействием, под действием первого вихря и фонового течения. В общем случае второй вихрь движется внутри ядра основного вихря, деформируется им и фоновым течением, а также находится под самовоздействием. При таком подходе интенсивность и начальные размеры второго вихря можно менять и изучать поведение параметров композитного вихря в зависимости от его начальных характеристик.

Рассматриваемая задача математически очень сложная. Действительно, если не накладывать дополнительных условий на форму ядра вихрей, то как функция тока (89), так

и индуцированные вихрями скорости (u_1, v_1) и (u_2, v_2) будут представлять собой объемные интегралы. Кинематические же граничные условия (92) и (93) в этом случае окажутся интегро-дифференциальными уравнениями, описывающими эволюцию формы вихревых ядер – области V_1 и V_2, с одной стационарной $F_1(x, y, \tilde{z}) = 0$ и второй переменной границами $F_2(x, y, \tilde{z}, t) = 0$. Подобные задачи численно решаются методами контурной динамики в 2D-представлениях или поверхностной динамики в 3D-исполнении.

Для того, что качественно понять свойства подобных композитных вихрей, сделаем следующие упрощающие предположения о форме вихревых ядер обоих вихрей. Аппроксимируем форму основного стационарного вихревого ядра эллипсоидом, так же, как и начальную форму второго вложенного вихря. В этом случае оба интеграла, входящие в (89) вычисляются. Задача о стационарном эллипсоидальном вихре на сдвиговом потоке, применительно к БКПЮ рассматривалась в работе [Суетин и др., 2023]. Здесь мы предложим другое более простое ее решение. Как показано в [Суетин и др., 2023] и будет продемонстрировано ниже при заданных геометрических размерах вихря №1 и заданном сдвиге фоновой скорости потенциальная завихренность стационарного эллипсоидального вихря определяется однозначно. В свою очередь эллипсоидальный вихрь №1 внутри себя индуцирует геострофические скорости, линейно зависящие от горизонтальных координат. В результате суммарная скорость фон плюс индуцированное первым вихрем течение внутри вихря оказываются тоже линейными по горизонтальным координатам функциями, а указанное суммарное течение – равнозавихренным течением с вертикальной компонентой ротора скорости. Поведение эллипсоидальных вихрей в подобных равнозавихренных течениях рассматривалось в ранних работах об эллипсоидальных вихрях, например, в работе [Жмур, Панкратов, 1991]. Одно полноценное исследование было проведено недавно, см. [Суетин и др., 2023], где было показано, что в равнозавихренных баротропных фоновых потоках, первоначально эллипсоидальный вихрь остается эллипсоидальным по форме и далее. В таких потоках существуют только три режима поведения эллипсоидальных вихрей: вращательный режим, колебательный режим и режим неограниченного вытягивания. В первых двух режимах размеры полуосей вихря остаются конечными, а сам вихрь испытывает периодическое колебание длин горизонтальных полуосей при сохраняющемся вертикальном размере. Форма ядра также может вращаться или колебаться вокруг вертикальной оси. В результате в указанных двух режимах поведения эллипсоидальный вихрь, оставаясь эллипсоидом в среднем не меняет своих размеров и движется как целое со скоростью фонового потока, приходящегося на геометрический центр вихря. В режиме неограниченного вытягивания, который соответствует фоновым

течениям с сильным сдвигом, ядро вихря вытягивается в филамент и, собственно, сам вихрь теряет свои вихревые свойства, фактически уничтожаясь течением. Наша цель понять по какому сценарию из трех пойдет эволюция вихря №2.

В результате указанных упрощений и использования эллипсоидальности вихрей задача разбилась на три условно самостоятельные подзадачи. Первое. Описать и исследовать свойства стационарного вихря №1 при заданных размерах и заданных характеристиках сдвига фонового течения. Второе. На основе первой задачи определить тип поведения вложенного вихря №2. Третье. Провести анализ физических свойств полученного композитного вихря с позиции его энергетики. Сравнить два варианта композитных вихрей - стационарного по статье [Аракелян и др., 2026] и полученного в данной работе композитного вихря с нестационарным вихревым вложением с целью подобрать наиболее физическую модель явления.

2.5 Задача о стационарном (основном) вихре

Рассмотрим теперь задачу о стационарном (основном) вихре. Как и ранее, выберем направления горизонтальных осей, совпадающие с главными осями эллипсоида. В этом случае распределение потенциальной завихренности внутри и вне вихревого ядра описывается кусочно-постоянной функцией, аналогичной (5) из Главы 1:

$$\Delta\psi = \begin{cases} (\sigma_1 + \sigma_f), & \text{если точка } (x, y, \tilde{z}) \text{ попадает в область } V_1 \\ \sigma_f, & \text{если точка } (x, y, \tilde{z}) \text{ окажется вне области } V_1 \end{cases} \quad (84)$$

Здесь σ_1 — собственная потенциальная завихренность основного вихря, а σ_f — завихренность фонового течения. Решение для функции тока $\psi(\vec{r}, t)$ в этом случае, как и ранее, представляется в виде суммы вклада от фонового течения и вклада от вихря:

$$\psi(\vec{r}, t) = -\frac{\sigma_1}{4\pi} \iiint\limits_{V_1} \frac{d^3\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \psi_f \quad (85)$$

Интеграл в (13) для эллипсоидальной формы вихревого ядра, задаваемой уравнением $F_1(x, y, \tilde{z}) = \frac{x^2}{{a_1}^2} + \frac{y^2}{{b_1}^2} + \frac{\tilde{z}^2}{{\tilde{c}_1}^2} - 1 = 0$, уже был вычислен нами ранее (см. формулу (10)). Для удобства дальнейшего изложения приведем его еще раз:

$$\psi_1(x,y,\tilde{z}) = -\frac{1}{4}\sigma_1 a_1 b_1 \tilde{c}_1 \int\limits_{\lambda_1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{{a_1}^2+\mu} - \frac{y^2}{{b_1}^2+\mu} - \frac{\tilde{z}^2}{{\tilde{c}_1}^2+\mu}\right) \frac{d\mu}{\sqrt{({a_1}^2+\mu)({b_1}^2+\mu)({\tilde{c}_1}^2+\mu)}} \tag{86}$$

Здесь $\psi_1(x,y,\tilde{z})$ функция тока от вихря №1 в растянутом по вертикали пространстве $(x,y,\tilde{z})$; $a_1, b_1, \tilde{c}_1$ длины его полуосей; σ_1 - собственная потенциальная завихренность основного вихря.

Параметр λ_1 для внутренних к области V_1 равен нулю $\lambda_1 = 0$. Для внешних к V_1 точек λ_1 определяется следующим образом: выбранная внешняя точка $(x,y,\tilde{z})$ лежит на поверхности одного из софокусных с эллипсоидов, которому соответствует некоторое значение параметра $\lambda_1 > 0$, подчиняющееся уравнению

$$\frac{x^2}{{a_1}^2+\lambda_1} + \frac{y^2}{{b_1}^2+\lambda_1} + \frac{\tilde{z}^2}{{\tilde{c}_1}^2+\lambda_1} = 1 \tag{87}$$

Отметим, что уравнение (96) полностью аналогично уравнению (11) из Главы 1 и определяет семейство софокусных эллипсоидов, что в дальнейшем позволит нам использовать свойство линейности индуцируемых скоростей на границах вложенных вихрей.

Для дальнейшего анализа нам потребуются вспомогательные функции α_0, β_0, α_λ, β_λ, χ_0', $\chi_{\lambda'}'$, которые уже были введены ранее (см. формулу (16)). Напомним их явный вид, записанный для удобства в безразмерной форме:

$$\alpha_0 = ab\tilde{c} \int\limits_0^{\infty} \frac{d\mu}{(a^2+\mu)\sqrt{(a^2+\mu)(b^2+\mu)(\tilde{c}^2+\mu)}} = K \int\limits_0^{\infty} \frac{d\mu}{(\varepsilon+\mu)\sqrt{(\varepsilon+\mu)(\varepsilon^{-1}+\mu)(K^2+\mu)}} \tag{88a}$$

$$\beta_0 = ab\tilde{c} \int\limits_0^{\infty} \frac{d\mu}{(b^2+\mu)\sqrt{(a^2+\mu)(b^2+\mu)(\tilde{c}^2+\mu)}} = K \int\limits_0^{\infty} \frac{d\mu}{(\varepsilon^{-1}+\mu)\sqrt{(\varepsilon+\mu)(\varepsilon^{-1}+\mu)(K^2+\mu)}} \tag{88b}$$

$$\alpha_\lambda = ab\tilde{c}\int_{\lambda}^{\infty}\frac{d\mu}{(a^2+\mu)\sqrt{(a^2+\mu)(b^2+\mu)(\tilde{c}^2+\mu)}} = K\int_{\lambda'}^{\infty}\frac{d\mu}{(\varepsilon+\mu)\sqrt{(\varepsilon+\mu)(\varepsilon^{-1}+\mu)(K^2+\mu)}} \tag{88c}$$

$$\beta_\lambda = ab\tilde{c}\int_{\lambda}^{\infty}\frac{d\mu}{(b^2+\mu)\sqrt{(a^2+\mu)(b^2+\mu)(\tilde{c}^2+\mu)}} = K\int_{\lambda'}^{\infty}\frac{d\mu}{(\varepsilon^{-1}+\mu)\sqrt{(\varepsilon+\mu)(\varepsilon^{-1}+\mu)(K^2+\mu)}} \tag{88d}$$

$$\chi_0 = ab\tilde{c}\int_{0}^{\infty}\frac{d\mu}{\sqrt{(a^2+\mu)(b^2+\mu)(\tilde{c}^2+\mu)}} = abK\int_{0}^{\infty}\frac{d\mu'}{\sqrt{(\varepsilon+\mu')(\varepsilon^{-1}+\mu')(K^2+\mu')}} \tag{88e}$$

$$\chi_\lambda = ab\tilde{c}\int_{\lambda}^{\infty}\frac{d\mu}{\sqrt{(a^2+\mu)(b^2+\mu)(\tilde{c}^2+\mu)}} = abK\int_{\lambda}^{\infty}\frac{d\mu'}{\sqrt{(\varepsilon+\mu')(\varepsilon^{-1}+\mu')(K^2+\mu')}} \tag{88f}$$

$$\chi_0^{'} = K\int_{0}^{\infty}\frac{d\mu'}{\sqrt{(\varepsilon+\mu')(\varepsilon^{-1}+\mu')(K^2+\mu')}} \tag{88g}$$

$$\chi_{\lambda'}^{'} = K\int_{\lambda'}^{\infty}\frac{d\mu'}{\sqrt{(\varepsilon+\mu')(\varepsilon^{-1}+\mu')(K^2+\mu')}} \tag{88h}$$

В формулах (99) для применения их к вихрю №1 все параметры $\sigma, a, b, \tilde{c}, \lambda$ следует записать с нижним индексом 1 как $\sigma_1, a_1, b_1, \tilde{c}_1, \lambda_1$, а соответствующие функции $\alpha_0, \beta_0, \alpha_\lambda, \beta_\lambda$ с верхним индексом 1: $\alpha_0^{(1)}, \beta_0^{(1)}, \sigma_2, \alpha_\lambda^{(1)}, \beta_\lambda^{(1)}$. Эти же обозначения будут далее применены к вихрю №2. Тогда указанный индекс 1 следует заменить на индекс 2.

Функции $\alpha_0,\ \beta_0, \alpha_\lambda, \beta_\lambda$ в (16) безразмерные, но их подынтегральные выражения можно представить как в размерной форме, так и в безразмерной. В (99) показаны оба варианта. Здесь $\varepsilon = \frac{a}{b}$ – параметр горизонтальной вытянутости и $K = \frac{\tilde{c}}{\sqrt{ab}}$ – параметр вертикального растяжения вихревого ядра. В безразмерной записи нижний безразмерный предел интегрирования запишется следующим образом $\lambda' = \frac{\lambda}{ab}$. Последние функции из (99) χ_0 и χ_λ имеет размерность L^2 . Связь размерных χ_0 и χ_λ и безразмерных представлений этих функций $\chi_0^{'}$ и $\chi_{\lambda'}^{'}$следующая $\chi_0 = ab\chi_0^{'}$ и $\chi_\lambda = ab\chi_{\lambda'}^{'}$.

Собственные геострофические горизонтальные скорости от вихрей (u_v, v_v) эллипсоидальных вихрей вычисляются через соответствующую функцию тока и представимы в виде

$$u_v = -\frac{\sigma}{2} ab\tilde{c} \int_\lambda^\infty \frac{d\mu}{(b^2+\mu)\sqrt{(a^2+\mu)(b^2+\mu)(\tilde{c}^2+\mu)}} \tilde{y} \tag{89}$$

$$v_v = \frac{\sigma}{2} ab\tilde{c} \int_\lambda^\infty \frac{d\mu}{(a^2+\mu)\sqrt{(a^2+\mu)(b^2+\mu)(\tilde{c}^2+\mu)}} \tilde{x} \tag{90}$$

Здесь $(\tilde{x},\ \tilde{y})$ горизонтальные координаты точки на плоскости вдоль главных направлений эллипсоида с центром в начале координат. Для вихря №1 главные направления совпадают с осями координат (x, y), для вихря №2 это не так.

Внутри первого вихря вплоть до его границы скорости (u_v, v_v) обозначены как $(u_1,$ $v_1)$ и являются линейными по горизонтальным координатам функциями от (x, y)

$$u_1 = -\frac{1}{2}\sigma_1\beta_0^{(1)} y, \quad v_1 = \frac{1}{2}\sigma_1\alpha_0^{(1)} x \tag{91}$$

Течение (102) равнозавихренное. Фоновое течение $\left(u_f, v_f\right) = (-\Gamma y, 0)$, а также их суперпозиция $\left(-\left(\frac{1}{2}\sigma_1\beta_0^{(1)} + \Gamma\right) y, \frac{1}{2}\sigma_1\alpha_0^{(1)} x\right)$ тоже равнозавихренное. Следовательно, если вихрь №2, поместить в такое течение, то первоначально эллипсоидальный вихрь №2 так и останется с эллипсоидальной формой ядра. Поэтому правомерность рассмотрения вихря №2 с эллипсоидальной формой доказана.

Вернемся к течению на границе вихря №1. Обозначим текущие горизонтальные координаты границы первого вихря как $\left(x_{b_1}, y_{b_1}\right)$, тогда поле скорости $\left(u_{b_1}, v_{b_1}\right)$, в этих же точках

$$\left(u_{b_1}, v_{b_1}\right) = \left(-\left(\frac{1}{2}\sigma_1\beta_0^{(1)} + \Gamma\right) y_{b_1}, \frac{1}{2}\sigma_1\alpha_0^{(1)} x_{b_1}\right) \tag{92}$$

Кинематическое граничное условие на границе стационарного эллипсоида

$$F_1(x, y, \tilde{z}) = \frac{x^2}{{a_1}^2} + \frac{y^2}{{b_1}^2} + \frac{\tilde{z}^2}{{\tilde{c}_1}^2} - 1 = 0 \tag{93}$$

записанное в виде (9) представим через характеристики вихря

$$\left[-\left(\frac{1}{2}\sigma_1\beta_0^{(1)} + \Gamma\right)\frac{2}{{a_1}^2} + \frac{1}{2}\sigma_1\alpha_0^{(1)}\frac{2}{{b_1}^2}\right] x_{b_1} y_{b_1} = 0 \tag{94}$$

С учетом относительной произвольности в координатах поверхности вихря $x_{b_1} y_{b_1}$ из (105) следует, выражение (105) в квадратных скобках равно нулю. Это условие можно записать в безразмерном виде

$$\Gamma_1\left(-\beta_0^{(1)} + \varepsilon_1^2\alpha_0^{(1)}\right) = 2 \tag{95}$$

Где $\Gamma_1 = \frac{\sigma_1}{\Gamma}$ – относительная потенциальная завихренность вихря №1. Как видим, завихренность основного вихря определяется однозначно

$$\Gamma_1 = \Gamma_1^{(0)} = \frac{2}{-\beta_0^{(1)} + \varepsilon_1^2 \alpha_0^{(1)}} \tag{96}$$

если задана его геометрия и сдвиг фоновой скорости Г. В работе [Суетин и др., 2023] эта же характеристика $\Gamma_1^{(0)}$ определялась из других математически более сложных условий, но физически означающих одно и то же – стационарность границы первого вихря. Соотношение (107) показало сходство полученных результатов с указанной работой с незначительным расхождением при интерпретации.

Ввиду важности безразмерного параметра $\Gamma_1^{(0)}$ приведем его численные значения, рассчитанные по результатам миссий Voyager, Galileo, Cassini и HST.

Таблица 1 Расчётная относительная завихренность $\Gamma_1^{(0)}$ основного вихря согласно (23) для $K_1 = 4,6,8$

	$K_1 = 4$	$K_1 = 6$	$K_1 = 8$
Voyager	1.41	1.31	1.29
Galileo	1.18	1.06	1.04
Cassini	0.89	0.85	0.84
HST	0.89	0.85	0.84

За единицу здесь принята потенциальная завихренность фонового течения. В результате следует ожидать, что полная потенциальная завихренность в основном ядре вихря, обезразмеренная на потенциальную завихренность фонового потока, будет равняться $(1 + \Gamma_1^{(0)})$, что численно составляет величину в разных миссиях от 1.8 до 2.4.

Для параметра K_1 при расчетах по формуле (107) выбрано три наиболее подходящих значения 4, 6 и 8. Дело в том, что за все время изучения БКПЮ в различных миссиях было получено два отличающихся друг от друга вертикальных размера БКПЮ c_1 – 300 и 500 км, в то время как горизонтальные размеры a_1, b_1 в каждой мисси определяются довольно точно. Поэтому безразмерный параметр $K_1 = \frac{N}{f}\frac{c_1}{\sqrt{a_1 b_1}}$ вычисляется с некоторой погрешностью и лежит в диапазоне $4 < K_1 < 8$ [Суетин и др., 2023]

Как следует из наших оценок безразмерная потенциальная завихренность ядра основного вихря понижалась со временем вместе с уменьшением площади, занятой вихрем на горизонте наблюдения облаков. По мере уменьшения основного вихря, зависимость Γ_1 от параметра вертикального растяжения K_1 уменьшается.

Вернемся к обсуждению поведения вихря №2, вложенного внутрь ядра основного вихря. Как было показано ранее, эллипсоидальный вихрь, помещенный в линейное по координатам горизонтальное поле скорости, движется как целое со скоростью внешнего течения, приходящейся на его центр. При этом его форма может испытывать только три типа эволюции: вращение, нутационные колебания или неограниченное вытягивание. Напомним, что для условий атмосферы Юпитера реализуются только первые два режима, при которых вихрь остается локализованным образованием. [Суетин и др., 2023]. В случае вращательного или колебательного режимов поведения горизонтальные полуоси малого эллипсоида a_2, b_2 периодически меняются в ограниченном диапазоне размеров. Какой вариант реализуется для вихря №2 зависит от характеристик внешнего к вихрю №2 течения и начальных условий на геометрию вихря №2. Это исследование проведено в Приложении «Поведение слабого нестационарного вихря внутри ядра стационарного вихревого образования». В Приложении показано, что внутренний вихрь не может неограниченно растягиваться в филамент, оставаясь локализованным образованием. Вместе с тем, если центры основного и вложенного вихрей не совпадают, то вложенный вихрь как целое двигается по эллиптической орбите вокруг центра основного вихря №1 и одновременно вихрь №2 может вращаться вокруг вертикальной оси или испытывать нутационные колебания вокруг вертикали с одновременной ограниченной вариацией горизонтальных полуосей a_2, b_2 . При совпадении центров обоих эллипсоидов вихрь №2, как целое, не перемещается внутри основного вихря №1, но длины его полуосей a_2, b_2 и ориентация главных направлений меняется. Причем a_2 и b_2 меняются периодически с ограниченной амплитудой колебаний вокруг среднего значения, а угол ориентации либо также колеблется около среднего значения (режим нутационных колебаний), либо монотонно нарастает (режим вращения). Главным свойством вихря №2 следует считать ограниченность горизонтальных размеров вихря №2, т.е. его компактность, при любой эволюции внутри основного вихря №1.

Рассмотрим условия слабого воздействия вихря №2 на границу вихря №1.

Для этого воспользуемся оценками скорости от каждого из вихрей на границе вихря №1 для частного случая, когда главные направления эллипсоидов совпадают. Согласно (95), (101), (102) значения геострофических скоростей от обоих вихрей и фонового течения задаются соотношениями

$$\begin{cases} u = u_f + u_1 + u_2 = -(\Gamma + \frac{1}{2}\sigma_1\beta_0^{(1)} + \frac{1}{2}\sigma_2\beta_\lambda^{(2)})y \\ v = v_f + v_1 + v_2 = \left(\frac{1}{2}\sigma_1\alpha_0^{(1)} + \frac{1}{2}\sigma_2\alpha_\lambda^{(2)}\right)x \end{cases} \quad (97)$$

где x и y координаты границы ядра вихря №1. Условие слабого влияния вихря №2 на вихрь №1 сведутся к неравенствам

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\Gamma_2\beta_\lambda^{(2)} \ll 1 + \frac{1}{2}\Gamma_1\beta_0^{(1)} \\ \frac{1}{2}\Gamma_2\alpha_\lambda^{(2)} \ll \frac{1}{2}\Gamma_1\alpha_0^{(1)} \end{cases} \quad (98)$$

Причем $\Gamma_1 = \frac{2}{-\beta_0^{(1)} + \varepsilon_1^2\alpha_0^{(1)}}$. Тогда условия слабого влияния внутреннего вихря на внешний сведется к неравенствам

$$\begin{cases} \Gamma_2\beta_\lambda^{(2)} \ll 2 + \Gamma_1\beta_0^{(1)} \\ \Gamma_2\alpha_\lambda^{(2)} \ll \Gamma_1\alpha_0^{(1)} \end{cases} \quad (99)$$

В соотношениях (110) зашиты два условия – ограничение на интенсивность внутреннего вихря Γ_2 и ограничение на его размеры через параметр λ. Если внутренний вихрь №2 имеет размеры примерно совпадающие с размерами внешнего вихря и с примерно совпадающими значениями параметра вертикальной вытянутости $K_1 \sim K_2$, то справедливы оценки $\beta_\lambda^{(2)} \sim \beta_0^{(1)}$ и $\alpha_\lambda^{(2)} \sim \alpha_0^{(1)}$, и неравенства (68) выполняются при условии слабой интенсивности внутреннего вихря $\Gamma_2 \ll \Gamma_1^{(0)}$. Если же внутренний вихрь №2 имеет относительно малые размеры по сравнению с размерами основного вихря , то параметр λ будет большим $\lambda \sim R^2$, а безразмерные функции $\alpha_\lambda^{(2)}$ и $\beta_\lambda^{(2)}$ окажутся малыми: $\frac{\alpha_\lambda^{(2)}}{\alpha_0^{(1)}}$, $\frac{\beta_\lambda^{(2)}}{\beta_0^{(1)}} \sim \left(\frac{r_2}{R_1}\right)^3$. Здесь r_2 и R_1 характерные горизонтальные размеры внутреннего и основного вихрей, где $r_2 = \sqrt{a_2 b_2}$ и $R_1 = \sqrt{a_1 b_1}$. В качестве малого вихря №2 вполне подойдет вихрь с условием $\frac{r_2}{R_1} < \frac{1}{3}$. Для него $\frac{\alpha_\lambda^{(2)}}{\alpha_0^{(1)}}, \frac{\beta_\lambda^{(2)}}{\beta_0^{(1)}} < \frac{1}{27}$. Тогда ограничение на интенсивность Γ_2 может быть снята и допустим случай $\Gamma_2 \sim \Gamma_1^{(0)}$. Наконец, если вложенный вихрь сплюснут по вертикали значительно больше, чем сплюснут основной вихрь $K_1 \gg K_2$, то вихрь №2 индуцирует слабые скорости по сравнению со скоростями основного вихря. В этом случае влиянием вложенного вихря на основной вихрь также можно пренебречь.

Итак, нами показано, что задача о композитном вихре, составленном из основного вихря и помещенного внутрь его вихря, меньшего размера, который слабо влияет на деформацию границы основного вихря, может быть оправдана из физических соображений Если “малый” вихрь, окажется не таким уж малым, то условие применимости такого подхода требует слабой интенсивности внутреннего вихря. Если же малый вихрь имеет характерный размер порядка одной трети от размера основного вихря или меньше, то

ограничение на интенсивность малого вихря можно снять. Наконец слабое поле течений индуцируется тонким по вертикали вихрем №2 при любых горизонтальных размерах и произвольных значениях потенциальной завихренности σ_2 . В результате сформулированы физические требования на параметры внутреннего вихря №2, при которых становится возможной исходная постановка задачи. Обратим внимание на то, что требование слабого влияния вложенного вихря (вихрь №2) на границу основного вихря (вихрь №1) никак не затрагивает знак потенциальной завихренности σ_2. Допустимы оба варианта $\sigma_2 > 0$ и $\sigma_2 < 0$. Далее будет показано, что выбор знака у σ_2 окажется важным.

Собственная завихренность σ_2 вихря №2 является свободным параметром. Вращение частиц в зоне ядра малого вихря будет зависеть от знака полной завихренности $(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_f)$. Напомним, что знак потенциальной завихренности частиц в зазоре между границами вихрей №1 и №2 $(\sigma_1 + \sigma_f)$ определен, т.к. согласно соотношению (107) σ_1 и σ_f жестко связаны между собой. В результате $(\sigma_1 + \sigma_f) > 0$. При $(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_f) > 0$ завихренность композитного вихревого ядра всюду положительная. В результате все частицы в ядре вращаются против часовой стрелки. Если же реализуется случай $(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_f) < 0$, то в зоне внутреннего ядра вращение частиц будет циклоническим – в Южном полушарии по часовой стрелке. При циклоническом вложенном нестационарном вихре в зазоре меду границами обоих вихрей реализуется антициклоническая нестационарная зона, состоящая их трех компонент: антициклонического фонового движения, антициклонического вращения основного вихря и антициклонической “юбки” малого вихря. Все это приводит к формированию в зазоре между границами вихрей достаточно мощной струи антициклонического направления вращения частиц. Поскольку внутренний вихрь нестационарен и эволюционирует, то и струя в зазоре тоже нестационарна.

В этом случае при выполнении неравенства $(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_f) < 0$ композитный вихрь будет во внутренней зоне ядра циклоном, а периферийной части ядра антициклоном. Наконец существует и пограничный случай, когда $(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_f) = 0$. Тогда в ядре малого вихря движение вообще отсутствует, а в зазоре меду границами вихрей по-прежнему должно наблюдаться струя антициклонического движения.

Для оценки собственной энергии композитного вихря с нестационарным вложением воспользуемся выражением, полученным в Главе 1 для стационарного случая (формула (41)), которое, как будет показано ниже, остается справедливым и в данной постановке. Приведем его еще раз:

$$\frac{H}{H_0} = \frac{{\Gamma_1}^2}{{\Gamma_1^{(0)}}^2} + \frac{{\Gamma_2}^2}{{\Gamma_1^{(0)}}^2} M^{5}/_{2} \frac{K_2}{K_1} \frac{{\chi_0}'^{(2)}}{{\chi_0}'^{(1)}} + \frac{\Gamma_1\Gamma_2}{{\Gamma_1^{(0)}}^2} M^{3}/_{2} \frac{K_2}{K_1} + \frac{\Gamma_1\Gamma_2}{{\Gamma_1^{(0)}}^2} M \frac{{\chi_{\lambda'}}'^{(2)}}{{\chi_0}'^{(1)}} + \frac{1}{2} \frac{\Gamma_1\Gamma_2}{{\Gamma_1^{(0)}}^2} M K_2 \frac{{\lambda_2}'}{{\chi_0}'^{(1)} \sqrt{\left(\varepsilon_2 + {\lambda_2}'\right)\left({\varepsilon_2}^{-1} + {\lambda_2}'\right)\left({K_2}^2 + {\lambda_2}'\right)}} \quad (100)$$

Здесь, как и ранее, $\Gamma_1^{(0)} = \frac{2}{-\beta_0^{(1)} + \varepsilon_1^2 \alpha_0^{(1)}}$ относительная завихренность основного вихря без вложения. Параметр M определяет относительный размер площади внутреннего вихря $M = \frac{S_2}{S_1} = \frac{a_2 b_2}{a_1 b_1}$ в плане. M лежит в диапазоне $0 < M < 1$ и является свободным параметром задачи. Относительная завихренность вихря №1 $\Gamma_1 = \frac{\sigma_1}{\Gamma}$ должна задаваться, а эта же характеристика для вихря №2 $\Gamma_2 = \frac{\sigma_2}{\Gamma}$ является тоже свободным параметром задачи. Таким образом соотношение (27) описывает относительную энергию композитного вихря в зависимости от размеров вложенного вихря (параметр M) и от завихренности его ядра. Остальные безразмерные характеристики, входящие в (27), ${\chi_0}'^{(1)}, {\chi_0}'^{(2)}, {\chi_{\lambda'}}'^{(2)}, {\lambda_2}', \varepsilon_2, K_1, K_2$ – описывают геометрию композитного вихря.

Соотношение (27), выведенное для стационарного композитного вихря, ухватывает все важные свойства нестационарного композитного вихря, но в нашем случае часть параметров зависят от времени. В частности, переменными являются ${\chi_0}'^{(2)}$, ${\chi_{\lambda'}}'^{(2)}$ через периодическую зависимость от времени. От времени периодически зависят ε_2 и ${\lambda_2}'$. Однако, все указанные функции положительные и знака не меняют, поэтому для качественных оценок ${\chi_0}'^{(2)}, {\chi_{\lambda'}}'^{(2)}, \varepsilon_2$ и следует заменить на средние значения. Величины Γ_1, $K_1, K_2, M, {\chi_0}'^{(1)}$ останутся постоянными.

Важным моментом при определении энергии является знак завихренности Γ_2. Временно обозначим

$$A = M^{5}/_{2} \frac{K_2}{K_1} \frac{{\chi_0}'^{(2)}}{{\chi_0}'^{(1)}} \qquad B = M^{3}/_{2} \frac{K_2}{K_1} + M \frac{{\chi_{\lambda'}}'^{(2)}}{{\chi_0}'^{(1)}} + \frac{1}{2} M K_2 \frac{{\lambda_2}'}{{\chi_0}'^{(1)} \sqrt{\left(\varepsilon_2 + {\lambda_2}'\right)\left({\varepsilon_2}^{-1} + {\lambda_2}'\right)\left({K_2}^2 + {\lambda_2}'\right)}}$$

Проводя анализ, аналогичный выполненному ранее для стационарного композитного вихря, и полагая $\Gamma_1 = \Gamma_1^{(0)}$, мы можем записать выражение для безразмерной энергии в виде:

$$\frac{H}{H_0} = 1 + \frac{{\Gamma_2}^2}{{\Gamma_1^{(0)}}^2} A + \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1^{(0)}} B \tag{101}$$

где A и B положительные функции, зависящие от геометрических характеристик обоих вихрей. Их явный вид совпадает с соответствующими выражениями, полученными в Главе 1. Поскольку параметры вихря №2 меняются по периодическому закону, то A и B также периодические функции, колеблющиеся вокруг средних положительных значений $\langle A \rangle$ и $\langle B \rangle$ соответственно. В результате в среднем по траектории вложенного вихря №2 следует ожидать следующей связи средней энергии композитного вихря $\langle H \rangle$ с энергией вихря без вложений H_0 :

$$\frac{\langle H \rangle}{H_0} = 1 + \frac{{\Gamma_2}^2}{{\Gamma_1^{(0)}}^2} \langle A \rangle + \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1^{(0)}} \langle B \rangle \tag{102}$$

Отметим, что в постановке задачи о нестационарном композитном вихре, завихренность Γ_2 является свободным параметром. Возникает вопрос: при каких условиях на Γ_2 композитный вихрь имеет меньшую энергию, чем однородный вихрь без вложений. Ввиду квадратичной зависимости $\frac{\langle H \rangle}{H_0}$ от $\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1^{(0)}}$, на этот вопрос легко ответить.

Повторяя рассуждения, проведенные в Главе 1 при анализе энергетической выгоды стационарного композитного вихря, легко показать, что в диапазоне значений

$$-\frac{\langle B \rangle}{\langle A \rangle} < \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1^{(0)}} < 0 \tag{103}$$

Величина $\frac{{\Gamma_2}^2}{{\Gamma_1^{(0)}}^2} \langle A \rangle + \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1^{(0)}} \langle B \rangle < 0$ отрицательна. Следовательно, в этом случае нестационарный композитный вихрь обладает меньшей энергией, чем однородный вихрь без вложений. При выполнении условия

$$\Gamma_2 = -\frac{1}{2} \Gamma_1^{(0)} \frac{\langle B \rangle}{\langle A \rangle} \tag{104}$$

наблюдается минимум энергии композитного вихря:

$$\frac{\langle H \rangle_{min}}{H_0} = 1 - \frac{1}{4} \frac{\langle B \rangle^2}{\langle A \rangle} \tag{105}$$

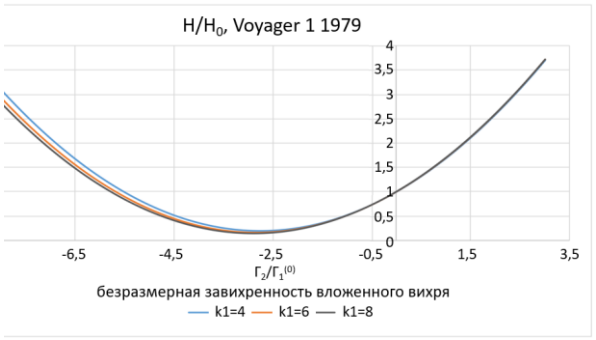
Итак, композитный вихрь, составленный из стационарного однородного по потенциальной завихренности вихря №1 и погруженного в него вихря №2 с условием, что вихрь №2 слабо влияет на поведение границы основного вихря №1, может энергетически более выгодным, чем однородный стационарный вихрь без внутреннего вложения. Этот эффект имеет место, когда завихренность ядра вихря №2 противоположна по знаку завихренности основного вихря №1 и лежит в некотором ограниченном диапазоне значений

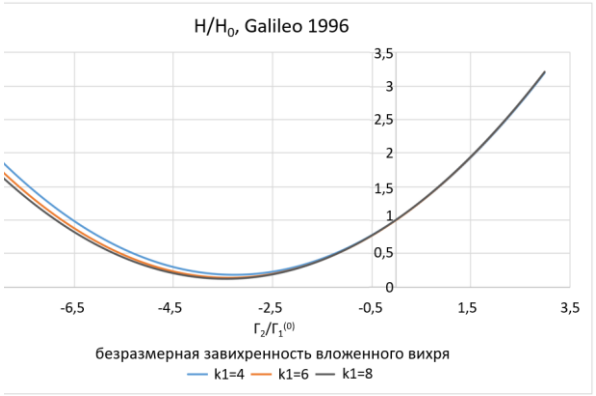
(114). Одновременно с уменьшением общей энергии в зазоре между границами вихрей №1 и №2 должна наблюдаться более интенсивная по скорости нестационарная струя. Если потенциальная завихренность вихря №2 лежит в середине указанного диапазона, то такой композитный вихрь имеет минимальную энергию и соответственно создает наиболее интенсивную периферийную струю антициклонического вращения.

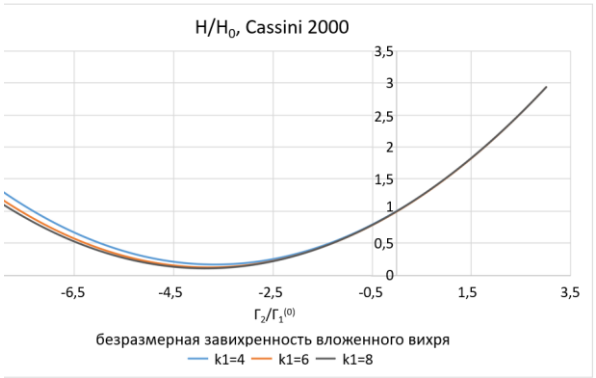
Если безразмерный параметр $\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1^{(0)}}$ лежит вне диапазона $\left(-\frac{\langle B\rangle}{\langle A\rangle}, 0\right)$, то для такого композитного вихря средняя энергия $\langle H\rangle$ оказывается больше, чем энергия вихря без вложений. Это соответствует либо положительным знаку потенциальной завихренности внутреннего вихря $\sigma_2 > 0$, либо слишком большому значению по модулю $|\sigma_2|$ отрицательному значению $\sigma_2 < 0$. Последнее в безразмерной записи означает

$$\frac{|\Gamma_2|}{\Gamma_1^{(0)}} > \frac{\langle B\rangle}{\langle A\rangle} \qquad (106)$$

На рис. 2.6 представлена графическая зависимость собственной энергии композитного вихря $\frac{\langle H\rangle}{H_0}$ от относительной завихренности вложенного вихря $\Gamma_2/\Gamma_1^{(0)}$ для условий различных космических миссий.







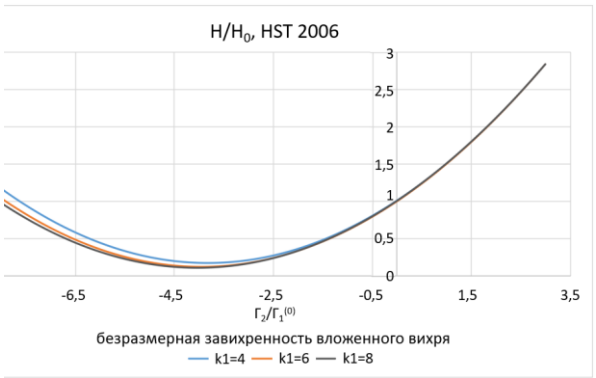


Рис. 2.6 Зависимость энергии нестационарного композитного вихря $\frac{\langle H \rangle}{H_0}$ (ось ординат) от завихренности вложенного вихревого образования $\Gamma_2/\Gamma_1^{(0)}$ (ось абсцисс), рассчитанные для условий миссий космических аппаратов Voyager–1,2 (1979), Galileo (2009), Cassini (1995–2003) и наблюдений с орбитального телескопа Hubble. Кривые разных цветов соответствуют разным значениям параметра K_1 из диапазона $4 \leq K_1 \leq 8$.

Из рисунков следует, что для отрицательных значений потенциальной завихренности вложенного вихря возможно уменьшение энергии композитного вихря $\frac{\langle H \rangle}{H_0} < 1$ при условии, что относительная завихренность $\Gamma_2/\Gamma_1^{(0)}$ принадлежит некоторому диапазону отрицательных значений. Для всех миссий и выбранных значений параметра K_1 энергия имеет минимум $\frac{\langle H \rangle_{min}}{H_0} \sim 0/2$, лежащий в интервале $-4.5 \lesssim \Gamma_2/\Gamma_1^{(0)} \lesssim -2.5$. Для положительных и слишком больших по модулю отрицательных $\Gamma_2/\Gamma_1^{(0)}$ энергия композитного вихря возрастает $\frac{\langle H \rangle}{H_0} > 1$.

Главный вывод данной работы состоит в следующем. Энергия композитного вихря, состоящего из основного стационарного антициклонического вихря и вложенного в него нестационарного циклонического вихря при некоторых ограничениях на его завихренность, оказывается меньше, чем энергия однородного по завихренности стационарного вихря. Напомним, что для стационарной модели композитного вихря (Суетин и др., 2023) в любых условиях внутренний вихрь является циклоническим, но энергия такого вихря всегда превышает энергию однородного вихря без вложений. Таким образом обе модели стационарного и нестационарного композитного вихрей демонстрирую близкие кинематические свойства: внутри циклоническое вращение частиц, на периферии антициклоническое струйное движение. Однако энергии у этих образований различные. На создание (или энергетического поддержания) стационарного композитного вихря требуется больше энергии, чем на создание аналогичного нестационарного образования. Поэтому следует ожидать, что в реальности существование в целом антициклонического образования с нестационарным циклоническим внутренним вложением, слабо влияющим на внешнюю границу основного вихря, является более вероятным, чем существование однородного по завихренности вихревого образования и тем более существование стационарного композитного вихря, состоящего из основного антициклонического и вложенного в него циклонического вихрей. Однако наше исследование принципиально не “отметает” возможности существования всех указанных вихревых образований. Просто на

создание или поддержание некоторых образований требуется больше энергии, чем на создание других. Если энергии хватает, что возможны любые варианты. Если энергии мало, что прежде всего возникнет именно исследуемый нами нестационарный композитный вихрь.

2.6 Результаты сравнения с натурными наблюдениями

Поскольку мы опираемся на интерпретацию БКПЮ как вихревого образования, стоящего из основного антициклонического вихря и вложенного в него циклонического вихря меньшего размера, то это свойство, наблюдаемое в натурных условиях на Юпитере, мы сравниваем с результатами наших теоретических исследований. Как в теории, так и в реальных условиях Юпитера наблюдается наличие интенсивной антициклонической струи в периферийной части БКПЮ [Choi et al., 2007; Liu and Salazar, 2022] и довольно слабое циклоническое движение в центральной части вихревого образования. Эти свойства являются главными при оценке адекватности теории. Отметим, что одним из требований стационарной модели композитного вихря является условие софокусности эллипсоидальных ядер. Причем для стационарного композитного вихря, оба свойства автоматически следуют из теории. А для нестационарного случая оба свойства получаются при наличии вложенного вихря циклонического знака. Сравнение двух подходов по энергиям говорит в пользу модели нестационарного композитного вихря, поскольку на его формирование потребуется меньше энергии, чем на создание стационарного вихревого образования.

Однако в обоих подходах кроются и недостатки. Одним из требований стационарной модели композитного вихря является условие софокусности эллипсоидальных ядер. Это свойство требуется для математического упрощения задачи. Если его не требовать, то придется отказаться от эллипсоидальной формы вихревого ядра и тогда вместо простых ограничений на потенциальную завихренность двух вложенных эллипсоидальных вихрей, куда будут входить и значения потенциальных завихренностей обоих вихрей, получим систему двух интегро-дифференциальных уравнений на границы вихрей. Такая задача намного сложнее предложенной. Из исследований по натурным данным вместо софокусности присутствует свойство геометрического подобия соосных вихрей, составляющих композитный вихрь. Соосность вместо софокусности именно и приведет к

отказу от эллипсоидальности вихревых ядер и к упомянутой системе интегро-дифференциальных уравнений. Таким образом соосные вложенные вихри мы заменили на эквивалентные софокусные вихри. Это приводит к следующим деформациям вложенного вихря. При одинаковой площади в плане софокусные эллипсоиды в горизонтальной плоскости будут длиннее и тоньше соосных эллипсоидов, что в свою очередь уменьшает воздействие внутреннего вихря на основной вихрь. Из софокусности последуют также дополнительные ограничения на длину вертикальной полуоси вложенного вихря.

В теории нестационарного композитного вихря мы пренебрегли деформирующим воздействием вложенного вихря на границу основного вихря, оставив возможность основного вихря воздействовать на вложенный в него внутренний вихрь. Такое воздействие приводит к специфическому поведению внутреннего вихря: он не может вытянуться в нить, оставаясь локализованным образованием. Но его граница может, в том числе, совершать слабые нутационные колебания вблизи стационарной точки равновесия. Со стороны такие колебания будут похожи на “шевеление” границы вложенного вихря, которые трудно определить при стандартной обработке натурных наблюдений. При вычислении поля скорости в вихре, такие колебания должны сглаживаться и быть незаметными. Зато в таком подходе все важные определяющие свойства вихря (потенциальная завихренность его ядра, размеры ядра) будут свободными параметрами задачи. Мы можем распоряжаться этими параметрами, как угодно. Однако основное требование малость деформирующего воздействия вложенного вихря на границу основного вихря должно быть выполнено. Важным качественным свойством нестационарного подхода, является то, что энергия композитного вихря с нестационарным циклоническим вложением меньше, чем энергия однородного вихря без вложений. Именно этот факт склоняет авторов работы к выводу, что для объяснения существования композитного вихря более подходит именно теория композитного нестационарного вихря с циклоническим вложением.

2.7 Поведение слабого нестационарного вихря внутри ядра стационарного вихревого образования

Выше показано, что в случае существования композитного вихря, состоящего из двух стационарных вихрей, вложенных в друг друга, каждый из вихрей влияет на поведение границы другого вихря. Условие стационарности и софокусности приводит к тому, что

параметры обоих вихрей жестко привязаны к друг другу. При этом из физических соображений понятно, что если размер внутреннего вихря мал по сравнению с размерами большого вихря и его интегральная потенциальная завихренность (интенсивность внутреннего вихря) слаба по сравнению с основным вихрем, то внутренний вихрь не должен сильно влиять на поведение границы большого вихря. В свою очередь большой вихрь и фоновое течение влияют на малый вихрь, деформируя его границу, в то время как влияние малого вихря практически не сказывается на поведении границы большого вихря. Тогда границу основного вихря можно по-прежнему считать стационарной и не связанной с малым вихрем, а поведение малого вихря рассматривать как его вынужденную эволюцию в поле течения большого вихря и общего фонового течения. При этом жесткая связь между интенсивностями обоих вихрей исчезает и появляется возможность интерпретировать малый вихрь как нестационарный вихрь с произвольной интенсивностью. Эту часть исследования можно рассматривать как относительно независимую работу по изучению поведения малого вихря внутри ядра большого вихря. Фоновым течением для малого вихря является суперпозиция течения от большого вихря внутри его ядра и горизонтального баротропного течения со сдвигом, в которое помещена вся вихревая структура. Оба указанных течения линейны по горизонтальным координатам и, следовательно, если внутренний вихрь имеет эллипсоидальную форму ядра в начальный момент времени, то далее он так и останется эллипсоидальным вихрем. Это позволяет применить теорию поведения эллипсоидальных вихрей на фоне баротропных равнозавихренных течений. Эта теория первоначально изложена в работе (Жмур, Панкратов 1989, затем излагалась в монографии (Жмур 2011), но наиболее строго показана в работе (Жмур, Суетин, 2023). Согласно выводам этого подхода эллипсоидальный вихрь в равнозвихренном баротропном фоновом потоке движется как целое со скоростью фонового течения, приходящегося по центру вихря. Одновременно его граница (форма) может вращаться, испытывать нутационные колебания или неограниченно вытягиваться. Всего три типа поведения границы вихревого ядра. По какому сценарию пойдет эволюция такого вихря зависит от безразмерного параметра $\left|\frac{\gamma}{e}\right|$ внешнего к вихрю течения $\vec{u}_f$, где $\gamma = \frac{1}{2} rot_z \vec{u}_f$, а e – коэффициент деформации этого течения. При $\left|\frac{\gamma}{e}\right| > 1$ возможны режимы – вращения и нутационных колебаний и невозможен режим неограниченного вытягивания. Другими словами, при $\left|\frac{\gamma}{e}\right| > 1$ в своей эволюции вихрь остается локализованным образованием. При $\left|\frac{\gamma}{e}\right| < 1$ возможны все три режима поведения вихрей, в том числе и неограниченное

вытягивание вихря. Более тонкое описание режимов содержится в работе (Жмур, Суетин, 2023).

Обсудим вначале вопрос о режимах поведения малого вихря.

Деформационная часть произвольного фонового баротропного течения, линейная по горизонтальным координатам, может быть записана в виде

$$\begin{pmatrix} u_f \\ v_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & -\gamma_1 \\ \gamma_2 & -e_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{107}$$

В таком течении эволюция параметров вихря происходит по следующим правилам [Жмур, Панкратов 1989; Жмур 2011]

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon} = 2\varepsilon\left(e_1 cos2\theta - \frac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma_2) sin2\theta\right) \\ \dot{\theta} = \Omega(\varepsilon, K) + \frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2) - \frac{\varepsilon^2 + 1}{\varepsilon^2 - 1}\left(e_1 sin2\theta + \frac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma_2) cos2\theta\right. \end{cases} \tag{108}$$

Здесь e_1, γ_1, γ_2 коэффициенты фонового течения, связанные с некоторой системой горизонтальных координат x, y. Причем $\gamma_1 + \gamma_2 = rot_z \vec{u}_f$. Параметр $\varepsilon = \frac{a}{b}$ описывает горизонтальную вытянутость вихревого ядра, а $K = \frac{\tilde{c}}{\sqrt{ab}}$ – его сплюснутость по вертикали. Угол θ – угол ориентации вихревого ядра в выбранной системе координат x, y (см. рис. 2.7). Параметры a, b – горизонтальные полуоси эллипсоида, $\tilde{c} = \frac{N}{f} c$, где c- вертикальная полуось. В работе [Жмур, Панкратов 1989] можно найти детали.

В другой аналогичной системе координат $\tilde{x}, \tilde{y}$, повернутой на угол α относительно x, y фоновое течение останется линейным по $\tilde{x}, \tilde{y}$, но с другими коэффициентами $\tilde{e}_1, \tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2$ вместо e_1, γ_1, γ_2

$$\left\{\begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{e}_1 & -\tilde{\gamma}_1 \\ \tilde{\gamma}_2 & -\tilde{e}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}\right. \tag{109}$$

Поведение характеристик вихревого ядра будет описываться такими же как (2п) уравнениями, в которых следует сделать очевидные замены: $e_1, \gamma_1, \gamma_2, \theta$ на $\tilde{e}_1$, $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \tilde{\theta}$ соответственно. При этом старые $e_1, \gamma_1, \gamma_2, \theta$ и новые $\tilde{e}_1$, $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \tilde{\theta}$ параметры связаны между собой отношениями

$$\begin{aligned} \tilde{e}_1 &= e_1 cos2\alpha - \frac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma_2) sin2\alpha \\ \tilde{\gamma}_1 &= e_1 sin2\alpha + \frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2) + \frac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma_2) cos2\alpha \\ \tilde{\gamma}_2 &= -e_1 sin2\alpha + \frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2) - \frac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma_2) cos2\alpha \end{aligned} \tag{110}$$

$$\tilde{\theta} = \theta - \alpha$$

Подберем такую систему координат $\tilde{x}, \tilde{y}$, в которой коэффициенты $\tilde{\gamma}_1$и $\tilde{\gamma}_2$ совпадают: $\tilde{\gamma}_1$= $\tilde{\gamma}_2$. В такой системе координат коэффициент $\tilde{e}_1$ является коэффициентом деформации.

В качестве исходной системы координат x, y выберем удобную систему, в которой ось x направлена на Восток, ось y на Север. В такой системе координат внутри ядра основного вихря реализуется течение, являющееся фоновым для малого вихря:

$$\begin{cases} u_f = -(\Gamma + \frac{1}{2}\sigma_1\beta_0^{(1)})y \\ v_f = \frac{1}{2}\sigma_1\alpha_0^{(1)}x \end{cases} \quad (111)$$

При этом в явном виде представлены коэффициенты e_1, γ_1, γ_2:

$$\begin{gathered} e_1 = 0 \\ \gamma_1 = \Gamma + \frac{1}{2}\sigma_1\beta_0^{(1)} \\ \gamma_2 = \frac{1}{2}\sigma_1\alpha_0^{(1)} \end{gathered} \quad (112)$$

При повороте на угол α, коэффициенты $(e_1, \gamma_1, \gamma_2)$ в уравнении (119) следует заменить на $\tilde{e}_1$, $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2$ согласно соотношениям (121). Условие равенства $\tilde{\gamma}_1 = \tilde{\gamma}_2$ даст уравнение для угла поворота α

$$\begin{gathered} e_1 sin2\alpha + \frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2) + \frac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma_2)cos2\alpha \\ = -e_1 sin2\alpha + \frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2) - \frac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma_2)cos2\alpha \end{gathered} \quad (113)$$

Откуда следует

$$\begin{gathered} cos2\alpha = 0 \quad sin2\alpha = \pm 1 \quad \alpha = \pm\frac{\pi}{4} \\ \tilde{e}_1 = e_1 cos2\alpha - \frac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma_2)sin2\alpha = \mp\frac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma_2) \\ |\tilde{e}_1| = \frac{1}{2}|\gamma_1 - \gamma_2| = \frac{1}{2}\left|\Gamma + \frac{1}{2}\sigma_1\left(\beta_0^{(1)} - \alpha_0^{(1)}\right)\right| \\ \tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_1 = \tilde{\gamma}_2 = \frac{1}{2}\left(\Gamma + \frac{1}{2}\sigma_1(\beta_0^{(1)} + \alpha_0^{(1)})\right) \end{gathered} \quad (114)$$

Искомый параметр $\left|\frac{\gamma}{e}\right|$, от которого зависит поведение вихря, в данном случае представлен как $\left|\frac{\tilde{\gamma}}{\tilde{e}_1}\right|$

$$\left|\frac{\tilde{\gamma}}{\tilde{e}_1}\right| = \frac{\Gamma + \frac{1}{2}\sigma_1(\beta_0^{(1)} + \alpha_0^{(1)})}{\left|\Gamma + \frac{1}{2}\sigma_1(\beta_0^{(1)} - \alpha_0^{(1)})\right|} > 1 \quad (115)$$

Вывод – малый вихрь, двигаясь в поле течения большого вихря на фоновом течении как целое, может только вращаться и испытывать нутационные колебания с ограниченной деформацией полуосей [Жмур, Суетин 2023]. Какой из двух указанных режимов реализуется зависит не только от интенсивностей обоих вихрей, но и от начальной ориентации и геометрии внутреннего вихря. Следовательно, малый вихрь, помещенный внутрь большого вихря, останется нестационарным локализованным образованием. Он может двигаться внутри основного вихря как целое и одновременно ограниченно деформироваться по размерам полуосей и по величине энергии. При этом направления его горизонтальных полуосей испытывают либо ограниченные колебания вокруг вертикали, либо вращаются вокруг вертикальной оси. Неограниченно вытягиваться в горизонтальной плоскости таким вихрям запрещено.

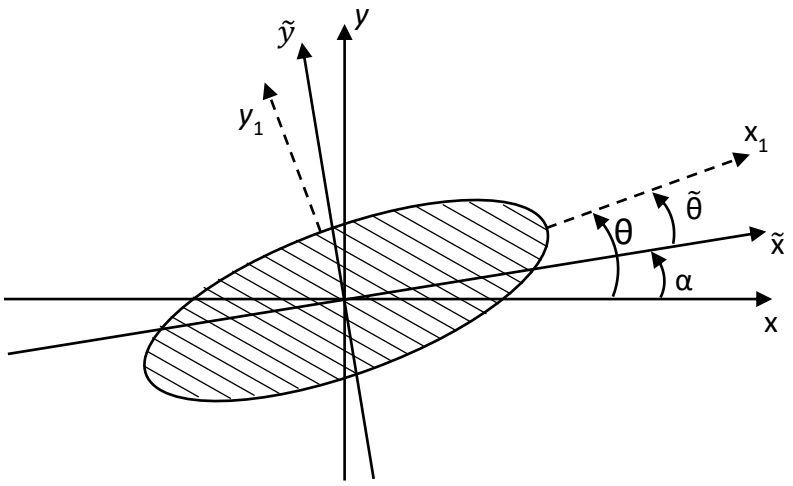


Рис.2.7. Положение вихря в старой x, y и новой системе координат $\tilde{x}, \tilde{y}$. Вид сверху.

Выводы по Главе 2:

Вложенный вихрь слабой интенсивности или же вихрь с малыми горизонтальными размерами или сильно сплюснутый по вертикали слабо влияют на деформацию основного вихря. В этом случае решается задача о поведении внутреннего вихря под действием течения основного вихря при воздействии фонового течения. Оба вихря имеют эллипсоидальную форму ядра.

В результате получены следующие свойства.

1. Если центры вихрей не совпадают, то вложенный вихрь как целое движется внутри основного вихря по эллиптической траектории. Такое движение периодическое,

период для всех таких вихрей одинаков и зависит от характеристик обоих вихрей и сдвига фонового течения. Но не зависит от исходного положения вложенного вихря в ядре основного вихревого образования.

2. Во время своего движения как целого форма внутреннего вихря ограниченно деформируется. В системе координат, движущей со скоростью центра вложенного вихря, форма ядра внутреннего вихря может вращаться или колебаться вокруг вертикальной оси с одновременным ограниченным изменением длин горизонтальных полуосей. Деформационное движение тоже периодическое, но с другим периодом нежели период движения по эллиптическим траекториям. Период деформационного движения зависит как от параметров вихрей и фонового течения, так и от начальных условий в геометрии вложенного вихря. Подчеркнем, что вложенный вихрь не может вытягиваться в нить.
3. Если центры вложенного и основного вихрей совпадают, то вложенный вихрь как целое не движется, но испытывает периодическую эволюцию формы ядра, описанную выше: вращение или колебание формы вокруг вертикальной оси с одновременным ограниченным изменением длин горизонтальных полуосей. Какой из вариантов вращение или колебание ядра будет иметь место зависит от начальных условий на вытянутость вихря по горизонтали и его ориентацию в пространстве.
4. Собственная энергия композитного вихря может быть меньше энергии однородного стационарного вихря при условии, что потенциальная завихренность вложенного вихря противоположна по знаку завихренности основного вихря и лежит в некотором диапазоне значений. Потенциальной завихренности вложенного вихря из середине указанного диапазона соответствует минимальной энергии композитного вихря. Этот свойство подчеркивает энергетическую выгоду в пользу существования композитных вихрей с нестационарным вложением, слабо влияющим на границу основного.

ГЛАВА 3. СТАЦИОНАРНЫЙ ТРЕХ-КОМПОНЕНТНЫЙ КОМПОЗИТНЫЙ ВИХРЬ И СТРУКТРНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ

3.1 Постановка задачи стационарного композитного вихря

Перейдём к построению модели нестационарного композитного вихря. Как и в предыдущих главах, мы остаёмся в рамках квазигеострофического приближения для вращающейся стратифицированной среды с постоянной частотой Вяйсяля-Брента. Напомним, что в этом приближении система уравнений динамики несжимаемой жидкости сводится к уравнению для функции тока, которое уже было выписано нами в Главе 1 (формула (1)) и использовалось в Главе 2. Для удобства читателя приведём его ещё раз:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\Delta_h\psi + \frac{\partial}{\partial z}\frac{f^2}{N^2}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) + J_h\left(\psi, \Delta_h\psi + \frac{\partial}{\partial z}\frac{f^2}{N^2}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = 0. \qquad (116)$$

Здесь (x, y) горизонтальные координаты; z- вертикальная координата; t – время; $N = const$ частота Вяйсяля-Брента; $f = const$ – параметр Кориолиса; $\Delta_h = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа по горизонтальным координатам; $J_h(A, B) = \frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial B}{\partial x}$ – определитель Якоби (якобиан). Поле скорости (u, v, w) выражается через функцию тока соотношениями (2), которые уже были получены в Главе 1 и не претерпевают изменений. Напомним, что уравнение (1) и соотношения (2) выписаны с погрешностью порядка числа Россби $Ro = \frac{U}{fL} \ll 1$, обоснование чего детально проведено в Главе 1. Как и ранее, мы ограничиваемся геострофической компонентой движения, а агеострофические эффекты остаются за рамками рассмотрения.

Физический смысл уравнения (1) состоит в сохранении потенциальной завихренности σ, определяемой соотношением (3), для движущихся жидких частиц. Это ключевое свойство, установленное в Главе 1, остаётся справедливым и в нестационарной постановке. Лагранжев инвариант σ, представленный соотношением (3), также выписан с точностью до числа Россби. Следует отметить, что $\Delta_h\psi = rot_z\vec{u}$ и тогда справедлива еще одна запись для потенциальной завихренности

$$\sigma = rot_z\vec{u} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{f^2}{N^2}\frac{\partial\psi}{\partial z} \qquad (117)$$

Как и в Главе 2, при постоянных N и f удобно перейти к растянутой вертикальной координате $\tilde{z} = \frac{N}{f} z$. Напомним, что это преобразование позволяет свести сложный эллиптический оператор к классическому трёхмерному оператору Лапласа, что уже было подробно обосновано в Главе 1. В результате потенциальная завихренность частиц выражается через трёхмерный лапласиан в растянутом пространстве $(x, y, \tilde{z})$:

$$\sigma = \Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial \tilde{z}^2} \qquad (118)$$

Как и ранее, мы рассматриваем кусочно-постоянное распределение потенциальной завихренности, при котором внутри вихревого ядра V она равна σ_{in}, а вне его — σ_{out} (соотношение (5)). Напомним, что этот подход уже использовался нами в Главах 1 и 2 и восходит к классическим работам [Жмур, Панкратов 1989; Meacham 1992; Жмур, Щепеткин 1991].

Фоновое течение, как и ранее, описывается однородным распределением потенциальной завихренности $\Delta\psi = \sigma_{out}$ (соотношение (6)) и представляет собой равнозавихренный поток. В частном случае покоящейся на бесконечности жидкости σ_{out} = 0, что также уже обсуждалось в Главе 1. Из (6) решение уравнения $\psi = \psi_f(x, y, \tilde{z})$ представляет собой функцию тока фонового течения. Фоновое течение мы будем задавать, поэтому $\psi_f(x, y, \tilde{z})$ будем считать известной функцией.

В упомянутых работах (Жмур, Панкратов 1989; Meacham 1992; Жмур, Щепеткин 1991) в качестве формы вихревого ядра V выбирался эллипсоид, а фоновые течения представляли собой баротропный равнозавихренный поток в (Жмур, Панкратов 1989), отсутствие фонового течения в (Meacham 1992) и бароклинное горизонтальное течение с постоянным вертикальным сдвигом в работе (Жмур, Щепеткин 1991). Во всех случаях вид фонового течения определял значение σ_{out}.

Отклонение от фонового течения, связанное с наличием вихря, как и в Главах 1 и 2, описывается функцией тока ψ_v, для которой справедливо распределение (7). Общая функция тока представляется в виде суммы фонового и вихревого вкладов (соотношение (8)), что полностью соответствует структуре решения, использованной нами ранее.

Решение задачи (7) для произвольной формы ядра V в растянутом пространстве $(x, y, \tilde{z})$ имеет вид объёмного интеграла (9а), который уже был получен и проанализирован

в Главе 1. Напомним, что это решение обладает важным свойством: функция тока и её первые производные непрерывны, что обеспечивает автоматическое выполнение динамического граничного условия на поверхности вихревого ядра.

При этом форма ядра V может зависеть от времени как от параметра, $\sigma = \sigma_{in} - \sigma_{out} = const$ – превышение потенциальной завихренности частиц ядра над потенциальной завихренностью частиц фонового течения. Отметим, что свойства решения (8), подробно обоснованные в Главе 1, остаются в силе и в нестационарной постановке. Напомним, что непрерывность функции тока и её первых производных обеспечивает непрерывность поля давления и геострофических скоростей, благодаря чему динамическое граничное условие на поверхности вихревого ядра выполняется автоматически при любой его деформации. Таким образом, основное внимание, как и ранее, должно быть уделено кинематическому условию.

С помощью соотношений (2) из (9) можно получить компоненты геострофических скоростей

$$u_v = \frac{-\partial \psi_v}{\partial y} = \frac{\sigma}{4\pi} \iiint_V \frac{(y - y')dx'dy'd\tilde{z}'}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (\tilde{z} - \tilde{z}')^2]^{\frac{3}{2}}} \qquad (119a)$$

$$v_v = \frac{\partial \psi_v}{\partial x} = \frac{-\sigma}{4\pi} \iiint_V \frac{(x - x')dx'dy'd\tilde{z}'}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (\tilde{z} - \tilde{z}')^2]^{\frac{3}{2}}} \qquad (119b)$$

Как и в Главах 1 и 2, для получения аналитического решения мы выбираем эллипсоидальную форму вихревого ядра. Напомним, что именно для эллипсоида объёмные интегралы в (136a) и (136b) вычисляются в замкнутом виде, что и было детально показано в Главе 2. Выражение для функции тока эллипсоидального вихря (10) уже было получено нами ранее и для удобства дальнейшего изложения приводится здесь без изменений.

Здесь $a, b -$ горизонтальные полуоси эллипсоида, $c -$ его вертикальная полуось, $\tilde{c} = \frac{N}{f} c$ – растянутая в $\frac{N}{f}$ раз вертикальная полуось, $\tilde{x}, \tilde{y}$ –горизонтальные оси координат, направленные по главным осям эллипсоида, $\tilde{z} = \frac{N}{f} z -$ растянутая в $\frac{N}{f}$ раз вертикальная ось системы координат. Нижний предел $\lambda(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ в интеграле (9) – положительный корень кубического уравнения

$$\frac{\tilde{x}^2}{a^2 + \lambda} + \frac{\tilde{y}^2}{b^2 + \lambda} + \frac{\tilde{z}^2}{\tilde{c}^2 + \lambda} = 1 \qquad (120)$$

Для пространства внутри ядра вплоть до его границы следует положить $\lambda = 0$. Как было показано в Главе 1, решение (10) остаётся справедливым и в случае, когда длины полуосей и ориентация эллипсоида зависят от времени. Наложение кинематического граничного условия приводит к трём возможным типам эволюции формы ядра: вращение с ограниченной деформацией, мутационные колебания с ограниченной деформацией и неограниченное вытягивание. Напомним, что в условиях атмосферы Юпитера, как было установлено в Главе 1, реализуются только первые два режима, при которых вихрь остаётся локализованным образованием. Существуют также параметры, при которых форма вихря застывает в фоновом течении — это стационарный вихрь, подробно изученный в Главе 2.

Горизонтальное поле скорости, соответствующее функции тока, как и в Главе 1, определяется соотношениями (10a) и (10b). Напомним ключевое свойство этого поля: внутри ядра (при $\lambda = 0$) скорости линейны по горизонтальным координатам, а функция тока является квадратичной. Это свойство, детально обоснованное в Главе 1, сохраняется и на поверхностях $\lambda = const > 0$, что в дальнейшем позволит нам использовать теорию эволюции эллипсоидальных вихрей в равнозавихренных течениях.

Как уже было установлено в Главе 1, поверхность $\lambda = const > 0$ соответствует эллипсоиду с полуосями $\left(A, B, \tilde{C}\right)$, где $A^2 = a^2 + \lambda$, $B^2 = b^2 + \lambda$, $\tilde{C}^2 = \tilde{c}^2 + \lambda$. Этот эллипсоид является софокусным по отношению к исходному, что устанавливается равенством (12). Напомним, что свойство софокусности, детально обоснованное в Главе 1, играет ключевую роль в нашей теории: именно оно обеспечивает линейность индуцированных скоростей на границах вложенных вихрей и позволяет получить замкнутые алгебраические уравнения для их потенциальных завихренностей.

На временах порядка нескольких земных лет Красное пятно Юпитера можно рассматривать как вихрь с застывшей формой ядра на фоне баротропного горизонтального течения со сдвигом. Малые времена – характерное время оборота частицы в вихре. Большие времена – это время деформации ядра вихря. За более чем 350 лет наблюдения за БКПЮ вихрь медленно деформировался, уменьшаясь в размерах. На временах порядка года деформацией можно пренебречь и считать вихрь стационарным. В таком походе БКПЮ изучался в работе [Жмур, Суетин, Чхетиани 2023]. Причем, в этой работе считалось, что ядро вихря заполнено равнозавихренными (в смысле потенциальной завихренности) частицами.

В Главах 1 и 2 нами были детально изучены однородный и двухкомпонентный стационарные композитные вихри. Естественным обобщением этой теории является

переход к трёхкомпонентной вихревой структуре. Как и ранее, мы предполагаем, что ядро вихря состоит из трёх вложенных друг в друга вихрей с потенциальными завихренностями σ_1, σ_2 и σ_3, причём $V_3 \subset V_2 \subset V_1$. Зазор между поверхностями среднего внутреннего и внешнего эллипсоидов обозначим $V_1 \cap V_2$. Аналогичный зазор между средним и самым маленьким вихрями обозначим как $V_2 \cap V_3$ В результате получим следующее распределение потенциальной завихренности в пространстве

$$\Delta\psi = \begin{cases} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_f), \text{если точка } (x, y, \tilde{z}) \text{ попадает в область } V_3 \\ (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_f), \text{если точка } (x, y, \tilde{z}) \text{попадает в область } V_2 \cap V_3 \\ (\sigma_1 + \sigma_f), \text{если точка } (x, y, \tilde{z}) \text{попадает в область} V_1 \cap V_2 \\ \sigma_f, \text{если точка } (x, y, \tilde{z}) \text{окажется в необласти } V_1 \end{cases} \quad (121)$$

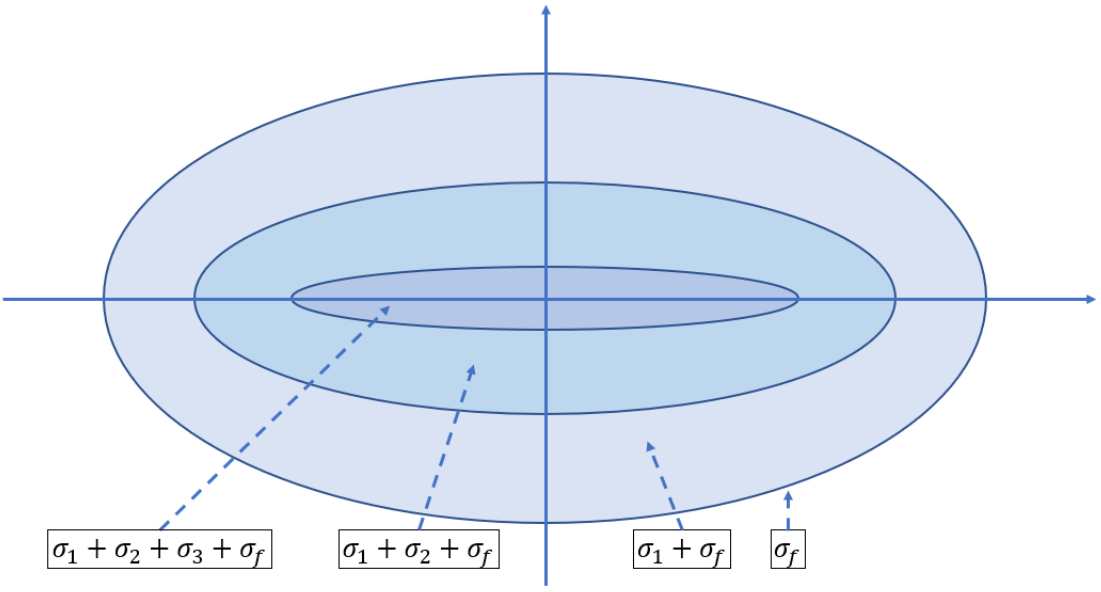


Рис. 3.1. Схематический рисунок композитного вихревого образования, стоящего из трех вихрей. Внешний (самый большой по размерам вихрь) №1 занимает пространство V_1. Промежуточный по размерам вихрь №2 занимает пространство V_2. Самый маленький внутренний вихрь №3 занимает пространство V_3. Во внутреннем вихре в области V_3 суммарная потенциальная

Подчеркнем, что рассматриваемое математическое пространство $(x, y, \tilde{z})$ растянуто по вертикали в $\frac{N}{f}$ раз по сравнению с обычным физическим пространством (x, y, z) . Далее система (13) будет нами использована как математическая постановка задачи, в которой требуется определить функцию тока $\psi(x, y, \tilde{z})$ во всем пространстве.

В данном случае мы выбрали направления горизонтальных осей (x, y), совпадающее с направлением главных осей эллипсоидов. Вообще говоря, постановка задачи (13) не требует эллипсоидальной формы ядер и подходит для любых односвязанных

и вложенных в друг друга объемов в качестве вихревых ядер. Этим свойством мы воспользуемся позже.

3.2 Решение задачи нестационарного композитного вихря. Структурная устойчивость

В силу линейности задачи (13), как и в Главах 1 и 2, представим решение в виде суммы фонового и вихревых вкладов (соотношение (14)). Фоновое течение ψ_f описывается уравнением (15) и, как и ранее, считается заданным. Функции тока ψ_1, ψ_2 и ψ_3 описывают соответственно внешний, средний и внутренний вихри и подчиняются уравнениям (16), (19) и (22), которые полностью аналогичны уравнению (17) Главы 1. Их решения имеют вид (17), (20) и (22) соответственно и получаются повторением рассуждений, проведённых в Главе 1 для эллипсоидального вихря.

Потенциальную завихренность σ_1 является собственной потенциальной завихренностью вихря №1. Решение (19) для эллипсоидальной формы ядра $F_1(x,y,\tilde{z}) = \frac{x^2}{{a_1}^2}+\frac{y^2}{{b_1}^2}+\frac{\tilde{z}^2}{{\tilde{c}_1}^2}-1=0$ и любой точки пространства $(x,y,\tilde{z})$ следует из (9)

$$\psi_1(x,y,\tilde{z},t) = \frac{-1}{4}\sigma_1 a_1 b_1 \tilde{c}_1 \int_{\lambda_1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{{a_1}^2+\mu}-\frac{y^2}{{b_1}^2+\mu} - \frac{\tilde{z}^2}{{\tilde{c}_1}^2+\mu}\right)\frac{d\mu}{\sqrt{({a_1}^2+\mu)({b_1}^2+\mu)({\tilde{c}_1}^2+\mu)}} \tag{122}$$

Параметр λ_1 для внутренних к области V_1 равен нулю $\lambda_1 = 0$. Для внешних к V_1 точек λ_1 определяется следующим образом: выбранная внешняя точка $(x,y,\tilde{z})$ лежит на поверхности одного из софокусных с эллипсоидов, которому соответствует $\lambda_1 > 0$, подчиняющееся уравнению

$$\frac{x^2}{{a_1}^2+\lambda_1}+\frac{y^2}{{b_1}^2+\lambda_1}+\frac{\tilde{z}^2}{{\tilde{c}_1}^2+\lambda_1}=1 \tag{123}$$

ψ_2 - описывает средний вложенный вихрь и подчиняется аналогичному (16) уравнению

$$\Delta\psi_2 = \begin{cases} \sigma_2, \text{если } (x, y, \tilde{z}) \in V_2 \\ 0, \text{если } (x, y, \tilde{z}) \notin V_2 \end{cases} \tag{124}$$

Решение (18) полностью повторяет рассуждения для большого вихря, решение для которого представлено ниже

$$\psi_2(x, y, \tilde{z}, t) = -\frac{1}{4}\sigma_2 a_2 b_2 \tilde{c}_2 \int_{\lambda_2}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{{a_2}^2 + \mu} - \frac{y^2}{{b_2}^2 + \mu} - \frac{\tilde{z}^2}{{\tilde{c}_2}^2 + \mu}\right) \frac{d\mu}{\sqrt{({a_2}^2 + \mu)({b_2}^2 + \mu)({\tilde{c}_2}^2 + \mu)}} \tag{125}$$

Аналогично σ_2 - является собственной потенциальной завихренностью вихря №2. Как и для первого вихря параметр λ_2 для внутренних к области V_2 равен нулю $\lambda_2 = 0$. Для внешних к V_2 точек λ_2 определяется аналогичным образом: выбранная внешняя точка $(x, y, \tilde{z})$ лежит на поверхности одного из софокусных с эллипсоидов, которому соответствует $\lambda_2 > 0$, подчиняющееся уравнению

$$\frac{x^2}{{a_2}^2 + \lambda_2} + \frac{y^2}{{b_2}^2 + \lambda_2} + \frac{\tilde{z}^2}{{\tilde{c}_2}^2 + \lambda_2} = 1 \tag{126}$$

Аналогично для ψ_3 имеем распределение потенциальной завихренности

$$\Delta\psi_3 = \begin{cases} \sigma_3, \text{если } (x, y, \tilde{z}) \in V_3 \\ 0, \text{если } (x, y, \tilde{z}) \notin V_3 \end{cases} \tag{127}$$

Поскольку все рассматриваемые эллипсоиды софокусные, то для любой выбранной внешней к вихрю точки пространства λ_1 , λ_2 и λ_3 связаны соотношениями

$$\begin{aligned} {a_1}^2 + \lambda_1 = {a_2}^2 + \lambda_2 = {a_3}^2 + \lambda_3, \\ {b_1}^2 + \lambda_1 = {b_2}^2 + \lambda_2 = {b_3}^2 + \lambda_3 , \\ {\tilde{c}_3}^2 + \lambda_1 = {\tilde{c}_2}^2 + \lambda_2 = {\tilde{c}_1}^2 + \lambda_3 \end{aligned} \tag{128}$$

Поскольку внешний эллипсоид больше внутреннего, т.е. $a_1 > a_2 > a_3$, $b_1 > b_2 > b_3$ и $\tilde{c}_1 > \tilde{c}_2 > \tilde{c}_3$, то $\lambda_3 > \lambda_2 > \lambda_1$.

Поле скоростей, индуцированное вихрем №1 (внешним) и №2 (средним внутренним) и №3 (самым маленьким внутренним) также легко вычисляются.

Для удобства введем дополнительные обозначения

$$\alpha_0 = ab\tilde{c}\int_0^\infty \frac{d\mu}{(a^2+\mu)\sqrt{(a^2+\mu)(b^2+\mu)(\tilde{c}^2+\mu)}} = K\int_0^\infty \frac{d\mu}{(\varepsilon+\mu)\sqrt{(\varepsilon+\mu)(\varepsilon^{-1}+\mu)(K^2+\mu)}} \quad (129a)$$

$$\beta_0 = ab\tilde{c}\int_0^\infty \frac{d\mu}{(b^2+\mu)\sqrt{(a^2+\mu)(b^2+\mu)(\tilde{c}^2+\mu)}} = K\int_0^\infty \frac{d\mu}{(\varepsilon^{-1}+\mu)\sqrt{(\varepsilon+\mu)(\varepsilon^{-1}+\mu)(K^2+\mu)}} \quad (129b)$$

$$\alpha_\lambda = ab\tilde{c}\int_\lambda^\infty \frac{d\mu}{(a^2+\mu)\sqrt{(a^2+\mu)(b^2+\mu)(\tilde{c}^2+\mu)}} = K\int_{\lambda'}^\infty \frac{d\mu}{(\varepsilon+\mu)\sqrt{(\varepsilon+\mu)(\varepsilon^{-1}+\mu)(K^2+\mu)}} \quad (129c)$$

$$\beta_\lambda = ab\tilde{c}\int_\lambda^\infty \frac{d\mu}{(b^2+\mu)\sqrt{(a^2+\mu)(b^2+\mu)(\tilde{c}^2+\mu)}} = K\int_{\lambda'}^\infty \frac{d\mu}{(\varepsilon^{-1}+\mu)\sqrt{(\varepsilon+\mu)(\varepsilon^{-1}+\mu)(K^2+\mu)}} \quad (129d)$$

Все указанные функции безразмерные. Однако вычисления можно проводить в размерной, так и в безразмерной форме. Здесь мы приводим обе записи – в размерном и безразмерном виде. Левая колонка формул (145) – это размерная запись, правая безразмерная. В безразмерной записи появились новые безразмерные параметры вихря $\varepsilon = \frac{a}{b}$ – параметр горизонтальной вытянутости и $K = \frac{\tilde{c}}{\sqrt{ab}}$ – параметр вертикального растяжения вихревого ядра. Кроме того, в безразмерной записи появился нижний безразмерный предел $\lambda' = \frac{\lambda}{ab}$, который является положительным корнем обезразмеренного уравнения (10):

$$\frac{x'^2}{\varepsilon+\lambda'} + \frac{y'^2}{\varepsilon^{-1}+\lambda'} + \frac{\tilde{z}'^2}{K^2+\lambda'} = 1, \text{где } (x'y'\tilde{z}') = \frac{(x,y,\tilde{z})}{\sqrt{ab}} \quad (130)$$

$(x'y'\tilde{z}')$ - безразмерные координаты точки $(x,y,\tilde{z})$. В терминах функций (146) поле скорости записывается в виде (здесь удобна размерная форма записи)

$$u = -\frac{1}{2}\sigma\beta_\lambda \cdot y \quad (131a)$$

$$v = \frac{1}{2}\sigma\alpha_\lambda \cdot x \tag{131b}$$

В БКПЮ вихрь вытянут в восточно-западном направлении по параллели, поэтому ось x удобно направить на Восток, ось y на Север. Одновременно это будут главные направления всех эллипсоидов. При таком выборе координат фоновое течение в виде горизонтального баротропного потока со сдвигом представляется соотношениями

$$\begin{cases} u_f = -\Gamma y \\ v_f = 0 \end{cases} \tag{132}$$

Поскольку у нас три вихря, то соотношения (146) нужно пронумеровать под каждый вихрь. Для вихря №1 с полуосями $(a_1, b_1, \tilde{c}_1)$, потенциальной завихренностью σ_1 и уравнением границы $F_1(x, y, \tilde{z}) = \frac{x^2}{{a_1}^2} + \frac{y^2}{{b_1}^2} + \frac{\tilde{z}^2}{{\tilde{c}_1}^2} - 1 = 0$ параметры α_0 , β_0 , α_λ , β_λ обозначим как $\alpha_0^{(1)}$, $\beta_0^{(1)}$, $\alpha_{\lambda_1}^{(1)}$, $\beta_{\lambda_1}^{(1)}$. Аналогично для вихря №2 с полуосями $(a_2, b_2, \tilde{c}_2)$, потенциальной завихренностью σ_2 и уравнением границы $F_2(x, y, \tilde{z}) = \frac{x^2}{{a_2}^2} + \frac{y^2}{{b_2}^2} + \frac{\tilde{z}^2}{{\tilde{c}_2}^2} - 1 = 0$ введем обозначения $\alpha_0^{(2)}$, $\beta_0^{(2)}$, $\alpha_{\lambda_2}^{(2)}$, $\beta_{\lambda_2}^{(2)}$. Наконец для вихря №3 применим обозначения $\alpha_0^{(3)}$, $\beta_0^{(3)}$, $\alpha_{\lambda_3}^{(3)}$, $\beta_{\lambda_3}^{(3)}$. В данном случае более удобно пользоваться размерными соотношениями.

В результате поле скорости на границе внешнего ядра №1 будет представляться суммой течений от четырех источников – фонового течения (145) и течений от трех вихрей. Течение, индуцированное вихрем №1 представлено ниже

$$u_1 = \frac{-1}{2}\sigma_1\beta_0^{(1)} \cdot y$$
$$v_1 = \frac{1}{2}\sigma_1\alpha_0^{(1)}x \tag{133}$$

Перейдем к вихрю №2. Индуцированное течение от вихря №2 на границе ядра №1 находится во внешней к ядру №2 зоне, поэтому здесь скорости выглядят сложнее

$$u_2 = \frac{-1}{2}\sigma_2\beta_{\lambda_{21}}^{(2)} \cdot y$$
$$v_2 = \frac{1}{2}\sigma_2\alpha_{\lambda_{21}}^{(2)}x \tag{134}$$

Нами для удобства вместо λ_2 введен в рассмотрение параметр $\lambda_{21} = {a_1}^2 - {a_2}^2 = {b_1}^2 - {b_2}^2 = {\tilde{c}_1}^2 - {\tilde{c}_2}^2$ с тем же физическим смыслом, но с более понятными индексами.

Наконец течение от вихря №3, также во внешней к ядру №3 области на границе первого вихря индуцируют следующие скорости

$$u_3 = \frac{-1}{2}\sigma_3\beta^{(3)}_{\lambda_{31}} \cdot y$$

$$v_3 = \frac{1}{2}\sigma_3\alpha^{(3)}_{\lambda_{31}} x \qquad (135)$$

Здесь аналогично обозначено $\lambda_{31} = {a_1}^2 - {a_3}^2 = {b_1}^2 - {b_3}^2 = {\tilde{c}_1}^2 - {\tilde{c}_3}^2$.

Течения (151) и (152) от малого и среднего вихрей линейно по координатам на границе вихря №1 благодаря свойству софокусности всех вихрей.

Окончательное суммарное течение на границе большого вихря (вихрь №1) тоже линейно по горизонтальным координатам

$$u = u_f + u_1 + u_2 + u_3$$

$$= -\left(\Gamma + \frac{1}{2}\sigma_1\beta^{(1)}_0 + \frac{1}{2}\sigma_2\beta^{(2)}_{\lambda_{21}} + \frac{1}{2}\sigma_3\beta^{(3)}_{\lambda_{31}}\right) y$$

$$v = v_f + v_1 + v_2 + v_3 = \left(\frac{1}{2}\sigma_1\alpha^{(1)}_0 + \frac{1}{2}\sigma_2\alpha^{(2)}_{\lambda_{21}} + \frac{1}{2}\sigma_3\alpha^{(3)}_{\lambda_{31}}\right) x \qquad (136)$$

Координаты (x, y) переменные и соответствуют границе ядра вихря №1. Напоминаем, что приведенные соотношения (26) удовлетворяют основному уравнению (1) и динамическому условию на границе внешнего ядра. Однако они еще не удовлетворяют кинематическому условию на этой же границе.

Запишем уравнение границы вихря №1 в общем виде $F_1(x, y, z, t) = 0$. Тогда кинематическое условие непротекания частиц жидкости через границу запишется в виде

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} + u\frac{\partial F_1}{\partial x} + v\frac{\partial F_1}{\partial y} + w\frac{\partial F_1}{\partial z} = 0 \qquad (137)$$

Причем, слагаемое $w\frac{\partial F_1}{\partial z}$ в этом уравнении мало по сравнению со слагаемыми $u\frac{\partial F_1}{\partial x}$ и $v\frac{\partial F_1}{\partial y}$. Отношение $w\frac{\partial F_1}{\partial z}$ к вышеупомянутым членам уравнения (149) порядка числа Россби $R_O \ll 1$ и его следует рассматривать как несущественную добавку к упрощенному граничному условию

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} + u\frac{\partial F_1}{\partial x} + v\frac{\partial F_1}{\partial y} = 0 \tag{138}$$

С таким кинематическим условием (28) все уравнения задачи выписаны с одинаковой точностью до слагаемых порядка $R_O \ll 1$. Теперь конкретизируем уравнение границы $F_1(x, y, \tilde{z}, t) = 0$:

$$F_1(x, y, \tilde{z}) = \frac{x^2}{{a_1}^2} + \frac{y^2}{{b_1}^2} + \frac{\tilde{z}^2}{{\tilde{c}_1}^2} - 1 = 0 \tag{139}$$

Учтем очень важное предположение, что эта граница стационарна, т.е. от времени t не зависит. С учетом соотношений $\frac{\partial F_1}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{2x}{{a_1}^2}, \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{2y}{{b_1}^2}$, используя (26), получим кинематическое условие

$$\left\{\frac{-1}{{a_1}^2}\left(2\Gamma + \sigma_1\beta_0^{(1)} + \sigma_2\beta_{\lambda_{21}}^{(2)} + \sigma_3\beta_{\lambda_{31}}^{(3)}\right) + \frac{1}{{b_1}^2}\left(\sigma_1\alpha_0^{(1)} + \sigma_2\alpha_{\lambda_{21}}^{(2)} + \sigma_3\alpha_{\lambda_{31}}^{(3)}\right)\right\}xy = 0 \tag{140}$$

где координаты (x, y) переменны и соответствуют координатам границы внешнего вихря №1. В таком случае кинематическим условием на границе вихря №1 является соотношение

$$\frac{-1}{{a_1}^2}\left(2\Gamma + \sigma_1\beta_0^{(1)} + \sigma_2\beta_{\lambda_{21}}^{(2)} + \sigma_3\beta_{\lambda_{31}}^{(3)}\right) + \frac{1}{{b_1}^2}\left(\sigma_1\alpha_0^{(1)} + \sigma_2\alpha_{\lambda_{21}}^{(2)} + \sigma_3\alpha_{\lambda_{31}}^{(3)}\right) = 0 \tag{141}$$

или в более удобном представлении

$$\sigma_1\left(\frac{-\beta_0^{(1)}}{{a_1}^2} + \frac{\alpha_0^{(1)}}{{b_1}^2}\right) + \sigma_2\left(\frac{-\beta_{\lambda_{21}}^{(2)}}{{a_1}^2} + \frac{\alpha_{\lambda_{21}}^{(2)}}{{b_1}^2}\right) + \sigma_3\left(\frac{-\beta_{\lambda_{31}}^{(3)}}{{a_1}^2} + \frac{\alpha_{\lambda_{31}}^{(3)}}{{b_1}^2}\right) = \frac{2\Gamma}{{a_1}^2} \tag{142}$$

Перейдем к границе вихря №2. В этом случае $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, а $\lambda_{32} = {a_2}^2 - {a_3}^2 = {b_2}^2 - {b_3}^2 = {\tilde{c}_2}^2 - {\tilde{c}_3}^2 > 0$. Аналогичные рассуждения для границы среднего вихря №2 дадут похожее на (32) соотношение

$$\sigma_1\left(\frac{-\beta_0^{(1)}}{{a_2}^2} + \frac{\alpha_0^{(1)}}{{b_2}^2}\right) + \sigma_2\left(\frac{-\beta_0^{(2)}}{{a_2}^2} + \frac{\alpha_0^{(2)}}{{b_2}^2}\right) + \sigma_3\left(\frac{-\beta_{\lambda_{32}}^{(3)}}{{a_2}^2} + \frac{\alpha_{\lambda_{32}}^{(3)}}{{b_2}^2}\right) = \frac{2\Gamma}{{a_2}^2} \tag{143}$$

Для границы вихря №3 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, получим аналогичное уравнение

$$\sigma_1\left(\frac{-\beta_0^{(1)}}{{a_2}^2} + \frac{\alpha_0^{(1)}}{{b_2}^2}\right) + \sigma_2\left(\frac{-\beta_0^{(2)}}{{a_2}^2} + \frac{\alpha_0^{(2)}}{{b_2}^2}\right) + \sigma_3\left(\frac{-\beta_0^{(3)}}{{a_2}^2} + \frac{\alpha_0^{(3)}}{{b_2}^2}\right) = \frac{2\Gamma}{{a_3}^2} \tag{144}$$

В результате совместное кинематическое условие (159), (160) и (161) на трех границах вихрей составляют систему уравнений на параметры вихрей

$$\begin{cases} \sigma_1\left(\dfrac{-\beta_0^{(1)}}{{a_1}^2}+\dfrac{\alpha_0^{(1)}}{{b_1}^2}\right)+\sigma_2\left(\dfrac{-\beta_{\lambda_{21}}^{(2)}}{{a_1}^2}+\dfrac{\alpha_{\lambda_{21}}^{(2)}}{{b_1}^2}\right)+\sigma_3\left(\dfrac{-\beta_{\lambda_{31}}^{(3)}}{{a_1}^2}+\dfrac{\alpha_{\lambda_{31}}^{(3)}}{{b_1}^2}\right) \\ \sigma_1\left(\dfrac{-\beta_0^{(1)}}{{a_2}^2}+\dfrac{\alpha_0^{(1)}}{{b_2}^2}\right)+\sigma_2\left(\dfrac{-\beta_0^{(2)}}{{a_2}^2}+\dfrac{\alpha_0^{(2)}}{{b_2}^2}\right)+\sigma_3\left(\dfrac{-\beta_{\lambda_{32}}^{(3)}}{{a_2}^2}+\dfrac{\alpha_{\lambda_{32}}^{(3)}}{{b_2}^2}\right) \\ \sigma_1\left(\dfrac{-\beta_0^{(1)}}{{a_2}^2}+\dfrac{\alpha_0^{(1)}}{{b_2}^2}\right)+\sigma_2\left(\dfrac{-\beta_0^{(2)}}{{a_2}^2}+\dfrac{\alpha_0^{(2)}}{{b_2}^2}\right)+\sigma_3\left(\dfrac{-\beta_0^{(3)}}{{a_2}^2}+\dfrac{\alpha_0^{(3)}}{{b_2}^2}\right) \end{cases} \quad (145)$$

Введя безразмерные потенциальные завихренности вихрей №1 и №2 с помощью соотношений

$$\Gamma_1=\frac{\sigma_1}{\Gamma}\quad \Gamma_2=\frac{\sigma_2}{\Gamma}\quad \Gamma_3=\frac{\sigma_3}{\Gamma} \quad (146)$$

систему (158) можно представить в безразмерном виде

$$\begin{cases} \Gamma_1\left(-\beta_0^{(1)}+\varepsilon_1^2\alpha_0^{(1)}\right)+\Gamma_2\left(-\beta_{\lambda_{21}}^{(2)}+\varepsilon_1^2\alpha_{\lambda_{21}}^{(2)}\right) \\ \qquad +\Gamma_3\left(-\beta_{\lambda_{31}}^{(3)}+\varepsilon_1^2\alpha_{\lambda_{31}}^{(3)}\right)=2, \\ \Gamma_1\left(-\beta_0^{(1)}+\varepsilon_2^2\alpha_0^{(1)}\right)+\Gamma_2\left(-\beta_0^{(2)}+\varepsilon_2^2\alpha_0^{(2)}\right) \\ \qquad +\Gamma_3\left(-\beta_{\lambda_{32}}^{(3)}+\varepsilon_2^2\alpha_{\lambda_{32}}^{(3)}\right)=2, \\ \Gamma_1\left(-\beta_0^{(1)}+\varepsilon_3^2\alpha_0^{(1)}\right)+\Gamma_2\left(-\beta_0^{(2)}+\varepsilon_3^2\alpha_0^{(2)}\right) \\ \qquad +\Gamma_3\left(-\beta_0^{(3)}+\varepsilon_3^2\alpha_0^{(3)}\right)=2. \end{cases} \quad (147)$$

Если бы оба внутренних вихря полностью отсутствовали, то второе и третье условия из (159) не потребовалось бы. Первое уравнение из (159) при $\Gamma_2=\Gamma_3=0$ дает решение в виде относительной завихренности основного (внешнего) ядра

$$\Gamma_1=\Gamma_1^{(1)}=\frac{2}{-\beta_0^{(1)}+\varepsilon_1^2\alpha_0^{(1)}} \quad (148)$$

без внутренних вихрей. Именно такая задача в подобной постановке, но с другим способом решения, изучалась в работе [Жмур, Суетин, Чхетиани 2023]. Будем рассматривать $\Gamma_1^{(1)}$ из (148) как некоторое опорное решение, с которым будем сравнивать решение системы (141). Решение (148) представляет собой стационарный однородный вихрь в сдвиговом течении. Верхний индекс в круглых скобках (1) в выражении $\Gamma_1^{(1)}$ означает, что данном случае мы рассматриваем одиночный вихрь.

Если отсутствует внутренний вихрь №3, то одновременно отсутствует и граничное условие на его границе, а задача (147) упрощается и сводится к задаче о

стационарном композитном вихре, состоящем из вложенных друг в друга двух вихрей №1 и №2. Соответствующая система уравнений для этой ситуации написана ниже

$$\begin{cases} \Gamma_1\left(-\beta_0^{(1)}+\varepsilon_1^2\alpha_0^{(1)}\right)+\Gamma_2\left(-\beta_{\lambda_{21}}^{(2)}+\varepsilon_1^2\alpha_{\lambda_{21}}^{(2)}\right)=2, \\ \Gamma_1\left(-\beta_0^{(1)}+\varepsilon_2^2\alpha_0^{(1)}\right)+\Gamma_2\left(-\beta_0^{(2)}+\varepsilon_2^2\alpha_0^{(2)}\right)=2. \end{cases} \quad (149)$$

Именно эта ситуация изучалась в работе [Аракелян, Жмур, Чхетиани 2025]. Обозначим решение этой системы как $\Gamma_1=\Gamma_1^{(2)}$ $\Gamma_2=\Gamma_2^{(2)}$. Верхний индекс (2) в $\Gamma_1^{(2)},\Gamma_2^{(2)}$ означает, что в данном случае изучается композитный вихрь, состоящий из двух вихрей. Как следует из (160) если заданы геометрические параметры вихрей №1 и №2, то решение системы (160) $\left(\Gamma_1^{(2)},\Gamma_2^{(2)}\right)$ определяется однозначно. Случаи отсутствия решений системы (38) обнаружены не были. Однако при уменьшении объема внутреннего вихря №2 к нулю или приближении его размеров к размерам вихря №1 в задаче наблюдалась особенность в поведении параметров $\left(\Gamma_1^{(2)},\Gamma_2^{(2)}\right)$. Если же размеры вихрей черпались из измерений на миссиях межпланетными аппаратами Voyager1 1979, Galileo 1996, Cassini 2000 или с помощью телескопа Хаббл (Hubble Space Telescope, HST) то никаких особенностей в поведении завихренностей не наблюдалось, а сами значения $\left(\Gamma_1^{(2)},\Gamma_2^{(2)}\right)$ для разных миссий не сильно отличались друг от друга.

Вернемся к задаче (141). Естественно ожидать, что система (158) имеет однозначное решение $(\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3)=\left(\Gamma_1^{(3)},\Gamma_2^{(3)},\Gamma_3^{(3)}\right)$ для заданной геометрической конфигурации композитного вихревого образования, состоящего из трех вихрей.

Интересно сравнить распределение завихренностей, полученное для трёхкомпонентного вихря, с результатами Главы 2 для двухкомпонентной структуры. Напомним, что для двухкомпонентного вихря суммарная потенциальная завихренность внутри малого ядра равна $\left(1+\Gamma_1^{(2)}+\Gamma_2^{(2)}\right)$, в зазоре между границами — $\left(1+\Gamma_1^{(2)}\right)$, а вне вихря — единице. Аналогичное распределение для трехкомпонентного вихря выглядит следующим образом. Внутри малого вихря $\left(1+\Gamma_1^{(3)}+\Gamma_2^{(3)}+\Gamma_3^{(3)}\right)$, в зазоре между границами малого и среднего вихрей $\left(1+\Gamma_1^{(3)}+\Gamma_2^{(3)}\right)$, на периферийной части вихря в зазоре между границами среднего и большого вихрей $\left(1+\Gamma_1^{(3)}\right)$, наконец вне вихревой системы – фоновая потенциальная завихренность тоже единица. Следует сразу отметить, что все геометрические параметры задачи имеют характерные значения порядка единицы, поэтому если фиксировать два вихря в двухкомпонентном вихревом образовании и

рассчитать $\left(\Gamma_1^{(2)}, \Gamma_2^{(2)}\right)$ по (160), а затем добавить в систему третий вихрь и рассчитать $\left(\Gamma_1^{(3)}, \Gamma_2^{(3)}, \Gamma_3^{(3)}\right)$, то в при заметном отличии геометрических размеров третьего вихря от первых двух, мы получим значительно отличающуюся картину на количественном уровне. Добавление третьего вихря приводит к значительной перестройке всей системы. Отметим, что мы не можем возмутить композитный двукомпонентный вихрь слабым третьим вихрем, как это делается в традиционных задачах устойчивости. Дело в том, что на всю систему накладывается еще одно условие – стационарность. Именно стационарность в кинематическом граничном условии (133) диктует свои правила и не позволяет возмущать систему произвольными (в том числе и малыми) возмущениями.

Однако если фиксировать геометрические параметры двух вихрей внешнего и внутреннего, а третий вихрь по размерам приблизить к размерам внутреннего вихря, то естественно ожидать, что стационарная картина распределения суммарных потенциальных завихренностей в двухкомпонентном и трехкомпонентном композитных вихрях будет близкой, а именно потенциальные завихренности внутренней части обоих вихрей $\left(1 + \Gamma_1^{(2)} + \Gamma_2^{(2)}\right)$ и $\left(1 + \Gamma_1^{(3)} + \Gamma_2^{(3)} + \Gamma_3^{(3)}\right)$ будут совпадать, а также будут равны потенциальные завихренности периферийных зон $\left(1 + \Gamma_1^{(2)}\right)$ и $\left(1 + \Gamma_1^{(3)}\right)$ этих вихрей. Что касается узкой полоски между границами второго и третьего вихрей в трехкомпонентной системе, которая полностью отсутствует в двухкомпонентном композитном вихре, то важно, чтобы в этом малом зазоре суммарная потенциальная завихренность $\left(1 + \Gamma_1^{(3)} + \Gamma_2^{(3)}\right)$ была ограничена. В этом случае интегральная потенциальная завихренность области указанного зазора будет стремиться к нулю не будет оказывать никакого воздействия на остальные зоны композитного вихря.

Результаты численного счета.

В каждой из космических миссий аппаратами Voyager1 1979, Galileo 1996, Cassini 2000 или с помощью телескопа Хаббл (Hubble Space Telescope, HST) измерялись геометрические параметры БКПЮ, пригодные для двухкомпонентного композитного вихря. Определялись большие a_1 и малые b_1 размеры основного вихря, а также аналогичные характеристики a_2 и b_2 вложенного вихря. В результате в каждой миссии выяснялся безразмерный параметр $\frac{a_2 b_2}{a_1 b_1}$. Это число слегка менялось от мисси к миссии. Вертикальный параметр основного (большого) вихря $K_1 = \frac{\tilde{c}_1}{\sqrt{a_1 b_1}}$ оценивался в работе

[Жмур, Суетин, Чхетиани 2023] и лежал в диапазоне значений от 4 до 8. Для расчетов мы выбрали три значения K_1 из этого диапазона 4, 6 и 8. Из условия софокусности определялись три значения параметра K_2 и при фиксированном $\frac{a_2 b_2}{a_1 b_1}$ варьировали размеры третьего софокусного вихря по параметру $M = \frac{a_3 b_3}{a_1 b_1}$ из диапазона $0 < M < 1$. Вертикальный параметр третьего вихря K_3 рассчитывался из условия софокусности. В результате для в системе (158) рассчитывались все необходимые коэффициенты и определялись безразмерные значения $\left(\Gamma_1^{(3)}, \Gamma_2^{(3)}, \Gamma_3^{(3)}\right)$ собственных потенциальных завихренностей вихрей композитного вихревого образования, соответствующие конкретному K_1 при переменном M.

На рисунках 3.1, 3.2, 3.3 приведены результаты расчетов для следующих характеристик композитных вихрей. 1). Собственные потенциальные завихренности ядер всех трех вихрей $\left(\Gamma_1^{(3)}, \Gamma_2^{(3)}, \Gamma_3^{(3)}\right)$ в зависимости от размера вихря №3 , в качестве которого выбран безразмерный параметр $M = \frac{a_3 b_3}{a_1 b_1}$ - площадь вихря №3 относительно основного вихря №1. Этот параметр меняется в диапазоне значений $0 < M < 1$. При этом размеры вихрей №1 и №2 фиксировались и брались из миссий Voyager1 1979, Galileo 1996, Cassini 2000 или с помощью телескопа Хаббл (Hubble Space Telescope, HST, 2006). Красная вертикальная линия на этих рисунках соответствует ситуации, когда вихри №2 и №3 совпадают по размерам. Из рисунков следуют некоторые общие свойства. Независимо от значения M самый большой №1 и средний вихри представляют собой антициклоны (150вращение частиц против часовой стрелки в южном полушарии). В то время как внутренний вихрь всегда циклоническое образование. Как следует их рисунков в окрестности совпадения вихрей №2 и №3 по параметру M не наблюдается никаких особенностей в поведении наборов $\left(\Gamma_1^{(3)}, \Gamma_2^{(3)}, \Gamma_3^{(3)}\right)$. Наоборот, при приближении M к 0 или 1 потенциальная завихренность ядра вихря №3 имеет особенность $\Gamma_3^{(3)} \to -\infty$, а также $\Gamma_1^{(3)} \to +\infty$ при $M \to 1$. Качественное поведение параметров $\left(\Gamma_1^{(3)}, \Gamma_2^{(3)}, \Gamma_3^{(3)}\right)$ в системе из трех вихрей в зависимости от M в целом похоже на поведение системы из двух вихрей $\left(\Gamma_1^{(2)}, \Gamma_2^{(2)}\right)$. Периферийная часть вращает частицы антициклонически, внутренняя зона – циклонически.

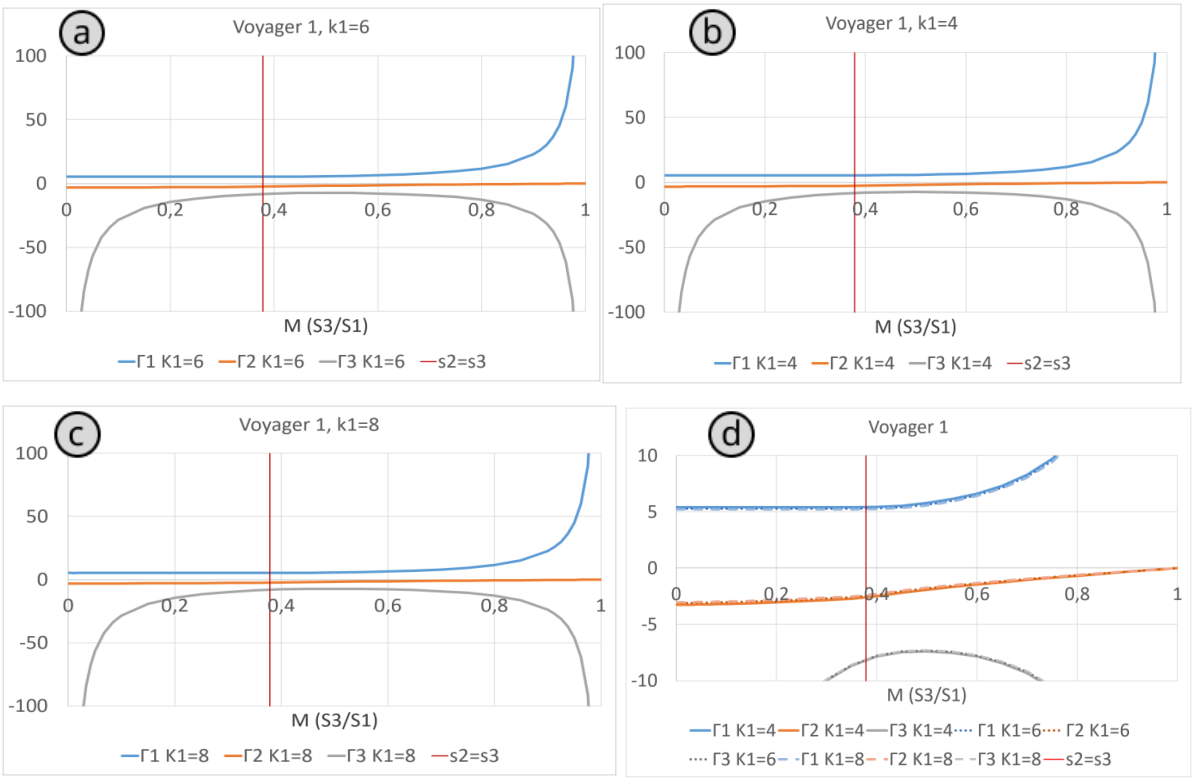


Рис. 3.2. Собственные завихренности $\left(\Gamma_1^{(3)}, \Gamma_2^{(3)}, \Gamma_3^{(3)}\right)$ в зависимости от размера третьего вихря (параметр $M = \frac{a_3 b_3}{a_1 b_1}$) для a) $K_1 = 4$, b) $K_1 = 6$, c) $K_1 = 8$ для миссии Voyager 1. Вертикальная красная линия обозначает совпадение вихрей №2 и №3 $S_2 = S_3$. Рисунок d повторяет рисунок b с более подробным масштабом по оси ординат и для всех значений K_1.

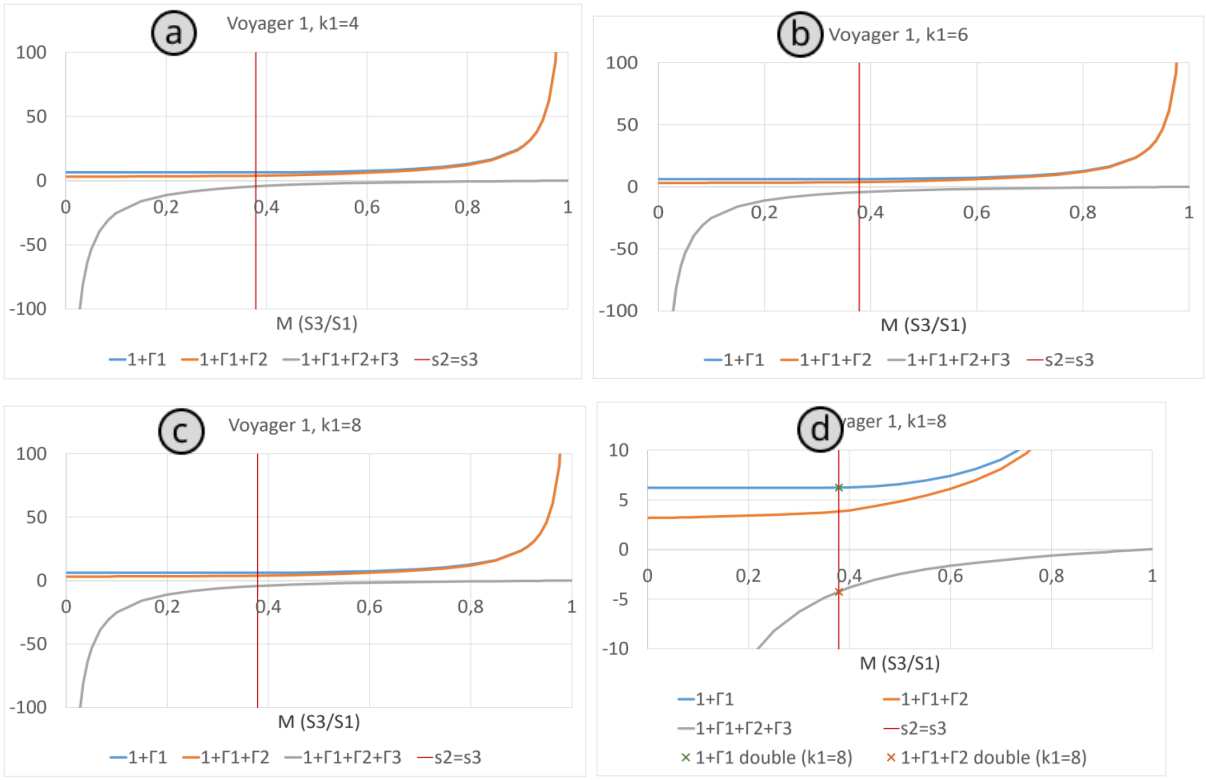


Рис. 3.3. Суммарные завихренности различных зон трехкомпонентного композитного вихря $\left(1+\Gamma_1^{(3)}\right)$ $\left(1+\Gamma_1^{(3)}+\Gamma_2^{(3)}\right)$, $\left(1+\Gamma_1^{(3)}+\Gamma_2^{(3)}+\Gamma_3^{(3)}\right)$ в зависимости от размера третьего вихря (параметр $M=\frac{a_3 b_3}{a_1 b_1}$) для трех значений K_1 = 4, 6, 8 для миссии Voyager 1. Вертикальная красная линия обозначает совпадение вихрей №2 и №3 $S_2=S_3$. Крестиками обозначены значения $\left(1+\Gamma_1^{(2)}\right)$ и $\left(1+\Gamma_1^{(2)}+\Gamma_2^{(2)}\right)$ для условия $S_2=S_3$

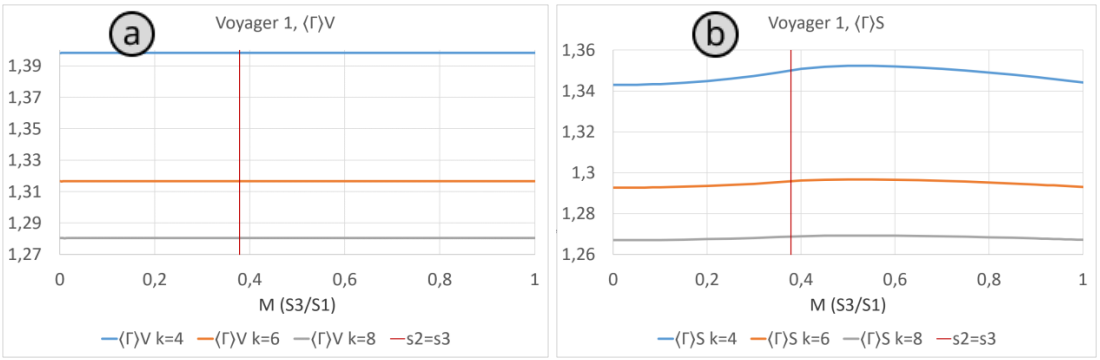


Рис. 3.4. Средние потенциальные завихренности БКПЮ по объему $\langle\Gamma\rangle_V$ (a) и по площади $\langle\Gamma\rangle_S$ (b) главного сечения для трех значений K_1 = 4, 6, 8 для миссии Voyager 1 в зависимости от размера третьего вихря (параметр $M=\frac{a_3 b_3}{a_1 b_1}$) . Вертикальная красная линия обозначает совпадение вихрей №2 и №3 $S_2=S_3$

С позиции физики наиболее показательными являются зависимости параметров $\left(1+\Gamma_1^{(3)}+\Gamma_2^{(3)}+\Gamma_3^{(3)}\right)$, $\left(1+\Gamma_1^{(3)}+\Gamma_2^{(3)}\right)$, $\left(1+\Gamma_1^{(3)}\right)$ от M. Напомним, что $\left(1+\Gamma_1^{(3)}+\Gamma_2^{(3)}+\Gamma_3^{(3)}\right)$ описывает суммарную потенциальную завихренность внутренней части композитного вихря (зона V_3), параметр $\left(1+\Gamma_1^{(3)}\right)$ ответственен за суммарную потенциальную завихренность периферической части композитного вихря (зона $V_1 \cap V_{2,3}$), расположенную между границами большого вихря №1 и следующего за ним по размерам вихря №2 или №3. А параметр $\left(1+\Gamma_1^{(3)}+\Gamma_2^{(3)}\right)$ ответственен за суммарную потенциальную завихренность промежуточной зоны $V_3 \cap V_2$ между вихрями №2 и №3. К общим свойствам параметров $\left(1+\Gamma_1^{(3)}+\Gamma_2^{(3)}+\Gamma_3^{(3)}\right)$ и $\left(1+\Gamma_1^{(3)}\right)$ отнесем циклоничность вращения частиц центральной части композитного вихря и антициклоничность периферийной зоны не зависимо от величины M. Промежуточная зона с завихренностью $\left(1+\Gamma_1^{(3)}+\Gamma_2^{(3)}\right)$ также всюду антициклонична. При уменьшении размеров самого маленького из вихрей №3 суммарная потенциальная завихренность этой зоны имеет

особенность $\left(1+\Gamma_1^{(3)}+\Gamma_2^{(3)}+\Gamma_3^{(3)}\right)\to-\infty$ при $M\to 0$. На противоположном конце интервала при $M\to 1$ особенности имеют параметры $\left(1+\Gamma_1^{(3)}+\Gamma_2^{(3)}\right)$ и $\left(1+\Gamma_1^{(3)}\right)$, которые неограниченно растут $\left(1+\Gamma_1^{(3)}+\Gamma_2^{(3)}\right)\to\infty$ и $\left(1+\Gamma_1^{(3)}\right)\to\infty$. При этом кривые $\left(1+\Gamma_1^{(3)}+\Gamma_2^{(3)}\right)$ и $\left(1+\Gamma_1^{(3)}\right)$ сливаются для $M\to 1$. Таким образом, двукомпонентные и трехкомпонентные композитные вихри демонстрируют качественно одинаковые свойства на всем диапазоне значений M, хотя количественно характеристики разнятся при условии, что внутренние вихри №2 и №3 заметно отличаются по занятой площади. Тем не менее при незначительном отличии площадей S_2 и S_3 центральная и периферийная зоны показывают одинаковые суммарные потенциальные завихренности для двукомпонентных и трехкомпонентных композитных вихрей. Следовательно, если в двукомпонентный стационарный композитный вихрь поместить третий вихрь, т.е. сделать из него трехкомпонентную стационарную вихревую структуру, то характеристики нового вихря заметно исказятся. Однако, если третий вихрь, помещенный в первоначально двукомпонентную стационарную композитную вихревую структуру, будет иметь площадь, близкую к площади внутреннего вихря, то полученный стационарный трехкомпонентный вихрь практически не будет отличаться по своим характеристикам от прежнего двухкомпонентного вихря, кроме очень узкой зоны между двумя внутренними вихрями. Потенциальная завихренность в этой узкой зоне оказывается конечной и в пределе, когда площади указанных вихрей совпадут, эта зона исчезнет, а трехкомпонентный и двухкомпонентный вихри станут эквивалентны. Другими словами, добавление в систему из двух вихрей третьего вихря, близкого по размерам к внутреннему вихрю, не приведет новую трехкомпонентную систему к значительной перестройке характеристик. Т.е. в данном случае наблюдается структурная устойчивость стационарного композитного вихря. Есть основания полагать, что свойство указанной структурной устойчивости останется справедливым и для композитных вихрей с произвольным количеством вложенных вихрей. Это в свою очередь косвенно указывает на то, что можно построить композитный вихрь с непрерывным распределением потенциальной завихренности внутренней зоны.

Факт совпадения свойств двукомпонентных и трехкомпонентных композитных вихрей при условии, что $S_2=S_3$, демонстрируется на рисунке 3.3d. Здесь в более удобном масштабе по оси ординат показана зависимость от M суммарной потенциальной завихренности всех зон в трехкомпонентной композитной вихревой системе. Красная вертикальная черта соответствует условию $S_2=S_3$. Крестики на кривых $\left(1+\Gamma_1^{(3)}+\Gamma_2^{(3)}+\right.$

$\Gamma_3^{(3)}\big)$ и $\left(1+\Gamma_1^{(3)}\right)$, соответствуют численным значениям $\left(1+\Gamma_1^{(2)}+\Gamma_2^{(2)}\right)$ и $\left(1+\Gamma_1^{(2)}\right)$ для двукомпонентного вихря при $S_2 = S_3$ и демонстрируют выполнение условий

$$\begin{cases} \left(1+\Gamma_1^{(3)}+\Gamma_2^{(3)}+\Gamma_3^{(3)}\right) = \left(1+\Gamma_1^{(2)}+\Gamma_2^{(2)}\right) \\ \left(1+\Gamma_1^{(3)}\right) = \left(1+\Gamma_1^{(2)}\right) \end{cases} \tag{151}$$

при конкретном значении параметра M, при котором $S_2 = S_3$. Указанные условия (168) справедливы для всех миссий и используемых значений K_1.

Наконец интересным свойством обладают потенциальные завихренности всех указанных зон, осредненные по объему всего вихря в целом или же осредненные по площади всех указанных зон на главном горизонтальном срезе вихря. Оказалось, что средние по объему не зависят от размеров третьего встроенного вихря, но слегка зависят от вертикального размера основного вихря, через параметр K_1. Эта зависимость представлена на рисунках 4a и 4b для миссии Voyager 1. Расчеты средних значений $\langle\Gamma\rangle_V$ и $\langle\Gamma\rangle_S$ и их зависимость от размеров третьего вихря были проведены по всем миссиям. Как оказалось, что в диапазоне значений $4 \le K_1 \le 8$ средние потенциальные завихренности по объему всего вихря отличаются друг от друга на величину менее 10%. Поэтому можно заявить, что зависимостью средних значений от вертикального размера вихря тоже можно пренебречь. В результате средняя по объему потенциальная завихренность вихря $\langle\sigma\rangle_V$ в размерном виде связана исключительно со сдвигом фонового течения Γ и линейно зависит от него. Как следует из расчетов, $\langle\sigma\rangle_S$ зависит как от размеров вложенных вихрей, составляющих композитную вихревую структуру, так и от вертикального размера K_1 основного вихря. Однако вариации $\langle\sigma\rangle_S$, связанные как с размером вихрей, так и со значением K_1 еще меньше, чем вариации $\langle\sigma\rangle_V$.Поэтому обе характеристики $\langle\sigma\rangle_V$ и $\langle\sigma\rangle_S$ с приемлемой точностью для условий в каждой миссии можно считать совпадающими, обе линейно связаны с Γ параметром сдвига $\langle\sigma\rangle_V = \langle\sigma\rangle_S = k\Gamma$, где k коэффициент пропорциональности. Однако коэффициент пропорциональности заметно меняется от миссии к миссии. Так по нашим расчетам для миссии Voyager 1 1979 $k \approx 1.3 \div 1.4$, для Galileo 1996 $k \approx 1.7 \div 1.9$, для Cassini 2000 $k \approx 2.8 \div 3.1$, для HST (Hubble Space Telescope), 2006 $k \approx 2.9 \div 3.1$,т.е. коэффициент пропорциональности по каким-то причинам растет со временем и не является универсальной константой. Одновременно, сдвиг фонового течения Γ со временем уменьшается что несколько стабилизирует изменения в произведении $k\Gamma$.

3.3 Траектория движения и деформация границы пробного вихря

Траектория движения центра пробного вихря.

Обозначим $x_0(t)$ и $y_0(t)$ текущие координаты центра малого вихря в координатах x, y .

В силу представлений, что центр вихря движется фоновым течением, с учетом поля скорости такого течения

$$\begin{cases} u = -\left(\Gamma + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=N} \sigma_i \beta_0^{(i)} \right) y \\ v = \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=N} \sigma_i \alpha_0^{(i)} \right) x \end{cases} \tag{152}$$

получим уравнения движения центра вихря

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} x_0(t) = -\left(\Gamma + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=N} \sigma_i \beta_0^{(i)} \right) y_0(t) \\ \frac{d}{dt} y_0(t) = \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=N} \sigma_i \alpha_0^{(i)} \right) x_0(t) \end{cases} \tag{153}$$

Система (153) может быть сведена к одному уравнению для $x_0(t)$

$$\frac{d^2}{dt^2} x_0(t) + \left(\Gamma + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=N} \sigma_i \beta_0^{(i)} \right) \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=N} \sigma_i \alpha_0^{(i)} \right) x_0(t) = 0 \tag{154}$$

Одновременно существует интеграл сохранения в системе (170):

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{{x_0}^2(t)}{\left(\Gamma + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=N} \sigma_i \beta_0^{(i)} \right)} + \frac{{y_0}^2(t)}{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=N} \sigma_i \alpha_0^{(i)}} \right\} = 0 \tag{155}$$

$$\frac{{x_0}^2(t)}{\left(\Gamma + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=N} \sigma_i \beta_0^{(i)} \right)} + \frac{{y_0}^2(t)}{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=N} \sigma_i \alpha_0^{(i)}} = const \tag{156}$$

Соотношение (156) описывает общий вид траекторий движения, где $const$ определяется начальными условиями. Отметим, что собственные завихренности σ_i

подчиняются линейной системе уравнений и на этом этапе должны быть найдены. Следовательно, определены и знаки выражений $\Gamma + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=N} \sigma_i \beta_0^{(i)}$ и $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=N} \sigma_i \alpha_0^{(i)}$ в знаменателе (156). Уравнение (156) в общем случае описывает эллиптические или гиперболические траектории. Однако траектории в виде гиперболы невозможны из физических соображений – траектория не может пересекаться с внутренними границами многопольного вихря, а сам пробный вихрь не может покинуть внутреннюю область вихря – его глаз. Следовательно, реализуется ситуация, при которой знаки $\left(\Gamma + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=N} \sigma_i \beta_0^{(i)}\right)$ и $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=N} \sigma_i \alpha_0^{(i)}$ одинаковы, а уравнение (156) описывает эллиптическую траекторию движения, полностью помещенную в области глаза вихревого образования. В результате пробный вихрь внутри глаза композитного вихря движется как целое по эллиптической траектории. Согласно уравнению (154) это движение периодическое с частотой

$$\Omega = \sqrt{\left(\Gamma + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=N} \sigma_i \beta_0^{(i)}\right)\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=N} \sigma_i \alpha_0^{(i)}\right)} \tag{157}$$

независящей от конкретной траектории движения. Другими словами, все малые вихри, движущиеся как целое внутри большого вихря, совершают полный оборот за одно и то же время.

Деформация границы пробного вихря

Одновременно с движением как целого форма ядра пробного вихря испытывает периодические ограниченные деформации – вращение или нутационные колебаниями формы вокруг вертикальной оси в зависимости от начальных условий на параметры вихря.

Если же в начальный момент времени центр малого вихря совпадает с центром стационарного большого вихря, то далее центр малого вихря не перемещается и остается в покое. Однако его граница (форма) будет вращаться или испытывать нутационные колебания аналогичные эволюции формам вихрей, вращающихся вокруг центра большого вихря.

Соотношение (157) позволяет ввести характерное время внутренней динамики БПКЮ – период обращения пробного вихря как целого вокруг центра композитного вихря

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} \tag{158}$$

Если в качестве основного вихря принять упрощенную однородную модель БКПЮ [Жмур, Суетин 2023], то время T составит величину порядка земной недели.

Выводы по Главе 3:

Таким образом, проведённое в настоящей главе исследование трёхкомпонентного вихря показывает, что двухкомпонентная композитная структура, изученная в Главе 2, является структурно устойчивой по отношению к возмущению её третьим вложенным вихрем. Этот результат естественным образом продолжает иерархию моделей, построенных нами в Главах 1 и 2: от однородного вихря к двухкомпонентному и далее к трёхкомпонентному. В общем случае двухкомпонентная композитная вихревая структура заметно изменяется в численном значении всех параметров при внесении в нее третьего вихря. однако общие качественные свойства двух вариантов вихрей остаются прежними. В частности, остаются в силе математические особенности вихревой системы для предельных размеров вложенных вихрей при $M \to 0$ и $M \to 1$. Самый малый внутренний вихрь обязательно имеет противоположный знак вращения частиц по сравнению с вращением частиц во внешней оболочке. Самый большой вихрь всегда остается антициклоническим. Средний по размерам вложенный вихрь, оставаясь антициклоническим, занимает промежуточное положение по завихренности в иерархии трех вихрей. Однако, если третий вихрь имеет близкие размеры с внутренним вихрем двухкомпонентной структуры, то такой трехкомпонентный композитный вихрь оказывается близок по своим характеристика к двухкомпонентному вихрю. При полном совпадении двух внутренних вихрей трехкомпонентный вихрь вырождается в двухкомпонентную вихревую систему с полным совпадением завихренностей всех составных частей. Другими словами, трехкомпонентный вихрь плавно трансформируется в двухкомпонентную вихревую структуру вместе со своими физическими характеристиками. Это свойство доказывает, что двухкомпонентный вихрь структурно устойчив по отношению к возмущению его третьим вложенным вихрем.

Аналогичный вопрос ранее был сформулирован для однокомпонентного однородного и двухкомпонентного вихрей. Какая предельная вихревая система получится из двухкомпонентного стационарного вихря, если объем вложенного внутреннего вихря устремить к нулю? Эта задача изложена в работе (Аракелян, Жмур, Чхетиани 2026а). Оказалось, что предельный двухкомпонентный вихрь при нулевом объеме вложенного внутреннего вихря качественно отличается от однородного однокомпонентного вихря (Жмур, Суетин, Чхетиани 2023). Это означает, что плавного перехода между указанными

вариантами вихрей не существует, и в этом смысле однокомпонентный однородный вихрь структурно неустойчив по отношению к возмущению его вложенным вихрем.

Формальной математической причиной структурной устойчивости упомянутых вихрей в общем случае является условие стационарности всей вихревой системы. В условиях стационарности всех границ в композитном вихре нельзя возмутить такую вихревую систему слабым дополнительным вихрем и при этом требовать от системы остаться стационарной. Потенциальная завихренность возмущающего вихря из условий стационарности вихревой системы определиться однозначно. Если же отказаться от стационарности границы возмущающего вихря и считать вихрь возмущения слабым, то такой вихрь не будет влиять на поведение границ остальных вихрей и исходный композитный вихрь останется стационарным. В такой физической постановке композитный вихрь останется устойчивым вихревым образованием, а задача описания возмущенной вихревой системы сведется к описанию поведения вихря возмущения в поле течения исходного композитного вихря.

Подобная задача, где в качестве исходной вихревой системы рассматривался стационарный однородный по потенциальной завихренности эллипсоидальный вихрь, а в качестве возмущения рассматривался слабый элипсоидальный вихрь меньшего размера, помещенный внутрь исходного вихря, изучалась в работе [Аракелян, Жмур, Чхетиани 2026б]. Назовем вихрь возмущения пробным вихрем. Поведение пробного вихря оказалось следующим. Если центры обоих вихрей в начальный момент времени не совпадают, то пробный вихрь как целое будет двигался по замкнутой эллиптической орбите, его форма одновременно будет вращаться и ограниченно деформироваться, оставаясь эллипсоидальной. Если же центры вихрей в начальный момент совпадают, то такой вихрь как целое не будет двигаться, но может вращаться и ограниченно деформироваться. Детали описания можно найти в указанной работе.

В нашем случае рассмотрим близкую задачу. В качестве исходной вихревой системы предложим двухкомпонентный композитный вихрь, рассмотренный в работе [Аракелян, Жмур, Чхетиани 2026а], или трехкомпонентный стационарный вихрь, предложенный в данной работе. В качестве пробного вихря – слабый эллипсоидальный вихрь, полностью помещенный в центральную зону исходного вихря (назовем эту зону глазом вихревой системы) или же в зазор между границами вложенных вихрей.

Центры пробного и основного вихря не обязательно должны совпадать, но границы внутреннего вихря композитной системы и пробного вихря нигде не должны соприкасаются. Такая задача равносильна поведению пробного вихря в равнозавихренном фоновом течении, созданном вложенными в друг друга вихрями в их совместной

центральной зоне. Поскольку указанная зона глаза находится сразу в нескольких вихревых ядрах композитного вихря, то суммарное поле равнозавихренного течения от всех вихрей линейно по координатам и обладает вполне определенными свойствами при воздействии на пробный вихрь. Эта задача изложена Приложении 2, где получены следующие свойства движущегося пробного вихря. В частности, пробный вихрь будет двигаться по замкнутой эллипсоидальной траектории со скоростью течения композитного вихря, приходящегося на его центр. Если центры пробного вихря и исходного композитного вихря совпадают, то пробный вихрь как целое будет стоять на месте, но его граница будет эволюционировать. Поведение же границы не связано с тем, будет ли пробный вихрь двигаться или стоять на месте. Все определяется соотношением двух свойств такого фонового течения - стремлением вытянуть пробный вихрь благодаря неоднородности собственного течения и возможностью вращать вихрь с учетом эффектов самовращения пробного вихря. Если свойства вращения выражены более эффективно, чем свойства вытягивания, то таком течении вихрь не может вытянуться в нить и останется локализованным в пространстве образованием, способным только вращаться или совершать нутационные колебания с ограниченными изменениями размеров вихревого ядра. Именно эта ситуация и реализуется внутри стационарного однокомпонентного вихря (Аракелян, Жмур, Чхетиани 2026 б). Что касается поведения пробных вихрей в более сложных композитных вихрях, помещенных в любые зоны этих стационарных вихревых структур, то все они обладают важным свойством – их энергия не может неограниченно возрастать. Пробные вихри, если они остаются локализованными в пространстве образованиями (в режиме вращения или нутационных колебаний), то поведение энергии тоже периодическое и, если энергия в начальный момент мала, то она так и останется малой. Если же пробные вихри будут вытягиваться в вихревые нити, то со временем их собственная энергия устремиться к нулю. В любом случае пробные вихри не могут серьезно повлиять всю вихревую систему, которая при данном виде возмущения останется устойчивым вихревым образованием. Возмущение композитного вихря в виде пробного вихря не приведет к неустойчивости композитного вихря.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации решены следующие задачи:

1. Решена задача о стационарном двухкомпонентном вихре

2. Решена задача о нестационарном двухкомпонентном вихре

3. Рассмотрена структурная устойчивость композитных вихревых структур и поведение слабого пробного вихря внутри ядра стационарного вихревого образования

В результате работы сделаны следующие выводы:

Общие выводы по диссертации:

1. Стационарность композитного вихря требует противоположных знаков завихренности. Математически доказано, что система из двух вложенных софокусных эллипсоидальных вихрей может оставаться стационарной на f-плоскости только в том случае, если потенциальная завихренность внутреннего ядра строго противоположна по знаку завихренности внешнего ядра. При этом полная механическая энергия такого стационарного образования всегда превышает энергию эквивалентного однородного вихря без вложения.
2. Нестационарная композитная модель энергетически выгоднее. Установлено, что композитный вихрь с нестационарным циклическим вложением, слабо влияющим на границу основного вихря, может обладать меньшей суммарной механической энергией, чем однородный вихрь. Это делает нестационарную модель более предпочтительной с физической точки зрения для объяснения долгоживучести БКПЮ по сравнению со стационарной моделью.
3. В рамках нестационарной модели показано, что слабый внутренний вихрь, помещенный в ядро основного вихря, не подвержен деструктивному режиму неограниченного вытягивания в филамент. Его центр движется по замкнутой эллиптической траектории (с периодом порядка 6 земных суток), а форма испытывает ограниченные вращения или мутационные колебания, что подтверждает устойчивость такой структуры. Внутренний вихрь остается локализованным образованием с ограниченной энергией и не вытягивается в нить.
4. Модели качественно воспроизводят наблюдаемую кинематику БКПЮ. Обе разработанные модели (стационарная и нестационарная) успешно объясняют ключевые особенности Большого Красного Пятна: наличие мощного

антициклонического струйного течения на периферии (до 150–170 м/с) и зоны слабого циклонического вращения во внутренней области (порядка 20 м/с). Это достигается за счет противоположного знака завихренности внутреннего вложения.

5. Показана структурная устойчивость многокомпонентных вихрей. Доказано, что двухкомпонентная композитная структура структурно устойчива к возмущению ее третьим вложенным вихрем, если его размеры близки к размеру внутреннего вихря. При этом добавление малых слабых пробных вихрей в любую зону многокомпонентной системы не приводит к ее неустойчивости, а их собственная энергия остается ограниченной.

Положения, выносимые на защиту:

1. Вихрь в квазигеострофическом приближении на f-плоскости композитный, состоящий из двух вложенных софокусных эллипсоидальных ядер, сохраняет стационарность только при строго противоположном знаке потенциальной завихренности внутреннего ядра по отношению к внешнему, доказанный аналитически. Полная интегральная механическая энергия такого стационарного образования, всегда превосходящая энергию эквивалентного однородного вихря без вложения.
2. Устойчивость однородного вихря к воздействию первоначально слабого вихря, возмущающего основной вихрь. При пренебрежимо малом воздействии внутреннего эллипсоидального вихря на границу внешнего стационарного вихря, внутренний вихрь остается локализованным образованием с ограниченной энергией: его центр движется по замкнутой эллиптической траектории с периодом порядка 6 земных суток, а форма испытывает ограниченные нутационные колебания или вращение.
3. Две разработанные модели — стационарная и нестационарная — качественно воспроизводят наблюдаемую кинематическую структуру Большого красного пятна Юпитера: мощное антициклоническое струйное течение на периферии (до 150–170 м/с) и зона слабого циклонического вращения во внутренней области (порядка 20 м/с).
4. Энергия композитного вихря с нестационарным вложением меньше, чем энергия однородного вихря и заметно меньше, чем энергия двухкомпонентного стационарного вихря. Среди двухкомпонентных моделей нестационарный вихрь энергетически более выгодный. Структурная неустойчивость двухкомпонентного вихря и структурная устойчивость композитных вихрей с большим количеством вложенных вихрей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аракелян Е.М., Жмур В.В., Чхетинани О.Г. Композитная структура Большого красного пятна Юпитера. Часть 1. Стационарная модель // Известия Российской академии наук. Физика атмосферы и океана. 2026. Т. 62, № 3. С. 472-496.
2. Аракелян Е.М., Жмур В.В., Чхетинани О.Г. Композитная структура Большого красного пятна Юпитера. Часть 2. Нестационарная модель // Известия Российской академии наук. Физика атмосферы и океана. 2026. Т. 62, № 4. С. 658-678.
3. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости / пер. с англ. М.: Мир, 1973. 758 с.
4. Галеркин Б. Г. Методы интегрирования уравнений математической физики. М.: Гостехиздат, 1950. 344 с.
5. Гилл А. Динамика атмосферы и океана: в 2 т. / пер. с англ. М.: Мир, 1986. Т. 1. 399 с.; Т. 2. 415 с.
6. Гледзер Е. Б., Должанский Ф. В., Обухов А. М. Системы гидродинамического типа и их применение. М.: Наука, 1981. 366 с.
7. Гловер Дж. Металлический водород и фазовый переход Мотта в недрах газовых гигантов // Успехи физических наук. 2019. Т. 189, № 1. С. 45–60.
8. Должанский Ф. В. Основы геофизической гидродинамики. М.: МЦНМО, 2011. 264 с.
9. Жмур В. В. Мезомасштабные вихри в океане. М.: ГЕОС, 2011. 360 с.
10. Жмур В. В., Белоненко Т. В., Новоселова Е. В., Суетин Б. П. Условия трансформации мезомасштабного вихря в субмезомасштабную вихревую нить при вытягивании его неоднородным баротропным течением // Океанология. 2023. Т. 63, № 2. С. 200–210.
11. Жмур В. В., Панкратов К. К. Динамика эллипсоидального приповерхностного вихря в неоднородном потоке // Океанология. 1989. Т. 29, № 2. С. 205–211.
12. Жмур В. В., Щепеткин А. Ф. Эволюция эллипсоидального вихря в стратифицированном океане в приближении f-плоскости // Известия АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1991. Т. 27, № 5. С. 492–503.
13. Завьялов П. О. Внутритермоклинные вихри в океане. М.: Научный мир, 2006. 120 с.

14. Зырянов В. Н. Топографические вихри в динамике океана. М.: ИВП РАН, 1995. 240 с.

15. Каменкович В. М., Кошляков М. Н., Монин А. С. Синоптические вихри в океане. 2-е изд. Л.: Гидрометеоиздат, 1987. 512 с.

16. Кошляков В. Н. Дифференциальные уравнения математической физики. М.: Высшая школа, 1970. 712 с.

17. Курбаткин В. Н. Динамика квазигеострофических атмосферных вихрей. Л.: Гидрометеоиздат, 1988. 180 с.

18. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.

19. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.

20. Максимов В. В. Теория гравитационного потенциала и ее приложения к гидродинамике. М.: Изд-во МГУ, 2005. 210 с.

21. Монин А. С. Теоретические основы геофизической гидродинамики. Л.: Гидрометеоиздат, 1988. 424 с.

22. Обухов А. М. К вопросу о геострофическом ветре // Известия АН СССР. Серия географическая и геофизическая. 1949. Т. 13, № 4. С. 281–306.

23. Педлоски Дж. Геофизическая гидродинамика: в 2 т. / пер. с англ. М.: Мир, 1984. Т. 1. 398 с.; Т. 2. 416 с.

24. Резник Г. М. Сингулярные вихри на бета-плоскости // Океанология. 1986. Т. 26, № 2. С. 165–173.

25. Суетин Б. П., Жмур В. В., Чхетиани О. Г. Бароклинная модель Большого Красного Пятна Юпитера // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2023. Т. 59, № 3. С. 286–298.

26. Сутырин Г. Г. О структуре монопольного бароклинного вихря // Океанология. 1989. Т. 29, № 1. С. 13–20.

27. Тернер Дж. Эффекты плавучести в жидкостях / пер. с англ. М.: Мир, 1977. 431 с.

28. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. 5-е изд. М.: Наука, 1977. 736 с.

29. Чарни Дж. Г. Динамика длинных волн в бароклинном западном потоке // Метеорология и гидрология. 1958. № 11. С. 34–42.

30. Asay-Davis X. S., Marcus P. S., Wong M. H., De Pater I. Jupiter's shrinking Great Red Spot and steady Oval BA: Velocity measurements with the 'Advection Corrected Correlation Image Velocimetry' automated cloud-tracking method // Icarus. 2009. Vol. 203, no. 1. P. 164–188.

31. Baines K. H. [et al.]. The atmospheres of the giant planets // Space Science Reviews. 2004. Vol. 115, no. 1. P. 1–2.

32. Batchelor G. K. An Introduction to Fluid Dynamics. Cambridge: Cambridge University Press, 1967. 615 p.

33. Bolton S. J. [et al.]. Jupiter's interior and deep atmosphere: The initial pole-to-pole passes with the Juno spacecraft // Science. 2017. Vol. 356, no. 6340. P. 821–825.

34. Boussinesq J. Théorie analytique de la chaleur. Paris: Gauthier-Villars, 1903. Vol. 2.

35. Burger A. P. Scale consideration of planetary motions of the atmosphere // Tellus. 1958. Vol. 10, no. 2. P. 195–205.

36. Carton X. Hydrodynamical modeling of oceanic vortices // Surveys in Geophysics. 2001. Vol. 22. P. 179–228.

37. Choi D. S., Banfield D., Gierasch P., Showman A. P. Velocity and vorticity measurements of Jupiter's Great Red Spot using automated cloud feature tracking // Icarus. 2007. Vol. 188, no. 1. P. 35–46.

38. Cushman-Roisin B., Beckers J.-M. Introduction to Geophysical Fluid Dynamics: Physical and Numerical Aspects. 2nd ed. Waltham: Academic Press, 2011. 875 p.

39. Dritschel D. G. A general theory for two-dimensional vortex interactions // Journal of Fluid Mechanics. 1995. Vol. 293. P. 269–303.

40. Dritschel D. G., Macaskill C. The role of boundary conditions in the dynamics of elliptical vortices // Physics of Fluids. 2004. Vol. 16, no. 12. P. 4500–4503.

41. Fletcher L. N. [et al.]. Jupiter's atmospheric structure from the Juno mission // Science. 2017. Vol. 356. P. 821–825.

42. Flierl G. R. Models of vertical structure and the instabilities of baroclinic eddies // Journal of Physical Oceanography. 1987. Vol. 17, no. 6. P. 873–893.

43. Galperin B. [et al.]. Zonation of geophysical and planetary flows // Geophysical Research Letters. 2004. Vol. 31, no. 13.

44. Guillot T. Interiors of giant planets inside and outside the solar system // Science. 1999. Vol. 286, no. 5437. P. 72–77.

45. Hide R. Dynamics of the atmospheres of the major planets // Space Science Reviews. 1969. Vol. 9. P. 510–528.

46. Hoskins B. J., McIntyre M. E., Robertson A. W. On the use and significance of isentropic potential vorticity maps // Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society. 1985. Vol. 111, no. 470. P. 877–946.

47. Ingersoll A. P. [et al.]. Dynamics of Jupiter's atmosphere // Jupiter: The Planet, Satellites and Magnetosphere / ed. by F. Bagenal. Cambridge: Cambridge University Press, 2004. P. 105–128.

48. Kida S. Motion of an elliptic vortex in a uniform shear flow // Journal of the Physical Society of Japan. 1981. Vol. 50, no. 10. P. 3517–3520.

49. Koshel K. V., Prants S. V. Chaotic Advection in the Ocean. Berlin: Springer, 2006. 156 p.

50. Koshlyakov M. N., Monin A. S. Synoptic eddies in the ocean // Annual Review of Earth and Planetary Sciences. 1978. Vol. 6. P. 495–523.

51. Legras R., Dritschel D. G. Conformal maps and the shape of vortices // Journal of Fluid Mechanics. 1991. Vol. 231. P. 355–392.

52. Legras R., Zeitlin V. Non-linear dynamics of rotating shallow water systems // Fluid Dynamics. 2004. Vol. 39. P. 200–215.

53. Lighthill M. J. Waves in Fluids. Cambridge: Cambridge University Press, 1978. 504 p.

54. Lemasquerier D., Facchini G., Favier B., Le Bars M. Remote determination of the shape of Jupiter’s vortices from laboratory experiments // Nature Physics. — 2020. — Vol. 16, No. 6. — P. 695–700.

55. Liu T., Salazar D. M. Planetary cloud tracking // Experiments in Fluids. 2022. Vol. 63, no. 5. P. 76.

56. Liu T., Wang B., Choi D. S. Flow structures of Jupiter's Great Red Spot extracted by using optical flow method // Physics of Fluids. 2012. Vol. 24, no. 9. P. 096601.

57. Mac Dowall R. J. [et al.]. Magnetohydrodynamic processes in Jupiter's deep atmosphere // Nature Astronomy. 2018. Vol. 2. P. 102–111.

58. Marcus P.S. Jupiter's Great Red Spot and other vortices // Annual Review of Astronomy and Astrophysics. 1993. Vol. 31. P. 523–573.

59. Marcus P.S. Prediction of a global climate change on Jupiter // Nature. 2004. Vol. 428. P. 828–831.

60. Marcus P.S. Numerical simulation of Jupiter’s Great Red Spot // Nature. — 1988. — Vol. 331, Iss. 6158. — P. 693–696.

61. Maxworthy T., Redekopp L.G. New theory of the Great Red Spot from solitary waves in the Jovian atmosphere // Nature. — 1976. — Vol. 260, Iss. 5551. — P. 509–511.

62. McKaig J. [et al.]. Vortex interaction and composite structures in shear flows // Fluid Dynamics Research. 2015. Vol. 47, no. 3.

63. McWilliams J. C. Fundamentals of Geophysical Fluid Dynamics. Cambridge: Cambridge University Press, 2006. 249 p.

64. McWilliams J. C. The emergence of isolated coherent vortices in turbulent flow // Journal of Fluid Mechanics. 1984. Vol. 146. P. 21–43.

65. Meacham S. P. Quasigeostrophic, ellipsoidal vortices in a stratified fluid // Dynamics of Atmospheres and Oceans. 1992. Vol. 16, no. 3–4. P. 189–223.

66. Meacham S. P., Pankratov K. K., Shchepetkin A. F., Zhmur V. V. Ellipsoidal vortices in rotating stratified flows // Dynamics of Atmospheres and Oceans. 1994. Vol. 21, no. 2–3. P. 167–212.

67. Mitchell J. L. [et al.]. Jovian stratospheric temperature and aerosol fields // Icarus. 2001. Vol. 153. P. 388–401.

68. Mitchell J. L., Vallis G. K. The transition to multiple equatorial jets // Journal of Geophysical Research. 2010. Vol. 115, no. E12.

69. Morales-Juberías R. [et al.]. Emergence of polar cyclones on Jupiter // Nature Geoscience. 2015. Vol. 8, no. 7. P. 523–526.

70. Morel Y., McWilliams J. C. Evolution of isolated baroclinic vortices // Journal of Physical Oceanography. 1997. Vol. 27, no. 5. P. 727–748.

71. Nakamula A., Obuse K., Sawado N., Shimasaki K., Toda K. Stable solitary vortices in two-dimensional quasi-integrable systems // Journal of Physics: Conference Series. — 2023. — Vol. 2667, No. 1. — P. 012010.

72. O'Neill M. E. [et al.]. Barotropic modeling of Jupiter's alternating jets // Journal of the Atmospheric Sciences. 2015. Vol. 72, no. 8. P. 3215–3228.

73. Orton G. S. [et al.]. The first close-up images of Jupiter's polar regions from Juno // Geophysical Research Letters. 2017. Vol. 44, no. 10. P. 4599–4606.

74. Parisi M. [et al.]. The depth of Jupiter's Great Red Spot constrained by Juno gravity overflights // Science. 2021. Vol. 374, no. 6571. P. 964–968.

75. Polvani L. M., Zabusky N. J., Flierl G. R. Two-layer geostrophic vortex dynamics // Journal of Fluid Mechanics. 1989. Vol. 205. P. 215–242.

76. Porco C. C. [et al.]. Cassini imaging of Jupiter's atmosphere, satellites, and rings // Science. 2003. Vol. 299, no. 5612. P. 1541–1547.

77. Rayleigh L. On the dynamics of revolving fluids // Proceedings of the Royal Society of London. Series A. 1916. Vol. 93, no. 648. P. 148–154.

78. Read P. L. [et al.]. Jupiter's unearthly jets: A new turbulent model // Nature Physics. 2018. Vol. 14. P. 15–16.

79. Read P. L., Gierasch P. J., Conrath B. J. Mapping potential-vorticity dynamics on Jupiter. II: The Great Red Spot from Voyager 1 and 2 data // Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society. 2006. Vol. 132, no. 618. P. 1605–1625.

80. Reinaud J. N., Dritschel D. G., Koudella C. R. The shape of vortices in quasi-geostrophic turbulence // Journal of Fluid Mechanics. 2003. Vol. 474. P. 175–191.

81. Rhines P. B. Waves and turbulence on a beta-plane // Journal of Fluid Mechanics. 1975. Vol. 69, no. 3. P. 417–443.

82. Roberts P. H., King E. M. On the genesis of the Earth's magnetism // Reports on Progress in Physics. 2013. Vol. 76, no. 9. P. 096801.

83. Sada P. V., Beebe R. F., Conrath B. J. Comparison of the structure and dynamics of Jupiter's Great Red Spot between the Voyager 1 and 2 encounters // Icarus. 1996. Vol. 119, no. 2. P. 311–335.

84. Saffman P. G. Vortex Dynamics. Cambridge: Cambridge University Press, 1992. 311 p.

85. Salmon R. Lectures on Geophysical Fluid Dynamics. New York: Oxford University Press, 1998. 378 p.

86. Sánchez-Lavega A. [et al.]. Deep winds beneath Jupiter's upper clouds from a trajectory model // Nature. 2008. Vol. 451. P. 437–440.

87. Sánchez-Lavega A., Hueso R., Eichstädt G. [et al.]. The rich dynamics of Jupiter's Great Red Spot from JunoCam: Juno images // The Astronomical Journal. 2018. Vol. 156, no. 4. P. 162.

88. Schubert G. [et al.]. Interior structure and dynamics of Jupiter // Jupiter: The Planet, Satellites and Magnetosphere. Cambridge: Cambridge University Press, 2004. P. 281–306.

89. Shetty S., Marcus P. S. Changes in Jupiter’s Great Red Spot (1979–2006) and Oval BA (2000–2006) // Icarus. 2010. Vol. 210, no. 1. P. 182–201.

90. Simon A. A., Tabataba-Vakili F., Cosentino R. [et al.]. Historical and contemporary trends in the size, drift, and color of Jupiter's Great Red Spot // The Astronomical Journal. 2018. Vol. 155, no. 4. P. 151.

91. Simon-Miller A. A., Gierasch P. J., Beebe R. F. [et al.]. New observational results concerning Jupiter's Great Red Spot // Icarus. 2002. Vol. 158, no. 1. P. 249–266.

92. Smith B. A. [et al.]. The Jupiter system through the eyes of Voyager 1 // Science. 1979. Vol. 204. P. 951–972.

93. Stern M. E. Minimal properties of planetary eddies // Journal of Marine Research. 1975. Vol. 33. P. 1–13.

94. Stevenson D. J. Planetary magnetic fields // Earth and Planetary Science Letters. 2003. Vol. 208, no. 1–2. P. 1–11.

95. Sutyrin G. G., Flierl G. R. Intense vortex motion on the beta plane: Development of the beta gyres // Journal of the Atmospheric Sciences. 1994. Vol. 51, no. 5. P. 773–790.

96. Taylor G. I. Experiments with rotating fluids // Proceedings of the Royal Society of London. Series A. 1921. Vol. 100, no. 703. P. 114–121.

97. Vallis G. K. Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics: Fundamentals and Large-scale Circulation. Cambridge: Cambridge University Press, 2006. 745 p.

98. Vasavada A. R., Ingersoll A. P., Banfield D. [et al.]. Galileo imaging of Jupiter's atmosphere: The Great Red Spot, equatorial region, and White Ovals // Icarus. 1998. Vol. 135, no. 1. P. 265–275.

99. Wicht J. [et al.]. Dynamo models for giant planets // Space Science Reviews. 2010. Vol. 152. P. 603–632.

100. Williams R. T. Planetary atmospheres: Mechanisms of zonal flow // Journal of the Atmospheric Sciences. 1978. Vol. 35. P. 1399–1426.

101. Williams G.P. Jovian and Comparative Atmospheric Modeling // Advances in Geophysics. — New York: Elsevier, 1985. — Vol. 28. — P. 381–429.

102. Wong M. H. [et al.]. High-resolution UV/optical/IR imaging of Jupiter in 2015–2019 // The Astrophysical Journal Supplement Series. 2020. Vol. 247, no. 2. P. 58.

103. Young R. E., Read P. L. Forward and inverse kinetic energy cascades in Jupiter's turbulent weather layer // Nature Physics. 2017. Vol. 13. P. 1135–1140.

104. Youssef A., Marcus P. S. The dynamics of jovian white ovals from formation to merger // Icarus. 2003. Vol. 162. P. 74–93.

105. Zhmur V. V., Pankratov K. K. Dynamics of desingularized quasigeostrophic vortices // Physics of Fluids A. 1991. Vol. 3, no. 5. P. 1464.